ALEXANDRE BOTELHO BRITO

Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática

OURO PRETO
2010

ALEXANDRE BOTELHO BRITO

Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

OURO PRETO
2010

B862q Brito, Alexandre Botelho.
Questionando o ensino de conjuntos numéricos em fundamentos de análise real [manuscrito] : da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de licenciatura em matemática / Alexandre Botelho Brito. – 2010.
viii, 84 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Análise matemática - Teses. 3. Ensino superior - Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

CDU: 517:378.147

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática

Autor: Alexandre Botelho Brito

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Alexandre Botelho Brito e aprovada pela Comissão Examinadora.
24 de Setembro de 2010.

____
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – UFOP – Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Maria Clara Rezende Frota – PUC - Minas

____
Profa. Dra. Jussara de Matos Moreira - UFMG

2010

Dedico este trabalho à minha esposa Kewla e às amadas filhas Marina e Isadora.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço ao Grande Arquiteto do Universo, que é Deus, por possibilitar e abençoar quase três anos de longas viagens, muito estudo, novas amizades e muitas vitórias!

Agradeço também ao orientador e amigo Frederico da Silva Reis (Fredão) e sua família, afinal de contas foram inúmeras tardes/noites de orientações em dias nada oportunos... Reveillon e fins de semana até altas horas: momentos abdicados por ele para acompanhar os seus orientandos!

Ao ISEIB e seus alunos pela oportunidade de aplicação das atividades e convívio com pessoas tão especiais.

À Jussara e Maria Clara pelas contribuições dadas na qualificação e defesa dessa dissertação.

Aos amigos e companheiros de curso: Davis, Anderon, Chrisley, Carmem e Lílian, representando todos os novos laços de amizade construídos nesse período, cujo apoio amenizou e tornou alegre e agradável todo o processo.

À Ana Cristina, Roseli, Marger, Dale, Fred, Beth, Jussara, Felipe e Geovane, professores dedicados com o mestrado, o aprendizado dos seus alunos e com o desenvolvimento da Educação Matemática no Brasil.

Aos amigos de Montes Claros que, mesmo distantes, torciam por mim.

À minha Mãe Zita, meus irmãos Carla, Graciele e Gabriel, meus cunhados Durães e Jhivago e meus sobrinhos muito queridos Analu e Pedro, os quais sempre me apoiaram, torceram e compreenderam a minha ausência física em vários momentos. Obrigado mãe por toda a preocupação com minha saúde, as viagens, a minha alimentação, o meu sono... Mãe é mãe...Agradeço também ao meu pai Sinval pelos valores que me ensinou e me tornou o homem que sou. Sei que você estaria feliz com essa vitória!

Em especial agradeço à minha amada esposa Kewla por me incentivar a lutar pelo mestrado, ao apoio emocional dedicado, ao amor sempre presente, à compreensão, às cartinhas deixadas na mala que acalentavam o meu espírito em Ouro Preto, à companhia nos congressos e algumas viagens de orientação, por me buscar na rodoviária ás 5 horas da madrugada tantas vezes, me esperar chegar de viagem até meia noite para, então, sairmos com os amigos, enfim, você foi o apoio ideal para a concretização desse trabalho.
TE AMO!!!

Agradeço também à sua família por estar com você nas minhas ausências, o que trouxe tranquilidade para as minhas viagens.

Finalmente agradeço às novas princesas Isadora e Marina, filhas tão desejadas que nasceram dando exemplo de superação. Vocês chegaram para completar a nossa família e a nossa vida!!!

RESUMO

O presente trabalho busca investigar como os Conjuntos Numéricos são apresentados / abordados em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática e de que forma eles podem ser problematizados / explorados na perspectiva de um ensino que aborde dialeticamente seus aspectos intuitivos e rigorosos. A pesquisa teórico-bibliográfica tece algumas considerações sobre o ensino de Análise Real, a partir da discussão de questões como definição e imagem conceitual, prova formal, rigor e intuição. Após uma análise de livros didáticos, apresentamos uma proposta didática para ser utilizada em disciplinas de Fundamentos de Análise Real, a qual foi implementada com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. As considerações destacam a importância do professor como mediador na constante busca do equilíbrio entre rigor e intuição, apontam para a necessidade de uma maturidade matemática do aluno e para a postura dos professores, no percurso das disciplinas de introdução a Análise Real, influenciando afetivamente no processo de ensino-aprendizagem.

PALAVRAS CHAVE: Ensino de Análise Real. Rigor e Intuição. Educação Matemática Superior.

ABSTRACT

This study aims to investigate how the Numerical Sets are presented / discussed in didactic books used in Real Analysis courses in Mathematics and how they could be debated / explored the prospect of an education that addresses their issues rigorous and intuitive dialectically. The theoretical and research literature presents some considerations on the teaching of Real Analysis, from the discussion of issues of definition and concept image, formal proof, rigour and intuition. After an analysis of didactic books, we present a proposal to be used in teaching courses in Fundamentals of Real Analysis, which was implemented with students in a course in Mathematics. Considerations highlight the importance of the teacher as mediator in the constant search for balance between rigor and intuition point to the need for a student's mathematical maturity and the attitude of teachers in the disciplines of track introduction to Real Analysis, influencing the process affectively teaching and learning.

KEYWORDS: Teaching Real Analysis. Rigour and intuition. Higher Mathematics Education.

SUMÁRIO

Capítulo 1

INICIANDO A DISCUSSÃO

> "O abandono da Matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas deste mundo".
>
> Roger Bacon

1.1. Introdução

Nosso primeiro contato com a Análise Matemática ocorreu no primeiro semestre de 2000, ano em que cursávamos o sétimo e penúltimo período do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Montes Claros. No decorrer da disciplina, o professor buscava analisar e demonstrar tópicos corriqueiros do conteúdo matemático de números e funções, os quais, teoricamente, os alunos já deveriam "dominar". Sempre buscávamos através de "discussões" com o professor, uma forma mais intuitiva de visualização dos resultados, o que sempre nos foi negado por parte do mesmo, com a justificativa de que uma explicação "menos formal" poderia levar ao erro.

Em 2002, o Departamento de Matemática da UNIMONTES realizou um "Curso de Análise" com o Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – UFOP, com o objetivo de preparar outros professores da referida instituição para atuar nos chamados "cursos emergenciais" de Licenciatura em Matemática oferecidos pela universidade em diversas cidades da região de Montes Claros – MG. Neste curso, deparamo-nos com uma outra postura didática, já que o professor ministrou as aulas de uma forma mais intuitiva mas, mesmo assim, foi mantido um certo "formalismo" nas demonstrações.

Neste mesmo ano de 2002, ministramos aulas de "Análise Matemática", disciplina com uma carga horária de 90 horas/aula, nos cursos emergenciais de Guanhães, Capelinha, Almenara e Unaí, pela UNIMONTES, experiência esta que nos motivou a pesquisar nesta área da Educação Matemática Superior.

Nossa terceira experiência discente com a Análise Matemática ocorreu com a Profª. Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto – UFMG, no curso de Especialização em Educação Matemática Superior da UNIMONTES, no ano de 2003. Neste curso, seguiu-se a mesma tendência apresentada no curso de 2002.

Após cursar a disciplina Análise, em que diversas abordagens diferenciadas foram adotadas, surgiram-me algumas inquietações, tais como:

- Quais são o papel e o lugar da Análise na formação do futuro Professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio?

- Por que ensinar Análise Real na universidade não tem sido tarefa fácil?

- Quais são as causas de tantas reprovações e evasões?

- O uso de uma linguagem metafórica pode auxiliar o ensino de Análise Real?

Ao ingressar no Mestrado Profissional em Educação Matemática, interessei-me, então, pela Educação Matemática no Ensino Superior e, especificamente, pelo ensino de Análise, motivado por leituras e inquietações, às quais tento lançar alguma luz, com a presente pesquisa.

1.2. Um pouco do ensino da Análise a partir de sua história

Iniciando por uma análise histórica, pode-se perceber que os "Elementos" de Euclides, que foram muito utilizados no aprendizado da Matemática, não surgiram somente de uma análise dedutiva e, mesmo após os pensamentos euclidianos devidamente formulados, nota-se que os mesmos partiram também de pressupostos intuitivos, conforme afirma Kline (1976, p. 54): "Mesmo essa estrutura, visando ser estritamente lógica, apóia-se fortemente em argumentos intuitivos e definições despropositadas e até sem sentido e em provas inadequadas, como perceberam os matemáticos do século XIX".

Ávila (2006, p. 43) ressalta que o método axiomático foi evidenciado, pela primeira vez, nos "Elementos" de Euclides. Contudo, posteriormente, os outros matemáticos constataram que a axiomática de Euclides compreendia falhas, além de ser incompleta. Ao final do século XIX, David Hilbert, através da publicação do livro "Fundamentos da Geometria", fez uma "apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da Geometria Euclidiana". Inicia-se, a partir de então, a preocupação com as abordagens rigorosas, sobretudo, na Análise Matemática.

Conforme Kline (1976), o Cálculo surgiu com Newton e Leibniz, podendo-se citar outros nomes que igualmente contribuíram, como Descartes, Fermat, Cavalieri, Pascal, Roberval, Barrow, dentre outros. No século XVII, alguns matemáticos como os irmãos Bernoulli, D'Alembert, Euler e Lagrange, procuraram estabelecer uma fundamentação mais rigorosa para o Cálculo; porém não obtiveram êxito.

A partir daí, ficava diminuída, ao menos em parte, a importância do rigor na formulação dos métodos, pois muitas vezes os resultados empíricos já eram um teste do valor desses métodos. A abordagem rigorosa acerca da Análise Matemática ocorreu, de fato, no século XIX, sendo inegável a contribuição de Weierstrass e, especialmente, de Cauchy.

Dentro da perspectiva didático-metodológica de utilização da história no ensino de Matemática, Grattan-Guinness (1997, p. 87) salienta a importância de tratar da História da Matemática no ensino dessa disciplina, uma vez que "a educação imita a história". Atentando para tal fato, Ávila (2006) evidencia, em seus livros, aspectos históricos da Matemática em suas "Notas históricas e Complementares", que encerram cada capítulo. No prefácio de seu livro *"Análise Matemática para Licenciatura"*, Ávila (2001, pref.) faz uma sucinta referência à importância da Análise na licenciatura, justificando a importância das notas complementares:

> Um dos objetivos principais de um curso de Análise é a prática em demonstrações. Enunciar e demonstrar teoremas é uma das ocupações centrais de todo professor ou estudioso da Matemática... Daí uma das principais razões de uma disciplina de Análise nos cursos de licenciatura. Mas, aliada a essa tarefa de praticar a arte de enunciar e demonstrar teoremas, o aluno de licenciatura tem, na disciplina de Análise, a oportunidade de se familiarizar com uma das partes mais importantes da Matemática que se vem desenvolvendo desde o início do século XIX. E para facilitar a compreensão desse desenvolvimento, e dar ao leitor uma visão mais abrangente e enriquecedora de toda a Matemática, o presente texto incorpora várias notas históricas e complementares ao final de cada capítulo, como já fizemos em outros livros de nossa autoria.

Reis (2001, p. 18) afirma estar de acordo com este autor em relação às notas históricas, ao considerá-las um "avanço" no que diz respeito aos livros de Cálculo e Análise, ressaltando ainda que elas "refletem uma preocupação do autor em permitir /

contribuir para uma contextualização histórica dos conteúdos aprendidos por parte dos alunos".

Tendo em vista os aspectos históricos, é possível afirmar que, antes mesmo que o Cálculo passasse a ter uma formulação rigorosa, a Análise já vinha ampliando-se e sendo aplicada com sucesso. Evidentemente, conclui-se que as importantes contribuições advindas dos matemáticos, especialmente os do século XIX, foram formuladas baseando-se em interpretações intuitivas. Como sugere Gascho (2003, p. 23), "todo conhecimento que consideramos objetivo se iniciou na esfera da subjetividade".

Lebesgue (*apud* KLINE, 1976, p. 69) também discorre sobre a importância da intuição em relação à lógica:

> Não se fez nenhuma descoberta na Matemática por um esforço de lógica dedutiva; ela resulta do trabalho da imaginação criativa que constrói o que parece ser verdade, guiada às vezes por analogias, outras por um ideal estético, mas o que não se mantém absolutamente em bases lógicas sólidas. Uma vez feita uma descoberta, a lógica intervém para atuar como controle; é a lógica que, em última análise, decide se a descoberta é realmente verdadeira ou ilusória; seu papel, portanto, embora considerável, é apenas secundário.

Ao explanar esses fatos históricos pretende-se, de certo modo, justificar a premente necessidade de equilíbrio entre rigor e intuição, que é fundamental no ensino de Análise Matemática.

Observa-se que os alunos apresentam certa dificuldade e consequente temor (ou seria o contrário?) pela Análise Matemática. Conforme afirma Pinto (2001, p.123):

> Ensinar Análise Real na universidade não tem sido tarefa fácil. A Análise Matemática baseia-se em princípios axiomáticos e sistemáticos, cujas definições e deduções são formais e rigorosas do ponto de vista lógico. O professor expõe o conteúdo teórico da disciplina como uma introdução aos aspectos formais da Matemática, iniciando os estudantes na cultura do matemático profissional.

A pesquisadora salienta que a transição do ensino secundário para o superior, assim como a do ensino de Cálculo para a Análise, nas universidades, tem provocado grande impacto entre os estudantes. Isso se deve ao fato de que os conteúdos são abordados de diferentes formas e possuem metodologias distintas. Tanto na escola elementar quanto nos cursos de Cálculo, no ensino superior, são utilizados aspectos "computacionais e de manipulação simbólica" que levarão a um resultado final. Nesse tipo de prática, a obtenção dos conceitos matemáticos se dá através de experimentações, utilização de gráficos e imagens visuais que possibilitarão a construção de argumentos para comprovar os teoremas e afirmações. Em contrapartida, nota-se que a Análise Matemática tem sido essencialmente dedutiva, procurando formas puramente abstratas.

Essa transição deve ser feita com cautela. Do contrário, a mesma pode apresentar-se perniciosa aos alunos, uma vez que a Análise desperta o receio dos estudantes pela sua abordagem lógico-formal e definições rigorosas. O temor dos alunos mediante essa disciplina pode também estar envolto pelo "mito" de que esse conteúdo, por ter um aspecto formal e rigoroso, é o mais difícil da graduação e o responsável pelas reprovações e até mesmo pelas evasões dos discentes do curso de Matemática.

Outro pressuposto que contribui para esse "mito" nas universidades é o próprio professor que ministra a matéria já que, dependendo de sua postura e tipo de abordagem, despertará ainda mais temor e aversão dos alunos. Reis e Masson (2003, p. 4) coadunam com este raciocínio ao afirmar que "há casos em que o professor ainda cultiva uma ideia de que a disciplina só é 'boa' quando se reprova um grande número de alunos. Todos estes fatores contribuem intensamente para a reprovação em massa".

A dificuldade dos alunos em enfrentar e se adaptar ao "novo" e, por vezes, o pouco interesse dos professores em utilizar práticas diferentes das tradicionais, pode contribuir para o fracasso dos estudantes, não apenas na Análise Matemática, como em todo o curso de graduação. Percebe-se que no ambiente da universidade existe certa resistência, por parte de alguns professores, com relação às mudanças das estratégias de ensino da Análise, como afirmam Reis e Masson (2003, p. 4):

> É preciso aplicar / trabalhar uma nova metodologia buscando os resultados desejados para "convencer" alguns professores de que existe uma solução, e uma solução muito simples, de levar o conhecimento sem causar tantas reprovações e evasões e mantendo o mesmo (ou até melhorando) nível do conteúdo programático da disciplina.

1.3. Discutindo as abordagens rigorosa e intuitiva em Análise

Para iniciarmos essa discussão, buscaremos a definição encontrada em alguns dicionários para o termo intuição:

1) Apreensão direta, imediata e atual de um objeto na sua realidade individual;[1]

2) Pressentimento, espécie de instinto pelo qual se adivinha, descobre ou conhece o que é ou deve ser;[2]

3) Conhecimento imediato e claro, sem recorrer ao raciocínio.[3]

Encontramos, nos mesmos dicionários, definições filosóficas para o termo intuição:

1) Contemplação pela qual se atinge em toda sua plenitude uma verdade de ordem diversa daquelas que se atingem por meio da razão ou do conhecimento discursivo ou analítico;[1]

2) Percepção, conhecimento claro, direto imediato e espontâneo da verdade sem auxílio do raciocínio;[2]

3)Conhecimento claro, direto, imediato e espontâneo da verdade.[3]

Ao analisar as definições supracitadas, Reis (2001, p. 70) recorre à categorização da intuição feita por Perminov (1988) e Fischbein (1978), concluindo que a intuição a que nos referimos nas demonstrações de Análise Real são "resultantes de um processo que envolve claramente, um treinamento intelectual feito de forma sistematizada ao longo dos vários anos de instrução que precedem ao ensino universitário" e, nesse processo, os alunos fazem uso, inclusive, de inferências por analogia.

Ao fazer uma análise das provas / demonstrações matemáticas, o autor infere que o movimento do processo de produção do conhecimento matemático tem uma fase inicial

---

[1] Novo Dicionário da Língua Portuguesa- Aurélio Buarque de Holanda Ferreira- Editora Nova Fronteira-Rio de Janeiro-1986.
[2] Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa - Caudas Aulete – Editora Delta-Rio de Janeiro-1974.
[3] Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa – Mirador Internacional – Editora Melhoramentos – São Paulo-1975.

mais empírica e intuitiva e uma fase seguinte de aperfeiçoamento da prova, momento em que o rigor se faz mais presente.

Os questionamentos feitos até aqui não significam que o ensino de Análise Matemática deva ser puramente intuitivo, mesmo porque o formalismo e o rigor são características intrínsecas a tal conteúdo. Entretanto, há de se destacar Grattan-Guiness (1997, p. 81) quando o mesmo afirma que "a História da Matemática ensina muito claramente que, de fato, o rigor se dá em níveis, os quais, portanto, devem ser especificados antes de se avaliar o trabalho matemático do estudante".

Mediante tal afirmação, aconselha-se selecionar qual o nível de rigor mais apropriado, do ponto de vista didático-pedagógico. Para tanto, deve-se atentar ao fato de que os estudantes já vêm do ensino secundário com uma formação matemática pré-estabelecida e como ressaltam Soares e outros (1999, p. 95), "é ingenuidade acreditar que os alunos vão abandonar suas imagens, construídas ao longo da vida escolar, para substituí-las de imediato por uma definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise na universidade".

Outra questão relevante é que a Análise Matemática faz parte da grade curricular de cursos que formarão futuros professores, como no caso específico da Licenciatura em Matemática. Segundo Reis (2001, p. 83), o problema da relação entre rigor e intuição parece afetar tanto o formador de professores de Matemática quanto o futuro professor de Matemática, uma vez que este último tende a fazer uso das mesmas estratégias de ensino que foram aplicadas no seu processo de formação profissional:

> Os professores universitários, formados sob uma perspectiva técnico-formal, enfatizam / priorizam o conhecimento específico do conteúdo em sua ação enquanto formadores de professores e estes, os últimos na "hierarquia docente" encabeçada por seus formadores, tendem a reproduzir em sala de aula nos ensinos fundamental e médio uma adaptação do "show" de conhecimentos específicos dados por seus formadores, mestres e doutores de inquestionável conhecimento matemático.

Consoante com Kline (1976), Reis (2001, p. 26) ressalta que a prática de se utilizar uma abordagem puramente rigorosa no ensino de Análise pode resultar na dificuldade de aprendizagem dos discentes, estimulando-os a simplesmente memorizar os teoremas e provas:

> Analisando os cursos de Análise ministrados na graduação, parece-nos que numa boa parte deles há um excesso de formalismo e rigor na exposição dos temas, o que pretendemos compreender. Diante desta prática, resta aos alunos, a memorização dos principais resultados e de suas demonstrações que, espera-se, tenham sido entendidos intuitivamente no Cálculo.

Com o intuito de identificar os obstáculos para os alunos, num primeiro contato com uma abordagem formal, Pinto (2001, p. 125) realizou uma pesquisa em que trabalhos individuais escritos e entrevistas foram feitos com alunos de Licenciatura em Matemática da Universidade de Warwick, Inglaterra, investigando as estratégias usadas pelos estudantes ao longo do curso de Análise. Segundo a pesquisadora:

> Os estudantes são provenientes de um sistema educacional onde o ensino de Matemática está principalmente centrado em cálculos e na manipulação de símbolos, bem como na exploração de conceitos a partir de suas propriedades. A Análise formal passa a requerer dos alunos um trabalho com definições que envolvem quantificadores múltiplos e lógica proposicional. Estudantes podem fazê-lo como se estivessem iniciando uma construção nova, compartimentalizada das imagens prévias e deixando a reconciliação com experiências anteriores para depois, ou, partindo do conhecimento prévio, reconstruindo-o.

Nesta pesquisa, dois tipos de estudantes foram identificados. O primeiro procura utilizar "seu conhecimento prévio essencialmente para extrair significado, ou seja , para produzir um significado para a nova experiência dentro do próprio contexto em estudo no momento." A autora afirma que é possível extrair significado, não só de modo mecânico, mas também reflexivo. Já o segundo é composto por estudantes que fazem uso de experiências anteriores para "atribuir significado ao novo contexto. Sua estratégia principal é de explorar o conceito novo, analogicamente, interpretando-o".

Os alunos que extraem significado tendem a lidar com a disciplina de maneira não reflexiva, apenas decorando as provas e teoremas, pois não conseguem relacioná-los conceitualmente para o efetivo entendimento. Acontece então, uma reprodução das soluções sem se preocuparem com os devidos argumentos. Em contrapartida, os alunos que atribuem significado procuram refletir sobre os teoremas, e em decorrência fazem um "esforço cognitivo maior" do que aqueles que simplesmente memorizam os resultados. Nesse caso, os estudantes fazem analogias entre os conceitos, representações e imagens que já dominavam, previamente, procurando tornar a reelaborar tais conceitos. Embora utilizem um procedimento intuitivo, esses alunos produzem deduções formais. Como ressalta Pinto (2001, p. 132), "à medida que a análise prossegue, episódios sugerem estratégias para elaboração de respostas satisfatórias do ponto de vista matemático-formal muito próximas a abordagens que poderiam ser classificadas como informais".

Para a autora, os estudantes que se apóiam na aprendizagem "de cor", inevitavelmente, acabam por construir um conhecimento completamente instrumental. Esse recurso, muitas vezes, é utilizado pelo fato dos estudantes não verem uma outra alternativa para obterem boas notas e passarem nos exames finais, já que o professor não faz uso de uma abordagem menos formal. Como comprovação deste temor dos alunos pela Análise ser o responsável pelas evasões, vale explicitar um trecho de uma entrevista da pesquisa de Pinto (2001, p. 142), com uma aluna de licenciatura:

> Eu vou para outro planeta quando se fala de Análise. Para mim, é completamente surrealista. É um choque em várias pessoas do grupo...várias pessoas...acho que ninguém entende aquilo. Muitas pessoas estão ficando muito frustradas com isto. Eu só tenho vontade de jogar os livros para cima e... levantar e ir embora. (Laura, primeira entrevista)

Este relato nos faz refletir sobre qual é, então, o papel da Análise na formação do futuro professor de Matemática teórica e praticamente.

1.4. A questão do "equilíbrio" entre rigor e intuição

Ávila (2006) propõe, no prefácio de seu livro *Introdução à Análise Matemática*, que haja um "equilíbrio" entre as abordagens formal e intuitiva, embora o rigor seja inerente ao curso de Análise:

> Um curso se Análise, Cálculo, ou qualquer outra disciplina matemática, deve, antes de tudo, transmitir idéias. E isto, muitas vezes, é prejudicado em exposições carregadas de formalismo e rigor. Até mesmo em cursos mais avançados, a insistência excessiva nesses elementos da apresentação frequentemente dificulta a transmissão das ideias e do próprio aprendizado.

Assim como Ávila, outros autores pesquisadores estão de acordo com o fato de que deve haver um equilíbrio entre o rigor e a intuição. Reis (2001), por exemplo, concebe o rigor e a intuição como entidades não-dicotômicas e complementares, mas pondera que o ponto de equilíbrio acontece na prática pedagógica de cada professor, ao refletir sobre que abordagens ou estratégias deve utilizar no ensino dos diversos conteúdos. Esta relação entre o rigor e a intuição na prática da sala de aula será retomada no capítulo seguinte.

Outro aspecto interessante nesta discussão é a importância da prática pedagógica do professor para que se tenha uma abordagem mais intuitiva ou mais rigorosa. Machado (2001, p. 13), por exemplo, afirma que o uso de metáforas e alegorias no ensino da Matemática, na abordagem de determinados conteúdos, pode contribuir para reduzir o excesso de formalismo recorrente, em especial, no ensino de Análise Matemática: "A utilização da linguagem metafórica é 'um poderoso instrumento' para a construção analógica de pontes entres os temas considerados".

O pesquisador cita, como exemplo, uma aula em que o conjunto dos números naturais será pensado como uma enumeração dos "infinitos quartos" de um hotel (também conhecido como o "hotel de Hilbert"). Alguns problemas propostos são: como hospedar mais um hóspede, mais um número finito de hóspedes ou mais uma quantidade enumerável de hóspedes, estando todos os quartos do hotel ocupados? Essa associação é útil para que as idéias acerca da aritmética transfinita, propostas por Cantor, sejam compreendidas de uma maneira mais clara, uma vez que esse tipo de abordagem é menos rigorosa.

Assim, a abordagem intuitiva nos cursos de Análise é proposta e investigada por vários pesquisadores. Espera-se, então, que os docentes utilizem abordagens mais intuitivas, que produzam um melhor resultado em termos de aprendizado e, porque não dizer, também de redução do número de reprovações.

Acreditamos que isto é possível e pode ser feito sem abandonar de forma alguma o formalismo intrínseco à Análise Matemática. Trata-se de diminuir a distância entre a teoria e a prática, pois como afirma Reis (2001, p. 8), "há a necessidade de um rompimento com o ensino formalista atual, tendo em vista, principalmente, a formação de um professor de Matemática com multiplicidade e flexibilidade de conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares".

1.5. Apresentando nossa pesquisa

Neste momento, apresentaremos em linhas gerais, nossa questão de investigação, nossos objetivos e nossa metodologia de pesquisa. Posteriormente, delinearemos de forma mais detalhada nossa pesquisa em seu contexto.

1.5.1. Questão de Investigação

Com base em nossos questionamentos e leituras, elaboramos a seguinte questão passível de investigação:

Como os Conjuntos Numéricos são apresentados / abordados em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática e de que forma eles podem ser problematizados / explorados na perspectiva de um ensino que aborde dialeticamente seus aspectos intuitivos e rigorosos?

Tal questão de investigação a ser respondida na pesquisa situa-se na linha de pesquisa "Educação Matemática Superior, Informática Educacional e Modelagem Matemática", desenvolvida no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

1.5.2. Objetivos

- Discutir o ensino de Análise Real no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior;

- Analisar livros didáticos de Análise utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática;

- Apresentar uma proposta de ensino de Conjuntos Numéricos para disciplinas de Fundamentos de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática.

1.5.3. Metodologia de Pesquisa

- Pesquisa teórico-bibliográfica sobre Educação Matemática no Ensino Superior, destacadamente sobre o ensino de Análise Real;

- Pesquisa documental, a partir da análise da apresentação e da abordagem dos conceitos de Conjuntos Numéricos, em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática;

- Pesquisa de campo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática do ISEIB – Instituto Superior de Educação Ibituruna, em Montes Claros – MG, a partir do planejamento, implementação e avaliação de atividades didáticas sobre Conjuntos Numéricos.

1.5.4. Estrutura da Dissertação

Após este Capítulo 1, no qual apresentamos as idéias iniciais do nosso trabalho, partiremos para o Capítulo 2, no qual teceremos algumas considerações sobre o ensino de Análise Real, procurando explorar as relações entre rigor e intuição, definições e prova formal.

Na sequência, o Capítulo 3 apresenta nossa pesquisa em seu contexto e a análise da apresentação e da abordagem dos Conjuntos Numéricos, em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática.

No Capítulo 4, apresentamos uma proposta de ensino de Conjuntos Numéricos para disciplinas de Fundamentos de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática.

Já no Capítulo 5, procuraremos analisar os dados obtidos em nossa pesquisa de campo, à luz de possíveis categorizações emergentes, a partir de nossos instrumentos de coleta de dados.

Por fim, tecemos as Considerações Finais, tentando retomar aspectos de nossas pesquisas teórico-bibliográfica, documental e de campo, relacionando-os a nossos objetivos e a nossa questão de investigação.

Como apêndice da dissertação, apresentamos como produto educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, uma proposta didático-pedagógica para disciplinas de "Fundamentos de Análise Real" em cursos de Licenciatura em Matemática, incluindo atividades didáticas relacionadas à **"História e Desenvolvimento dos Conjuntos Numéricos: Das noções intuitivas para as definições rigorosas".**

Os temas abordados nestas atividades são:

1) Números Naturais: Do problema do princípio da contagem para os Axiomas de Peano;

2) Números Inteiros: Do problema da comparação de medidas para as estruturas de Anel e Domínio de Integridade;

3) Números Racionais: Do problema da razão de grandezas para a estrutura de Corpo;

4) Números Irracionais: Do problema da incomensurabilidade de segmentos para a Teoria das Proporções de Eudoxo;

5) Números Reais: Do problema da representação da reta numérica para os Cortes de Dedekind.

Capítulo 2
CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE REAL: RIGOR E INTUIÇÃO, DEFINIÇÕES E PROVA FORMAL.

"O rigor se dá em níveis".
Grattan-Guinnes

2.1. Matemática Elementar x Matemática Formal

O ensino de Análise Real nas universidades tem se destacado por altos índices de reprovação. Esta é uma constatação de Bortoloti (2009) ao investigar as relações entre afeto e cognição no contexto da disciplina Análise Real num curso de Matemática (licenciatura e bacharelado). Ao mencionar um percentual de reprovação na faixa de 47% (na universidade em que a pesquisa foi realizada), a autora nos chama atenção para a importância de se identificar aspectos emocionais que influenciam diretamente o desempenho dos alunos na disciplina, especialmente nos momentos de avaliação formal. No intuito de enumerar algumas possíveis justificativas para as relações de afeto e cognição, Bortoloti (2009, p. 158) pontua:

> Inferimos que todo o domínio afetivo estava entrelaçado nessa relação, pois, ao falarem desta disciplina, os alunos expressaram não só as emoções, como também algumas atitudes, às vezes baseadas em crenças construídas ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Apesar deste não ser o foco de nossa pesquisa, nossa experiência docente com Análise realmente aponta para uma "tensão" em seu ensino, que frequentemente é relacionada, pelos alunos, aos momentos avaliativos, dentre outros.

Na perspectiva de se explorar mais aprofundadamente esta "tensão", julgamos ser necessário discutir qual é a abordagem adequada para a sala de aula de Análise. Entretanto, é necessário, antes, apontar algumas razões para se ensinar Análise.

Moreira, Cury e Vianna (2005) categorizam as justificativas dadas por 31 matemáticos de 14 instituições universitárias e de pesquisa do Brasil, para apoiar o ensino de Análise Real no curso de Licenciatura em Matemática.

Uma primeira categoria levantada diz respeito às contribuições da Análise Real para a construção do "pensamento matemático" do Professor de Matemática. Segundo Moreira, Cury e Vianna (2005, p. 30):

> A disciplina de Análise Real deve ser obrigatória na licenciatura porque possibilitaria ao professor da escola básica, entre outras coisas, desenvolver o "pensar matematicamente", observar "como os matemáticos pensam", compreender "o que significa Matemática" ou, ainda, ter acesso, mesmo que parcial e restrito, a uma cultura específica, "a cultura matemática".

Outra categoria localizada diz respeito ao aprofundamento teórico-formal de conceitos matemáticos trabalhados na Educação Básica, a partir do estudo de alguns conceitos básicos de Análise Real, mas que são trabalhados naquele nível de ensino. Segundo Moreira, Cury e Vianna (2005, p. 22):

> A disciplina proporciona uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da matemática escolar, explica os "porquês" e dá maior segurança ao futuro professor da escola. Proporciona a construção de uma visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar, em substituição a uma visão que a concebe como um amontoado desconexo de fórmulas e regras.

Uma última categoria levantada concebe a Análise Real como um momento / ambiente instrumental da própria Matemática. Segundo Moreira, Cury e Vianna (2005, p. 24): "A disciplina constitui, para o aluno, um espaço de percepção da Matemática como instrumento que permite um entendimento profundo de certos fenômenos naturais e que tem aplicações em outras ciências".

Nas três categorias, é notória a relação da disciplina com a Matemática elementar a ser "ensinada" pelos futuros professores. Assim como entendeu / percebeu, um grupo de alunos participantes da pesquisa de Bortoloti (2009, p. 160) que concedeu à disciplina de Análise Real uma grande importância, devido ao fato de a mesma se constituir num espaço de "construção de conceitos básicos, para a ampliação da compreensão do pensamento matemático, pois esta disciplina é um dos fundamentos para o desenvolvimento de uma Matemática mais avançada".

Voltando a Moreira, Cury e Vianna (2005), os pesquisadores identificaram que alguns alunos entendem a Análise Real como um momento de “construção de conceitos básicos” (grupo 2) e outros acreditam que, a partir daí, pode-se chegar ao desenvolvimento de uma “Matemática mais avançada” (grupo 1). Nesta perspectiva, Moreira, Cury e Vianna (2005, p. 38) concluem:

> O conhecimento matemático, em sua sistematização lógico–formal-dedutiva e suas formulações conceituais com base nas “estruturas” – como é usualmente apresentado na disciplina Análise Real, por exemplo – está longe de ser suficiente para dar conta das questões que se colocam para o professor em sua prática pedagógica.

Já em relação à discussão do elo entre a Matemática formal e a Matemática a ser ensinada pelos futuros professores dos Ensinos Fundamental e Médio, Moreira, Cury e Vianna (2005, p.39) ponderam que a articulação entre conhecimento matemático e prática docente é uma tarefa “excessivamente complexa”, mesmo para um professor licenciado.

Parece consenso que esta articulação vai se fortalecendo na medida em que o professor ganha experiência docente. Entretanto, é fundamental que tal articulação já comece a ser discutida no processo de formação inicial do professor, em seu curso de licenciatura. Logo, a disciplina de Análise Real ganha fôlego na medida em que, a partir do estudo de conceitos básicos trabalhados na Educação Básica, abre-se espaço para a reflexão sobre questões relacionadas “ao papel, ao dimensionamento adequado e à contribuição efetiva que um enfoque ‘avançado’ pode oferecer ao processo de articulação da formação do professor com a prática na escola” (MOREIRA, CURY E VIANNA, 2005, p. 40).

Nesta perspectiva, podemos discutir a importância da disciplina de Análise Real para um curso de Licenciatura em Matemática sob duas óticas: focando-nos na sua permanência ou não na matriz curricular, ou discutindo a abordagem que deve ser dada à disciplina pelos seus professores, o que perpassaria pela discussão do seu papel na formação / fortalecimento do elo “Educação Básica – Análise Real”.

Moreira, Cury e Vianna (2005) discutem a permanência ou não da Análise Real nos cursos de licenciatura, argumentando que a decisão recai sobre a abordagem que se dá ou que se deva conferir à disciplina. Então, este é o foco pelo qual optaremos, uma vez que ao discutirmos tal abordagem, tentaremos discutir a prática docente do professor de Análise Real.

No campo legal, o parecer CNE/CES 1.302/2001 publicado no dia 05 de dezembro de 2001, remete os conteúdos de "Fundamentos de Análise" como obrigatórios nos cursos de Licenciatura em Matemática, coadunando com as idéias de Reis (2001) que defende a importância da Análise Real na formação inicial do Professor de Matemática que, mesmo ao atuar nos Ensinos Fundamental e Médio, necessita de uma consolidação e aprofundamento de seus conhecimentos específicos do conteúdo matemático.

Realmente, concebemos a Análise como uma ponte entre a formalização dos conceitos e conteúdos que serão ensinados pelo Professor de Matemática em sua futura prática docente. Entretanto, acreditamos que, para que isto aconteça, a relação do conteúdo estudado em Análise com a Matemática da sala de aula dos Ensinos Fundamental e Médio, deve ser um elo fortemente trabalhado no curso de Análise Real. Neste sentido, Bortoloti (2009, p. 150) destaca que estas questões "nos fazem refletir se não poderíamos pensar em uma organização e sistematização do conhecimento matemático, a partir da prática do professor da escola e não necessariamente da prática do matemático".

De nossa experiência discente e docente, parece-nos coerente afirmar que o ensino de Análise Real está sistematizado e organizado privilegiando a prática do matemático (aqui, entendemos por matemático, o pesquisador em Matemática Pura e/ou Aplicada, geralmente oriundo de cursos de bacharelado), mesmo nas disciplinas ministradas no curso de licenciatura.

Entretanto, as orientações das Diretrizes Curriculares Nacionais para o curso de Licenciatura em Matemática, tratadas no parecer do Conselho Nacional de Educação – Câmara de Educação Superior, Parecer CNE/CES 1.302/2001, estabelecem algumas competências e habilidades específicas do professor de Matemática nos seguintes termos: "O licenciado em Matemática deverá ter a capacidade de elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica".

Assim sendo, mesmo numa disciplina de formalização de conceitos como a Análise Real, é fundamental que aconteça uma articulação, um entrelaçamento maior entre a Educação Básica e a formação docente, coadunando com as propostas de Nacarato e Paiva (2006) e Zaidan (2009).

Outro viés interessante desta discussão é a tensão entre a "coerência" da Matemática elementar e a "conseqüência" da Matemática formal (PINTO, 2009). O descompasso entre a Matemática elementar, trabalhada nos Ensinos Fundamental e Médio e a Matemática formal, trabalhada nos cursos de licenciatura, é evidente na literatura atual. Tall (1992, p. 498) já alertava:

> No final dos anos setenta e início dos oitenta, muitos autores perceberam o desencontro entre os conceitos como formulados e concebidos pelos matemáticos formais, e como interpretados pelo estudante aprendiz. Por exemplo, foram observadas dificuldades no entendimento do processo de limite quando secantes tendem para tangentes, de conceitos geométricos, da noção de função, limite e continuidade, do significado de diferencial, convergência de seqüências, limites de funções, a tangente, a intuição de infinito, e assim por diante.

Um exemplo interessante vem de Zuffi (2004, p. 1) que, ao propor uma sequência didática sobre funções para a formação de professores do Ensino Médio, ressalta os resultados de sua primeira pesquisa (ZUFFI, 1999), relacionados às disciplinas de Cálculo e Análise, da seguinte forma:

> Os professores analisados, apesar da formação que tiveram em disciplinas de graduação como aquelas citadas anteriormente, continuavam a apresentar grandes dificuldades de expressarem seus conhecimentos sobre funções sem a ajuda de um livro didático e, mesmo quando conseguiam fazê-lo, era através de uma linguagem matemática que trazia inconsistências com aquela usualmente aceita pela comunidade matemática e que se espera ser alcançada pelos alunos do Ensino Médio, pelo menos nas fundamentações básicas sobre o tema em questão.

Esse resultado contradisse, num certo sentido, a hipótese inicial da sua pesquisa, pois a autora considerava que, após ter um grande contato com o tema funções em disciplinas avançadas de Matemática – dentre outras, Análise Real – o professor seria capaz de relacionar os conhecimentos vistos e ampliar os significados atribuídos aos entes matemáticos de domínio, contradomínio, imagem e à própria definição formal e informal de função.

Podemos remeter esta discussão a um desencontro (como denominado por Tall, 1992) entre a formulação formal de um conceito (no caso, o conceito de função) por parte do professor de Análise Real e sua interpretação de significados, por parte dos alunos de Análise Real, os quais, futuramente, serão os professores de Matemática da Educação Básica.

Outro episódio significativo ocorreu quando da reformulação do curso de Licenciatura em Matemática da UFMG (em vigor desde 2009). Zaidam (2009) relata que o novo projeto daquele curso destaca a importância de “o futuro professor ser preparado para compreender a realidade em que atuará como profissional", sendo capaz de compreender os raciocínios típicos da Matemática. Com essa finalidade, a nova proposta do curso de Matemática da UFMG concebe mudanças na parte prática do curso, propiciando o compartilhamento dos institutos com a Faculdade de Educação, o esforço para romper com o modelo "3+1", para se colocar em prática "o princípio da flexibilização curricular" (ZAIDAN, 2009, p.42). Cabe ressaltar que o modelo conhecido por "3+1", muito comum no final do século passado, contemplava 3 anos iniciais de disciplinas de conteúdo específico, seguidos de 1 ano final de disciplinas de conteúdo pedagógico.

Então, essa "mudança de atitude" também não poderia ocorrer nas disciplinas tradicionais de conteúdo específico? Os cursos de licenciatura têm abortado o esquema 3+1, o que é um avanço; mas ainda não ocorreu, de fato, uma integração da Matemática formal e específica com as disciplinas didáticas. Acreditamos que o professor de Cálculo, Álgebra e Análise Real deve buscar essa integração em sua prática docente, ainda que isto seja uma tarefa extremamente complicada.

2.2. Rudimentos do Pensamento Matemático Avançado

Adotaremos para o Pensamento Matemático Avançado a caracterização apresentada por Tall (1991, 1992) em duas componentes principais: definições matemáticas precisas, incluindo o estabelecimento de axiomas em teorias axiomáticas, e dedução lógica de teoremas a partir das mesmas. Tall (1992) infere que a transição para esse nível de conhecimento (avançado) é uma "transição difícil", pois parte de um nível em que as idéias e conceitos matemáticos se baseiam de forma intuitiva para outro em que os conceitos são alicerçados em definições formais, cujas propriedades são "construídas" através de deduções lógicas.

Inicialmente, deve-se discutir qual o papel da definição no estudo de Matemática. Poincaré (1908, apud TALL, 1992, p. 496) já questionava:

> O que é uma boa definição? Para o filósofo ou o cientista, é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e se aplica somente a eles; é a que satisfaz as regras da lógica. Mas em educação não é isto; é a que pode ser entendida pelos alunos.

Dentro da perspectiva proposta por Poincaré, o Movimento da Matemática Moderna intentava explorar os conteúdos com definições que buscavam o fácil entendimento pelos alunos; entretanto, tais objetivos não foram alcançados, por dificuldades em relação à linguagem e ao desenvolvimento teórico. Tall (1992, p. 497) destaca a importância de se levar em consideração o conhecimento prévio dos alunos: "Portanto, a experiência dos alunos, anterior ao seu encontro com as definições formais, interfere profundamente na maneira com que eles formam as representações daqueles conceitos".

Discutindo a construção da estrutura individual do conhecimento, Tall e Vinner (1981, p. 152), recorrem aos termos imagem conceitual e definição conceitual assim concebidos:

> Nós usaremos o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados. À medida que a imagem conceitual desenvolve, ela não precisa ser coerente durante todo o tempo. [...] Nós nos referiremos à porção da imagem conceitual que é ativada num tempo particular como imagem conceitual evocada. Somente quando aspectos conflituosos são evocados simultaneamente é que poderá ocorrer um sentimento de conflito ou confusão.Por outro lado, [...] definição conceitual é a forma de palavras usadas para especificar o conceito.

Acreditamos, assim como Tall e Vinner (1981), Reis (2001), Vinner (1991), Hanna (1989) e Pinto (2009), que o processo de transição para o Pensamento Matemático Avançado é influenciado pelo pensar individual, pelas imagens conceituais de cada aluno e os conflitos de pensamentos, acarretados por uma nova descoberta matemática (entende-se por isso, como uma nova descoberta individual, que pode ou não ser uma descoberta genuína em Matemática). Segundo Papert (1980, p. 121):

> O conhecimento novo contradiz frequentemente o velho, e a aprendizagem efetiva requer estratégias para lidar com tal conflito. Algumas vezes as partes conflitantes de conhecimento podem ser reconciliadas, algumas vezes uma ou outra deve ser abandonada, e outras vezes, as duas podem ambas conviver a salvo, mantidas em compartimentos mentais separados.

Outra contribuição a esta discussão vem de Davis e Vinner (1986, p. 284) que defendem que a aprendizagem de uma ideia nova não precisa, necessariamente, destruir ideias anteriores construídas. Segundo os pesquisadores:

> Em geral, a aprendizagem de uma ideia nova não destrói uma ideia anterior. O estudante, ao se deparar com uma questão ou tarefa, tem agora duas ideias, e pode reter a nova ou a velha. O que está na aposta não é o possuir ou não possuir uma ideia nova; e sim a seleção (na maioria das vezes inconsciente) de qual delas será retida.

Ao ter um primeiro contato com uma definição formal de certo tópico da disciplina, o estudante "busca" a construção da sua definição conceitual, de forma fortemente enraizada pelo seu convívio com o conteúdo, mesmo que posteriori à apresentação da definição formal. Tall (1992, p. 499) exemplifica esta questão da seguinte forma:

> [...] mesmo quando se apresenta uma definição formal aos estudantes, sua grande experiência com exemplos de funções com propriedades implícitas comuns faz com que os estudantes desenvolvam uma imagem conceitual de função, pessoal, que implicitamente possui tais propriedades. Por exemplo, se as funções trabalhadas são predominantemente apresentadas como fórmulas, isto conduz o estudante a acreditar que a existência de uma fórmula é essencial para uma função.

Esse fato reforça a hipótese de que a definição conceitual é *construída* não apenas pela definição formal (muitas vezes, extensa), mas também pela forma com que o conteúdo é costumeiramente trabalhado. No caso específico de função, uma abordagem pode priorizar as fórmulas, ou o estudo de gráficos ou, ainda, a caracterização da função pelo seu domínio, contradomínio e a sua imagem. Essa abordagem focada pode ter influenciado na não-identificação de uma função quando apresentada na forma algébrica, e sua respectiva identificação quando apresentada na forma gráfica, conforme destaca Tall (1992) ao se referir às dificuldades manifestadas pelos estudantes nas transformações gráficas das funções acarretadas por deslocamentos e deformações.

A forma como a Matemática é trabalhada pelo docente e as definições formais dos conceitos matemáticos criam, de acordo com Vinner (1991), um problema sério para o seu aprendizado: o conflito entre a estrutura da Matemática como concebida pelos matemáticos e os processos cognitivos de aquisição dos conceitos.

O trabalho do professor de Matemática está justamente neste conflito, tendo como objetivo construir um elo entre os dois. Este trabalho é fortemente influenciado pela abordagem dos livros didáticos, que geralmente trabalham no esquema, noções primárias – axiomas – teoremas, e geralmente não traduzem o processo pelo qual a Matemática foi desenvolvida. Se, então, a Matemática é desenvolvida por um processo e é ensinada por outro, isso não sugere problemas em seu ensino? No mínimo, tal questão deve nos levar a pensar em uma pedagogia mais apropriada, pois, "o ensino deve levar em consideração os processos psicológicos comuns de aquisição de conceito e raciocínio lógico" (VINNER, 1991, p. 65).

Para exemplificar essa situação, Vinner (1991) cita a definição de valor absoluto de um número, encontrada em livros didáticos:

$$| x | = \begin{cases} x; \text{ se } x \geq 0, \\ -x; \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

A seguir, o pesquisador questiona, em se tratando de um primeiro contato com a disciplina, se não seria mais conveniente definir o valor absoluto de um número como a distância desse número ao zero, ou, de forma ainda mais simples e clara, definí-lo como o número sem seu sinal.

Dentro desta linha de pensamento, podemos questionar a definição "weirstrassiana" de continuidade de uma função num ponto: f(x) é contínua em x = a se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $| x – a | < \delta$, então $| f(x) – f(a) | < \varepsilon$.

Em um primeiro contato com a disciplina, deveria se buscar uma abordagem inicial mais intuitiva, identificando a idéia de definição com a verificação das condições:

i) Existência de f(a);

ii) Existência do limite de f(x) quando $x \rightarrow a$;

iii) Verificação da igualdade entre o limite de f(x) quando $x \rightarrow a$ e f(a) (condição que, implicitamente, sintetiza as demais).

Voltamos a afirmar que o ensino de Análise Real não deve e não pode descartar a definição formal. Entretanto, estamos discutindo a sua abordagem como ocorre atualmente. O aluno deverá reconhecer e entender a definição formal, até mesmo porque ela será necessária para se trabalhar com equações algébricas e desigualdades envolvendo o valor absoluto.

Ao trabalharmos com a definição rigorosa de um conteúdo, num primeiro momento, o aluno até poderá usá-la, mas sem compreendê-la em sua plenitude, ou com um mínimo de compreensão desejada; mas, ao trabalhar inicialmente de forma mais intuitiva, o aluno torna-se mais apto a compreender o conteúdo num nível mais elaborado, na sua definição formal.

Logo, devemos preencher a "célula" da imagem conceitual, com uma abordagem mais intuitiva, para, posteriormente, trabalharmos com a "célula" da definição conceitual, com um tratamento mais rigoroso.

Nesse momento, julgamos ser necessário um aprofundamento dos termos intuição e rigor, o que faremos a seguir.

2.3. A tensão entre Rigor e Intuição

Retomando a questão da transição para o Pensamento Matemático Avançado, vale ressaltar que, na prática pedagógica de Análise Real, ela pode ser identificada com a transição entre uma noção intuitiva dos conceitos e uma demonstração rigorosa dos resultados, o que nos remete à tensão entre rigor e intuição, discutida por Reis (2001).

Em sua experiência docente, Reis (2001) sempre se questionou sobre as causas das dificuldades apresentadas pelos alunos no curso de Análise, além das altas taxas de reprovação historicamente inerentes a ela, mesmo sendo os tópicos de Análise anteriormente trabalhados na disciplina de Cálculo.

Uma característica atribuída a essas disciplinas, é que no Cálculo o conteúdo é visto de forma mais intuitiva e muitas vezes explorando os aspectos gráficos e geométricos; já em Análise Real, prima-se pelas definições formais de conceitos e pela demonstração rigorosa das propriedades sob a forma de teoremas.

Devemos discutir essa transição Cálculo-Análise, muitas vezes reduzida à transição intuição-rigor, buscando responder, ou pelo menos refletir sobre as questões que envolvem o processo de aprendizagem em Análise Real. Esse debate pode contribuir para que o Professor de Matemática do Ensino Superior reflita sobre que metodologias de ensino se apresentam para o ensino de Matemática e, mais especificamente, para as disciplinas de Introdução à Análise Real.

Esse rigor presente no curso da disciplina Análise evidencia a história do seu surgimento, mais especificamente, o movimento de "Aritmetização da Análise", assim citado por Baron e Bos (1985, p. 43):

> A transição do Cálculo para a Análise no século XVIII não foi somente uma questão de crescimento e divisão em subcampos; envolveu também

> uma transformação fundamental em sua natureza. O Cálculo, por volta de 1700, era ainda essencialmente orientado para a Geometria. Tratava de problemas sobre curvas, empregava símbolos algébricos, mas as quantidades de que se utilizava eram principalmente interpretadas como ordenadas e abscissas de curvas, ou como outros elementos de figuras geométricas. Durante a primeira metade do século, diminuiu o interesse pela origem geométrica dos problemas e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras. A Análise tornou-se o estudo e manipulação de fórmulas.

Esse movimento tornou-se difícil e intrincado, mas acabou se concretizando, permitindo ao conteúdo de Análise (além da visão simplista de ser o estudo e manipulação de fórmulas) ser a dedução lógica de um conjunto de postulados que caracterizam o sistema dos números reais.

De toda forma, ao caracterizar o movimento da aritmetização, vários autores o classificam como a rigorização do cálculo, o que de fato é! Mas afirmar que o rigor estava presente no "surgimento da Análise" não equivale a dizer que é o principal foco da disciplina. Concordamos com Boyer (1974) quando diz que ao avaliar desenvolvimentos da Matemática devemos sempre ter em mente que as ideias atrás das notações são, de longe, "a melhor metade".

O fato é que a busca da formalização do Cálculo, que culminou com a aritmetização da Análise, proporcionou a valorização do rigor e sua busca, não só em Análise, mas em todas as áreas que constituem a Matemática Pura.

Pierpont (1899) resume o pensamento da matemática pura ao declarar que "o que pode ser provado deve ser provado" (*What can be proved should be proved*); entretanto, ele relata a importância das ideias da seguinte forma: "De nossa intuição, nós temos as noções de curvas, superfícies, continuidade, etc. Ninguém pode mostrar que as formulações aritméticas são coextensivas com seus conceitos intuitivos correspondentes" (PIERPONT, 1899, p. 400-401).

A inquietação de Pierpont e de outros matemáticos de sua época era que o "preço a ser pago" pelo desenvolvimento da Matemática no século XIX não deveria "custar" uma total separação do mundo de nossos sentidos.

Voltando às relações entre o rigor e a intuição, seriam estas entidades totalmente dicotômicas? Para Tall (1991, p. 20):

> O movimento do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significante: de descrever para definir, de convencer para provar de uma maneira lógica baseada nas definições.

> Esta transição requer uma reconstrução cognitiva, a qual é vista durante a luta inicial dos estudantes universitários com as abstrações formais, enfrentadas por eles no primeiro ano de universidade.

Parece-nos que a intuição é, então, o ponto inicial da busca do rigor, permanecendo ativa durante todo o processo sendo, pois, complementar ao rigor!

Pinto (2009) destaca que não temos apenas dois percursos para a construção de uma Matemática avançada, trabalhando de uma Matemática denominada de intuitiva para outra denominada de formal. Na realidade, podemos pensar tal situação como uma reta com dupla seta, em que uma extremidade é representada pela intuição e a outra pelo rigor, apresentada por Reis (2001, 2009), sugerindo que o trabalho do professor pode situar-se em qualquer um dos pontos dessa reta contínua. Na prática docente, o ponto de equilíbrio é, ou pelo menos deveria ser, um ponto móvel e dinâmico.

Hanna (1989, p.45) afirma que não há infidelidade à Matemática ao buscar, tanto quanto possível, uma explicação matemática em detrimento de uma "prova matemática", 'mesmo abrindo mão do rigor' (grifo nosso). Isto não quer dizer que o rigor não tem seu papel na construção do conhecimento matemático nem deva ser "deixado de lado", em algum momento. Reiteramos as idéias de Reis (2001) que o rigor deve aparecer / acontecer em níveis.

Tanto uma "prova que prova" como uma "prova que explica" devem estar implícitas de rigor, e de acordo com a necessidade, usá-lo em maior ou menor grau. Usamos aqui os termos apresentados por Hanna (1989), "provas que provam", como sendo aquelas que têm a única função de provar a veracidade de certa propriedade matemática, muitas vezes vazias de significado prático, e "provas que explicam" como aquelas que, além da função necessária de verificar essa veracidade, demonstram / apresentam propriedades e características do que se está demonstrando, tornando-as mais inteligíveis e claras aos olhos dos discentes, sem dever nada às "provas que provam".

Outra discussão interessante sobre as provas e seu papel no ensino de Matemática é feita por Garnica (2002, p. 6), ao afirmar que a prova rigorosa pode ser "considerada como uma – dentre as várias – forma de argumentação acerca do objeto matemático".

Esta questão nos remete, novamente, à importância do papel do professor na escolha / seleção do que e de que forma fazer a transposição entre a Matemática e o seu ensino. Entretanto, é reconhecida a dificuldade de caminhar da história da evolução da Matemática para a sala de aula. Essas discussões devem levar os professores das disciplinas de

Introdução a Análise Real, principalmente nos cursos de licenciatura, a reconhecer, segundo Reis (2009, p. 93), que:

> [...] o "rigor acadêmico", dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos, artigos científicos e outros, não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino. Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é, rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos, etc).

Nesta perspectiva, nos próximos capítulos, passaremos a discutir o ensino de Análise Real, especificamente, do tópico de Conjuntos Numéricos, iniciando por analisar alguns livros didáticos de Análise utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática e apresentando nossa proposta didática para o ensino deste tópico, em disciplinas de Fundamentos de Análise Real de cursos de Licenciatura em Matemática.

Capítulo 3

APRESENTANDO NOSSA PESQUISA EM SEU CONTEXTO E ANALISANDO LIVROS DIDÁTICOS DE ANÁLISE REAL

"Pessoas influenciam pessoas: professores e outras pessoas influenciam atitudes sobre os conteúdos de ensino e sobre o próprio aprendizado."

Robert Mager

3.1. Retomando a Questão de Investigação e os objetivos

Observa-se, em geral, que nos cursos de Matemática, ocorre uma uniformidade de metodologias nas modalidades de Bacharelado e de Licenciatura em algumas universidades e, em certas instituições, até mesmo a integração dos alunos das duas modalidades de curso numa mesma disciplina. Em ambas as situações, o aluno do curso de Licenciatura em Matemática não tem acesso a uma abordagem e uma metodologia próprias aos tópicos trabalhados em Análise Real.

Outro fator importante na elaboração da nossa questão de investigação é o foco dado ao rigor na abordagem dos conteúdos, mais especificamente, no ensino de Conjuntos Numéricos, especialmente nos livros didáticos.

Nosso interesse de pesquisa era o tratamento do tópico de Conjuntos Numéricos, de uma perspectiva intuitiva até uma abordagem rigorosa, a partir da análise de livros didáticos. Diante dessa perspectiva, definimos a seguinte questão de investigação:

Como os Conjuntos Numéricos são apresentados / abordados em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática e de que forma eles podem ser problematizados / explorados na perspectiva de um ensino que aborde dialeticamente seus aspectos intuitivos e rigorosos?

Lembramos que nosso objetivo geral é a discussão sobre o ensino de Análise Real no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior e nossos objetivos específicos são a análise de livros didáticos de Análise utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática (que será feita neste capítulo) e, a partir desta análise, a apresentação de uma proposta de ensino de Conjuntos Numéricos para disciplinas de Fundamentos de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática (que será feita no próximo capítulo).

3.2. Apresentando o Contexto da Pesquisa

Nossa pesquisa de campo foi realizada no 2º semestre letivo de 2009 com os alunos regularmente matriculados na disciplina de "Introdução a Análise Real", obrigatória no curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade ISEIB – Instituto Superior de Educação Ibituruna, de Montes Claros – MG. O professor da referida disciplina foi o presente pesquisador. Estavam matriculados na disciplina 21 (vinte e um) alunos do 5º e do 6º períodos de um curso cuja previsão total é de 3 anos e meio.

A ementa da disciplina era composta por: Preliminares de Lógica; Conjuntos Numéricos; Números Reais, Enumerabilidade, Comensurabilidade; Sequências e Séries; trabalhados numa carga horária de 60 horas/aula. Adotamos como bibliografia básica o livro "Análise Matemática para Licenciatura" de Geraldo Ávila.

No estudo dos Conjuntos Numéricos, foram implementadas as 5 (cinco) atividades relacionadas aos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais (a serem descritas no capítulo seguinte).

3.3. Justificando a escolha do tópico

Os Conjuntos Numéricos são estudados em vários níveis de apresentação / abordagem, desde o Ensino Fundamental, passando pelo Ensino Médio, até chegar ao Ensino Superior. Só este fato já justificaria a necessidade de discutirmos como acontece sua formalização e seu ensino em cursos de formação inicial e continuada de Professores de Matemática.

Dentro da própria estruturação matemática por áreas de conhecimento, também é destacada a importância deste tópico na fundamentação e gênese de conceitos centrais na teoria matemática, como exemplifica Zuffi (2004, p. 3) ao afirmar que um estudo do desenvolvimento histórico do conceito geral de "função" revela que este se deu "num processo longo e delicado, com a necessidade de contribuições de muitos matemáticos de renome, bem como das contribuições obtidas com o desenvolvimento das Teorias de Conjuntos e de construção dos Números Reais”.

Parece-nos óbvio que outros conceitos como sequências de números reais, limites e continuidade de funções reais, assim como derivadas e integrais, estão relacionados a definições e propriedades dos números e seus conjuntos. Assim, acreditamos que o ensino de Conjuntos Numéricos tem um lugar nuclear no ensino de Análise Real e, porque não dizer, no ensino de Matemática, de uma maneira geral.

Portanto, iniciaremos por uma breve análise de alguns livros didáticos de Análise Real utilizados em universidades brasileiras.

3.4. Analisando livros didáticos

Entendemos que o livro didático desempenha um importante papel no ensino de Matemática, por refletir um conjunto de saberes de seu autor, experienciados em sua formação matemática e em sua prática docente, que contribui, à sua medida, com a formação matemática e com a prática docente daquele professor que adota este livro.

Por isso, julgamos necessário analisar a apresentação e a abordagem dos Conjuntos Numéricos em livros didáticos de Análise Real utilizados em diversas universidades brasileiras, conforme pudemos constatar em uma pesquisa nos programas curriculares de universidades tais como UFOP, UFMG, UNIMONTES, dentre outras.

Escolhemos para analisar os seguintes livros:

- **Análise Matemática para Licenciatura**. Geraldo Ávila. São Paulo: Edgard Blücher, 2006;

- **Análise Real** – Volume 1. Elon Lages Lima. Rio de Janeiro: IMPA, 1993;

- **Análise I.** Djairo Guedes de Figueiredo. Campinas: UNICAMP, 1996.

Além destes, escolhemos também um livro “diferenciado” dos demais por buscar uma integração entre Álgebra e Análise na apresentação dos conceitos relacionados a números, apesar do mesmo não poder ser considerado uma referência bibliográfica “principal” para disciplinas como “Fundamentos de Análise”, “Introdução à Análise”,

"Análise Real", "Análise I" (nomes que aparecem em diversas grades curriculares de cursos de Matemática), da mesma forma como os anteriores são citados:

- **Lições de Álgebra e Análise**. Bento de Jesus Caraça. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1959.

Como categoria de análise, procuraremos, inicialmente, apresentar algumas ideias dos autores retiradas dos prefácios de seus respectivos livros, como forma de apresentá-los e/ou de apresentar a sua visão sobre a Matemática ou o conhecimento matemático.

A seguir, buscaremos dar um panorama geral da abordagem dos livros aos Conjuntos Numéricos, destacando a eventual presença de elementos históricos, o desenvolvimento teórico do assunto e a natureza dos exercícios propostos mais diretamente relacionados ao tema. Não nos preocuparemos com o aspecto quantitativo dos exercícios, pois acreditamos que, de uma maneira geral, todos os exercícios envolvendo números reais podem ser associados a um conjunto numérico, mesmo estando relacionado a conceitos específicos como enumerabilidade ou supremo e ínfimo de um conjunto.

3.4.1. Análise Matemática para Licenciatura (Geraldo Ávila)

No prefácio de seu livro, Ávila afirma que o mesmo foi escrito para alunos de Licenciatura em Matemática e por esta razão, difere dos livros de Análise direcionados aos cursos de Bacharelado. Outra diferença pontuada pelo autor está na apresentação de certos tópicos sobre os números reais que são considerados relevantes nos cursos de Licenciatura. Mas, talvez, a grande diferença na maneira de apresentação dos vários assuntos destacada pelo autor é uma "atenção maior ao desenvolvimento das ideias e aspectos históricos da disciplina".

Ainda segundo Ávila (2006, pref.), a sequência Cálculo – Análise deve ser assim entendida:

> Numa primeira disciplina de Cálculo, as apresentações costumam ser feitas de maneira intuitiva e informal, com pouca ou nenhuma demonstração rigorosa. Esse procedimento é seguido, em parte por razões didáticas, mas também por razões ligadas á própria natureza dos tópicos tratados [...] É precisamente uma apresentação logicamente bem organizada de todos esses tópicos do Cálculo que constituem uma primeira disciplina de Análise.

Assim, o autor considera que um dos principais objetivos de uma disciplina de Análise é a prática em demonstrações e mais, considera "inadmissível" que alguém que pretenda ensinar Matemática sinta-se deficiente ou despreparado face à tarefa de se enunciar e demonstrar teoremas.

Por fim, o autor destaca a oportunidade que se tem, na disciplina de Análise de familiarização com uma das áreas mais importantes de toda a Matemática.

Realmente, o livro de Ávila se diferencia dos demais por incorporar em seu texto, diversas notas históricas e complementares ao desenvolvimento da teoria. Isto parece refletir uma postura diferenciada do autor ao entender que a história do desenvolvimento dos conceitos matemáticos pode contribuir para a compreensão / construção destes conceitos, postura com a qual coadunamos e procuraremos explorar em nossa proposta.

Os Conjuntos Numéricos são tratados no Capítulo 2 – Números Reais – 1ª parte e no Capítulo 3 – Números Reais – 2ª parte.

Os conjuntos dos números naturais e inteiros aparecem no parágrafo inicial, restringindo-se apenas à sua nomenclatura e simbologia, ou seja, não há uma descrição mínima de seu desenvolvimento histórico, muito menos de sua formalização. O primeiro conjunto a ser explorado é o conjunto dos números racionais, identificados como frações na forma irredutível, com destaque para sua notação decimal e para a questão das dízimas periódicas.

A seguir, os números irracionais são "concebidos" como números cuja representação decimal não é nem finita nem periódica. A primeira demonstração apresentada é da irracionalidade da raiz quadrada de 2. Concluindo esta parte inicial, os números reais são introduzidos como sendo todo número que é racional ou irracional.

Após trabalhar com os conceitos de conjuntos, finitos, infinitos e enumeráveis, a questão dos números irracionais volta à cena, com o problema das grandezas incomensuráveis, relacionadas à medição de segmentos e à existência de segmentos incomensuráveis. O exemplo explorado é o caso do lado e da diagonal de um quadrado. Após abordar o retângulo áureo e a divisão áurea, Ávila apresenta a Teoria das Proporções de Eudoxo como a "solução para a crise dos incomensuráveis".

Neste momento, volta a ter destaque uma visão histórica do desenvolvimento da Matemática até o século XIX, com a formalização dos números reais por Dedekind. São apresentados o conceito de corte de Dedekind, a relação de ordem e operações com números reais, culminando com o Teorema de Dedekind ("Todo corte de números reais possui elemento de separação"). A conclusão da teoria de números reais ocorre a partir das definições de supremo e ínfimo de um conjunto, com a obtenção da completicidade dos reais.

Ao longo do escopo textual, são propostos diversos exercícios relacionados a propriedades dos números racionais (com destaque para a determinação de fração geratriz), irracionais (com destaque para a irracionalidade de raízes quadradas de números primos) e reais (com destaque para demonstrações com cortes e densidade dos racionais e irracionais).

3.4.2. Análise Real – Volume 1 (Elon Lages Lima)

No prefácio de seu livro, o autor informa que a finalidade do mesmo é servir de texto para um primeiro curso de Análise Matemática, pois nele, os assuntos são expostos de maneira simples e direta, "evitando-se maiores digressões". Uma expectativa apontada pelo autor é de facilitar o trabalho do professor no que se refere à seleção dos tópicos escolhidos para compor a ementa da disciplina.

Lima (1993, pref.) manda a seguinte mensagem para os leitores, assim por ele idealizados:

> Os leitores que tenho em mente são alunos com conhecimento equivalente a dois períodos letivos de Cálculo, de modo a terem familiaridade com as idéias de derivada e integral em seus aspectos mais elementares [...] Espero, além disso, que eles tenham uma noção razoavelmente clara do que seja uma demonstração matemática.

Outro destaque do livro feito pelo próprio autor é uma grande quantidade de exercícios propostos que servem para "fixação da aprendizagem" e se constituem numa oportunidade para o leitor verificar se realmente "entendeu o que acabou de ler".

Realmente, a grande variedade e qualidade dos exercícios propostos se constituem num dos pontos de destaque do livro de Lima, inclusive, remetendo para a seção de exercícios algumas proposições e propriedades que não são demonstradas no desenvolvimento textual.

Os Conjuntos Numéricos são tratados no Capítulo 1 – Conjuntos Finitos e Infinitos e no Capítulo 2 – Números Reais.

O conjunto dos números naturais é inicialmente apresentado através dos Axiomas de Peano. Seguem as definições das operações e suas propriedades. Os conjuntos dos números inteiros e racionais são expostos apenas como exemplos de conjuntos enumeráveis, sem qualquer tratamento histórico, muito menos formalizado.

Já o conjunto dos números reais é explorado de maneira totalmente formalizada, passando pela sua caracterização enquanto corpo, depois enquanto corpo ordenado e, finalmente, enquanto corpo ordenado completo ("Todo conjunto não-vazio de números reais, limitado superiormente, possui supremo").

Ao longo do texto, são propostos diversos exercícios dentro dos diversos tópicos de cada capítulo. São exploradas proposições e propriedades dos números naturais (com destaque para a indução matemática) e reais (com destaque para demonstrações de desigualdades).

3.4.3. Análise I (Djairo Guedes de Figueiredo)

No prefácio de seu livro, o autor afirma que o mesmo foi escrito para leitores que tenham uma certa familiaridade com algumas "técnicas" do Cálculo Diferencial e Integral de funções reais de uma variável real. A justificativa para esta pressuposição é que o livro não contém um grande número de exercícios mais mecânicos ou "problemas do tipo computacional".

Figueiredo (1996, pref.) crê que um aluno que vá cursar Análise já deve ter passado por um curso inicial de Cálculo, destacando que:

> O curso de Cálculo, sendo mais superficial, é mais consoante com o nível do aluno que entra na universidade. Por outro lado, fornece rapidamente uma ideia do que é o Cálculo, do tipo de problemas que resolve e das suas aplicações a outros ramos do conhecimento. Assim, o leitor que começar a ler este trabalho [...] apreciará melhor certos pontos que poderiam parecer filigranas às pessoas que os vissem pela primeira vez.

Por fim, o autor comenta que, pelo fato do texto ser escrito com o rigor que a Análise ganhou no decorrer do século XIX, a fundamentação dos números reais é logo apresentada no primeiro capítulo. Através dos exemplos e de observações, procura-se estimular o espírito crítico e despertar curiosidade por outros cursos de Matemática.

De fato, são apresentados diversos exemplos e discussões interessantes, que podem ser de grande valia para o futuro Professor de Matemática em formação, especialmente relacionados a funções, tema explorado ao longo de vários capítulos.

Os Conjuntos Numéricos são tratados no Capítulo 1 – Números Reais, que inclui ainda sequências e séries de números reais.

Assim como em Ávila, a apresentação dos conjuntos dos números naturais e inteiros restringe-se apenas à sua nomenclatura e simbologia, ou seja, não há uma exploração de seu desenvolvimento histórico, nem ocorre sua formalização. O primeiro conjunto a ser tratado é o conjunto dos números racionais, que recebe um tratamento de corpo, a partir da definição desta estrutura algébrica.

A seguir, os números irracionais são introduzidos com a demonstração de que a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais a 1 não é um número racional. Tal fato é destacado como um indicador de uma "deficiência" dos racionais e que motiva a procura de um conjunto numérico mais amplo e cujos elementos estejam em correspondência biunívoca com os pontos de uma reta.

Nesta perspectiva, o conjunto dos números reais é apresentado e explorado de maneira totalmente formalizada, enquanto corpo ordenado completo, culminando com o Postulado de Dedekind ("Todo subconjunto não-vazio de números reais, constituído de elementos positivos, tem um ínfimo). São feitos também comentários sobre a determinação de um número real, seguidos de uma breve apresentação da noção de cortes de Dedekind.

Ao longo do texto, são propostos diversos exercícios intercalados ao desenvolvimento teórico dos diversos tópicos. São exploradas algumas propriedades dos números naturais (com destaque para a sua não limitação) e reais (com destaque para demonstrações de desigualdades modulares).

3.4.4. Lições de Álgebra e Análise (Bento de Jesus Caraça)

No prefácio de seu livro, Caraça afirma ter dado um maior desenvolvimento a cada um dos capítulos do livro, não só no âmbito geral da exposição, como também na parte complementar aos diversos assuntos.

Caraça (1959, pref.) justifica assim sua atitude como autor e escritor: "Procedi assim, com dupla intenção: a de levar o aluno a travar, ou poder travar, conhecimento com um domínio mais vasto do que aquele que lhe é imediatamente exigido; a de dar ao professor maior mobilidade na escolha anual da matéria a expor".

De fato, o livro de Caraça se constitui numa obra diferenciada e que deveria ser lida por professores de Álgebra e de Análise, pois as teorias dos números são desenvolvidas de forma analítica e sintética, e servem como uma rica referência teórico-bibliográfica para qualquer disciplina nestas duas áreas da Matemática.

Os Conjuntos Numéricos são tratados ao longo de toda a 1ª parte do livro, intitulada Números, destacando-se: Capítulo I – Números Naturais; Capítulo II – Números Racionais; Capítulo III – Números Relativos; Capítulo IV – Os conjuntos I, $R^{\pm}$ e P; Capítulo V – Números Reais.

A abordagem de todos os conjuntos numéricos parte de uma introdução e de uma "histórica", na qual é pontuado, inclusive, o aparecimento dos conjuntos em livros de Matemática. Para cada conjunto numérico, são apresentadas as operações e propriedades, destacando os aspectos "algébricos".

A teoria axiomática ganha força com o conjunto dos números naturais; as estruturas algébricas são retomadas na sistematização dos conjuntos inteiros e racionais; merece um grande destaque a evolução histórica dos números irracionais, a qual precede a abordagem dos números reais, definidos tanto por corte quanto por sucessões convergentes ("De todo corte se pode extrair um par de sucessões convergentes; todo par de sucessões convergentes determina no conjunto dos reais um corte").

Outro aspecto merece destaque no livro de Caraça. Ao final de cada capítulo, o autor apresenta indicações bibliográficas recomendadas para diversos tópicos abordados ao longo do texto, como por exemplo, a gênese da noção de número natural, propriedades específicas de números racionais e cortes de Dedekind.

Em relação aos exercícios, há uma preocupação com uma escrita mais textual e menos simbólica de resultados relacionados aos diversos conjuntos numéricos, especialmente aqueles mais voltados para as propriedades aritméticas dos números. Nota-se também, a presença de diversos exercícios comumente encontrados nos livros didáticos de Álgebra, em meio a exercícios mais tradicionais de Análise. Isto parece refletir uma postura diferenciada do autor ao entender que os aspectos algébricos e analíticos são complementares no desenvolvimento dos conceitos matemáticos, postura com a qual coadunamos e procuraremos explorar em nossa proposta.

Consideramos que a abordagem de Caraça consegue envolver elementos intuitivos na apresentação rigorosa dos Conjuntos Numéricos. Entretanto, devido ao enfoque algébrico-analítico, o texto é bastante denso em se tratando de referência bibliográfica para disciplinas de Fundamentos de Análise Real.

Capítulo 4

O ENSINO DE CONJUNTOS NUMÉRICOS EM DISCIPLINAS DE FUNDAMENTOS DE ANÁLISE REAL: APRESENTANDO UMA PROPOSTA PARA CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

> "A Matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha das matemáticas".
>
> Gauss

4.1. Apresentando nossa proposta didática

A partir da análise dos livros didáticos realizada no capítulo anterior, pudemos elaborar uma proposta didática para o ensino de Conjuntos Numéricos, passível de utilização em disciplinas de Fundamentos de Análise de cursos de Licenciatura em Matemática.

Na elaboração, procuramos levar em consideração, alguns questionamentos levantados por Pinto (2009, p. 27), que sempre nos inquietaram, tanto quanto discente como docente de Análise Real:

> Que sentido faz a Matemática formal para um futuro matemático, em um primeiro curso na área? Mais especificamente, seria possível descrever o processo (ou processos) cognitivo(s) por meio do(s) qual (is) um estudante de Matemática se relaciona com definições formais e deduções? Como as experiências anteriores dos alunos [...] referenciam a teoria matemática formal, estruturada, a ser compreendida?

Parece-nos claro que tentar responder a estas questões demanda uma investigação criteriosa por parte dos educadores matemáticos / pesquisadores em Educação Matemática. Entretanto, acreditamos que se deve manter um foco quando se trata do Ensino Superior de Matemática, como descreve Tall (1992, p. 495): "O foco principal da Educação Matemática em níveis superiores é o iniciar o aprendiz na totalidade do mundo do matemático profissional, não somente em termos do rigor que é requerido, mas também na vivência das experiências que fundamentam os conceitos".

Nesta perspectiva, procuramos elaborar nossa proposta, tentando apresentar um pouco da história do desenvolvimento dos conceitos como elemento importante na sua própria construção, buscando uma identificação dos conjuntos com suas estruturas algébricas correspondentes e, por fim, primando por uma abordagem que caminhe da intuição para o rigor de uma maneira suave e contínua.

4.2. "História e Desenvolvimento dos Conjuntos Numéricos: Das noções intuitivas para as definições rigorosas"

Nossa proposta se intitula "História e Desenvolvimento dos Conjuntos Numéricos: Das noções intuitivas para as definições rigorosas" e se divide em 5 (cinco) atividades relacionadas aos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

Cada atividade possui objetivos específicos e é seguida por alguns exercícios retirados dos livros didáticos analisados no capítulo anterior e outros de nossa própria autoria.

4.2.1. Atividade 1) O Conjunto dos Números Naturais

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números naturais e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo os Axiomas de Peano.

1.1) Da Intuição...

> O conceito de número com o qual estamos familiarizados, e que é tão essencial na sociedade de nossos dias, evoluiu muito lentamente. Para o homem primitivo, e mesmo para o filósofo da Antiguidade, os números estão intimamente relacionados com a natureza. Para o homem civilizado de hoje, o número natural é um ente puramente matemático, uma conquista de seu pensamento. (Fernandes e outros, 2005, p. 19)

Esta afirmação dos pesquisadores acima faz-nos refletir sobre o quão importante para o homem de diversas culturas e sociedades foi a criação dos números, para representar quantidades e a partir daí, fundamentar o próprio processo de contagem.

A princípio, este processo era, nada mais, nada menos, do que uma tentativa de se estabelecer uma correspondência entre os objetos a serem contados (por exemplo, ovelhas, gados, etc) com o chamado “conjunto de contagem”, o qual continha elementos familiares à cultura e cotidiano das pessoas (por exemplo, pedras, dedos da mão, etc).

Entretanto, este processo de contagem ficava restrito a pequenas quantidades, gerando a necessidade de sua aplicação a casos que envolviam uma maior quantidade de objetos. A saída para este problema foi, então, buscar uma representação simbólica e um certo conjunto de regras e/ou procedimentos que permitissem a representação de um “número qualquer” de objetos. Mas como isso seria possível?

Muitos dos conjuntos criados para este fim continham de 5 a 60 “símbolos básicos”, como os sistemas de numeração egípcio, grego e romano. Atualmente, quase todos os povos do mundo utilizam o sistema numérico hindu-arábico, inventado pelos indianos e introduzido pelos árabes, na Europa.

Este sistema é “decimal posicional”. Decimal, pois utiliza 10 símbolos, chamados algarismos, que são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0. Posicional, pois qualquer número pode ser expresso por estes algarismos, que têm valores distintos de acordo com a posição que eles ocupam na representação do número.

Todavia, não podemos fixar datas para o surgimento dos números naturais, como hoje os conhecemos:

$$\mathbf{IN} = \{ 1 , 2 , 3 , ... \}$$

A respeito do conceito de número natural, Caraça (1959) afirma que o mesmo é muito remoto e constitui uma das primeiras manifestações do despertar da inteligência no homem. Contudo:

> [...] esse conceito deve, durante muitos séculos, ter estado identificado, por assim dizer, com os objetos a que dizia respeito; só muito mais tarde adquiriu o caráter de generalidade e abstração com que hoje o usamos. Foi certamente assim para os primeiros matemáticos gregos... Em Euclides (cerca de 300 a.C.) encontra-se já uma noção de um número natural mais elaborada sem, no entanto, possuir o caráter de generalidade que lhe damos hoje. (Caraça, 1959, p. 4)

Mas o que seriam esta generalidade e abstração relacionadas ao conceito de um número natural que temos hoje?

1.2) ... para o Rigor !

Segundo Lima (1993), toda a teoria dos números naturais pode ser deduzida de 3 axiomas, conhecidos como "Axiomas de Peano".

São dados, como objetos não definidos, um conjunto **IN**, cujos elementos são chamados de "números naturais" e uma função s: **IN** → **IN**. Para cada $n \in$ **IN**, o número s(n) é chamado o "sucessor de n".

A função s satisfaz aos seguintes axiomas:

A1) s é injetiva, isto é, números diferentes possuem sucessores diferentes:

$$m \neq n \Rightarrow s(m) \neq s(n) \text{ ou ainda, } s(m) = s(n) \Rightarrow m = n;$$

A2) Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro; ele é chamado de "um" e é representado pelo símbolo "1". Assim:

$$1 \neq s(n),\ \forall\ n \in \mathbf{IN};$$

A3) Se X é um subconjunto de **IN** tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ temos também que $s(n) \in X$, então X = **IN.**

Este último axioma é também designado como "Princípio da Indução Matemática", pois, noutras palavras, quer dizer que:

"Se $\wp$ é uma propriedade referente aos números naturais que é válida para 1 e, se do fato de um número natural n gozar de $\wp$ pudermos concluir que seu sucessor s(n) = n + 1 também goza da propriedade $\wp$, então podemos concluir que a propriedade $\wp$ é válida para todos os números naturais".

Na visão de Caraça (1959), Peano partiu de 3 conceitos primitivos: unidade, número e sucessor. Por outro lado, buscou relacionar estes conceitos por meio de 5 proposições:

1) A unidade é um número;

2) Todo número tem um, e um só sucessor, que é um número;

3) Se dois números têm o mesmo sucessor, então são iguais;

4) A unidade não é sucessor de nenhum número;

5) Se uma classe S de números contém a unidade e se a classe formada pelos sucessores dos números de S está contida em S, então todo número pertence a S.

Entretanto, mesmo com a formalização de Peano, os matemáticos estão longe de estabelecer um acordo a respeito das teorias axiomáticas dos números naturais. Como o próprio Peano verificou, existem várias "sucessões" diferentes da "sucessão dos números naturais" que satisfazem aos seus axiomas.

Exercícios

1) Use o Princípio da Indução Matemática para provar que:

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$, n = 1, 2, 3, ...

2) Sabemos das Progressões Aritméticas que:

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Prove esse resultado por indução.

3) Dados os números naturais **a** e **b**, com **a < b**, prove que existe um número natural **m** tal que **a + m = b**.

4) Um elemento **a** $\in$ **IN** chama-se antecessor de **b** $\in$ **IN** quando se tem **a < b** mas não existe **c** $\in$ **IN** tal que **a < c < b.** Prove que, exceto 1, todo número natural possui um antecessor.

4.2.2. Atividade 2) O Conjunto dos Números Inteiros

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números inteiros e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo as estruturas algébricas de Anel e Domínio de Integridade.

2.1) Da Intuição...

Com o desenvolvimento do raciocínio matemático e de suas aplicações, surgiram algumas situações ainda não definidas na perspectiva de se trabalhar somente com os números naturais. Foi o que ocorreu na China antiga.

Eles operavam com os números naturais precedidos de uma barra vermelha ou por uma barra preta, que tinham significados opostos. Era a idéia "primitiva" de números negativos e positivos, usados em situações diversas para representar excesso e falta.

Apesar de operar facilmente com esses novos "entes" matemáticos, os chineses, assim como aconteceu com Diofanto de Alexandria (século III), não os consideravam verdadeiros para solucionar algumas equações. Nestas situações, Diofanto limitava-se a classificar o problema como absurdo. Já os europeus, nos séculos XVI e XVII, admitiam que esses problemas tinham soluções falsas ou impossíveis.

Assim o fez Michael Stifel (1487-1567) que se negou a admitir os números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de "numeri absurd". Cardano chamou-os de "numeri ficti".

Apenas no século XVIII, houve uma interpretação dos números positivos e negativos como sendo "segmentos de direções opostas". Assim, o 1 seria um segmento de uma unidade para a direita enquanto que o – 1 seria o segmento de uma unidade para a esquerda. Agora sim, fazia sentido pensarmos no elemento neutro:

> Se bem que a idéia de zero, de não-existência, esteja sem dúvida ligada à noção de quantidade, a verdade é que, nem nas mais antigas civilizações conhecidas, nem nos povos mais primitivos de hoje, se encontra o zero tomado como número nem o uso de um símbolo para o zero. Este é

> relativamente recente e a sua introdução foi devida às exigências da numeração escrita. (Caraça, 1959, p. 15)

Coadunando com o autor citado, o zero será considerado um número inteiro, o elemento neutro "separador" dos números positivos e negativos. Teremos, então, o conjunto dos números inteiros como o conhecemos hoje:

$$\mathbf{Z} = \{ \ldots , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots \}$$

Comparando-o com o conjunto dos números naturais, vemos que apesar dos números realmente usados no processo de contagem "natural" serem os inteiros positivos, os inteiros negativos conseguiram preencher uma lacuna que existia, quando se pensava em comparação de medidas e grandezas.

Esta "criação humana" dos inteiros foi, portanto, fundamental para o desenvolvimento não só da Matemática, mas de toda a Ciência de uma maneira geral, pois hoje, vemos com muita "naturalidade" uma representação numérica negativa quando analisamos a temperatura de um local ou um extrato bancário.

2.2) ... para o Rigor !

Com o intuito de definir formalmente o conjunto dos números inteiros, vamos relembrar a definição de duas estruturas algébricas de grande importância: Anel e Domínio de Integridade.

Sejam A um conjunto e (+) e (.) duas operações em A, chamadas de "adição" e de "multiplicação". A terna **(A,+,.)** será chamada de Anel se as operações gozarem das seguintes propriedades:

A1 (A adição é associativa) Quaisquer que sejam a, b e c $\in$ A, tem-se que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

A2 (A adição é comutativa) Quaisquer que sejam a e b $\in$ A, tem-se que:

$$a + b = b + a$$

A3 (Existe um elemento neutro da adição) Existe um $0 \in$ A tal que:

$$a + 0 = a \text{ , para todo } a \in A$$

A4 (Todo elemento possui um simétrico) Para todo $a \in A$, existe um $-a \in A$ tal que:

$$a + (-a) = 0$$

M1 (A multiplicação é associativa) Quaisquer que sejam a, b e $c \in A$, tem-se que:

$$(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$$

M2 (A multiplicação é comutativa) Quaisquer que sejam a e $b \in A$, tem-se que:

$$a \,.\, b = b \,.\, a$$

M3 (Existe um elemento neutro da multiplicação) Existe um $1 \in A$ tal que:

$$a \,.\, 1 = a \text{ , para todo } a \in A$$

MA (A multiplicação é distributiva em relação à adição) Quaisquer que sejam a, b e c $\in A$, tem-se que:

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$$

É fácil verificarmos que, da forma como a adição e a multiplicação estão definidas no conjunto dos números inteiros, a terna **(Z,+,.)** é um anel, no qual o elemento neutro da adição é o número inteiro “0” e o elemento neutro da multiplicação é o número inteiro “1”.

Existe também uma outra estrutura algébrica com propriedades muito interessantes que é um Domínio de Integridade. Um anel **(A,+,.)** será chamado de Domínio de Integridade (ou Anel de Integridade) se, além das propriedades anteriores de anel, for válida a seguinte propriedade:

M4 (Propriedade da Integridade para a multiplicação) Sejam a e $b \in A$, tais que $a \,.\, b = 0$, onde 0 é o elemento neutro da adição. Então:

$$a = 0 \text{ ou } b = 0$$

(Z,+,.) é, portanto, um domínio de integridade, pois, de fato, se a e $b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $a \,.\, b \neq 0$.

Exercícios

1) Ache o erro na “demonstração” da seguinte afirmação, obviamente falsa:

“Todos os números inteiros positivos são iguais, ou seja, para todo $n \in IN$ é verdadeira a asserção $P(n)$: $1 = ... = n$”.

i) $P(1)$ é verdadeira, pois $1=1$;

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira; logo, $1 = ... = n - 1 = n$. Somando 1 a cada membro da última igualdade, segue que $n = n + 1$; logo, $1 = ... = n - 1 = n = n + 1$ e, portanto, $P(n + 1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo Principio da Indução Matemática, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in IN$.

2) Seja f: $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ uma função tal que, para quaisquer que sejam **a** e **b** $\in$ **Z,** $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Pede-se:

a) Mostre que $f(0)=0$;

b) Mostre por indução que $f(n) = n.f(1)$, para todo $n \in \mathbf{Z}^+$;

c) Mostre que $f(-n) = -f(n)$, para todo $n \in \mathbf{Z}$;

d) Conclua que $f(n) = n \,.\, f(1)$, para todo $n \in \mathbf{Z}$.

3) Seja **a** um número inteiro. Mostre que:

a) Se $\mathbf{a}^2$ é par, então **a** é par;

b) Se $\mathbf{a}^2$ é divisível por 3, então **a** é divisível por 3.

4) Mostre que o algarismo das unidades do quadrado de um número inteiro, no sistema decimal, só pode ser **0, 1, 4, 5, 6 ou 9**.

4.2.3. Atividade 3) O Conjunto dos Números Racionais

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números racionais e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo a estrutura algébrica de Corpo.

3.1) Da Intuição...

> O conhecimento dos números fracionários é muito remoto. Eles introduziram-se naturalmente no cálculo pela necessidade de exprimir numericamente a medida de certas grandezas. (Caraça, 1959, p. 35)

Segundo o autor, já se encontra menção aos números fracionários no "Papiro de Rhind", documento egípcio datado de 1500 a 2000 a.C., pertencente ao *British Museum*. A idéia básica é descrita a seguir.

Dado o segmento de reta $\overline{AB}$, e tomando como unidade de medida o segmento $\overline{CD}$, no caso, que é o mais frequente, de $\overline{CD}$ não estar contido um número (inteiro) de vezes em $\overline{AB}$, procura-se um segmento de comprimento L que seja "parte alíquota" de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (isto é, ela se contém um número inteiro em ambos os segmentos). Se med$\overline{CD}$ =n.L e med$\overline{AB}$ =m.L, o resultado da medida exprimir-se-á dizendo que o segmento $\overline{AB}$ contém m das *n-ésimas* partes de $\overline{CD}$, ou m *n-avos* de $\overline{CD}$, ou que a medida de $\overline{AB}$ tomando como unidade $\overline{CD}$ é o novo número $\frac{m}{n}$; com o mesmo significado temos ainda a igualdade:

$$\text{med}\,\overline{AB} = \frac{m}{n} \,.\, \text{med}\,\overline{CD} \,.$$

Nesta primeira definição, Caraça (1959) aborda razão de segmentos para definir "números fracionários". Já Ávila (2006, p. 20) ressalta a diferença de razão para fração: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos, não números. É por isso que "razão" não é o mesmo que "fração". Os gregos não usavam "frações", apenas "razões". E não escreviam $\frac{AB}{CD}$ para indicar a razão de dois segmentos (aqui, AB e CD são as medidas dos segmentos).

Mesmo nos dias de hoje, costuma-se escrever AB:CD=m:n, e dizer “AB está para CD assim como *m* está para *n”*. Quando indicamos a razão com $\frac{AB}{CD}$, em vez de AB:CD, não devemos confundí-la com fração.

3.2) ... para o Rigor !

Definimos “anel” na atividade do conjunto dos números inteiros, exemplificando com o “domínio de integridade” (**Z**,+,.). Para definirmos o conjunto dos números racionais vamos relembrar outra importante estrutura algébrica, a estrutura de Corpo.

Segundo Figueiredo (1996), um corpo K é um conjunto de elementos x,y,z,..., onde se acham definidas as operações de adição (isto é, a cada par de elementos x e y em K corresponde um único elemento de K que se designa por x + y) e de multiplicação (isto é, a cada par de elementos x e y em K corresponde um único elemento de K que se designa por x.y) satisfazendo às propriedades que seguem:

1) Leis comutativas: $x + y = y + x$, $x.y = y.x$;

2) Leis associativas: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x.y).z = x.(y.z)$;

3) Existência de um zero: existe um elemento $0 \in K$ tal que:

$$x + 0 = x \text{ , para todo } x \in K;$$

4) Existência de uma unidade: existe um elemento $1 \in K$ tal que:

$$x.1 = x \text{ , para todo } x \in K;$$

5) Existência de um simétrico: dado $x \in K$, existe $-x \in K$ tal que:

$$X + (-x) = 0;$$

6) Existência de um inverso: dado $x \in K$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in K$ tal que:

$$x \,.\, x^{-1} = 1;$$

7) Lei distributiva: $(x + y) \,.\, z = x \,.\, z + yz$.

Temos então, que o conjunto dos números racionais **Q**, munido das operações usuais de adição e multiplicação, é um corpo, onde:

$$\mathbf{Q} = \{ p / q; \text{ tais que } p, q \in \mathbf{Z} \text{ e } q \neq 0 \}$$

Para representar o conjunto **Q** na reta real **R**, representamos dois pontos, o "0" e o "1". Os inteiros são facilmente marcados tomando o segmento de extremidades "0" e "1" como unidade. Os racionais são obtidos por subdivisões adequadas do segmento unidade.

Domingues e Iezzi (1984) observam que os anéis **Z** e **Q** são ambos, "comutativos com unidade" (vale a comutatividade das operações e a existência da unidade). Para ambos vale a Propriedade da Integridade, também conhecida como lei do anulamento do produto. Mas, enquanto no anel **Z** somente o "1" e o "–1" admitem inverso (que também pode ser chamado de "inverso multiplicativo" ou ainda "simétrico multiplicativo"), no anel **Q**, todo elemento não nulo admite inverso. Este fato nos sugere a definição a seguir:

"Um anel K, comutativo com unidade, recebe o nome de corpo se todo elemento não nulo de K admite inverso multiplicativo, isto é:

$$\forall\, a \in K,\, a \neq 0,\, \exists\, b \in K \,/\, a.\, b = 1$$

Tal elemento b é chamado inverso de a e será denotado por a^{-1}."

Se agora relacionarmos corpos com domínios de integridade, temos um resultado muito interessante:

Proposição: Todo corpo K é um domínio de integridade.

Demonstração: Sejam a e b elementos de um **corpo** K tais que **a.b = 0**. Suponhamos que um deles, por exemplo, a, é não nulo. Então, existe $a^{-1} \in K$, tal que: $a.a^{-1} = 1$. Multiplicando os dois membros da equação a.b = 0 por a^{-1}, temos:

$$a^{-1}.a.b = a^{-1}.0 \Rightarrow 1.b = 0, \text{ ou seja, } \mathbf{b = 0}.$$

Assim, provamos a lei do anulamento do produto em K que é, então, um **domínio de integridade**.

Vale ressaltar que a recíproca desse teorema não é verdadeira, pois, como já mencionamos, **Z** é um domínio de integridade, porém não é um corpo, uma vez que seus únicos elementos "inversíveis" são o "1" e o "– 1".

Uma outra abordagem interessante que é a definição de número racional feita por Hefez (1993, p. 35), na qual o autor destaca o "senso comum" de identificação de um número racional com uma fração, mas expressa o que considera "essencial" no conceito de fração:

"Frequentemente, define-se um número racional como sendo uma fração $\frac{a}{b}$ com a e b números inteiros e b ≠ 0. Mas o que é fração? O essencial numa fração $\frac{a}{b}$ é o par ordenado (a , b) e a relação de igualdade $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow (a.b' = a'.b)$"

Isto é o ponto de partida para se definir um corpo de frações de um domínio de integridade qualquer. Em particular, **Q** pode ser definido como o corpo de frações de **Z** (Ver Hefez, 1993, p. 35).

Exercícios

1) Prove que a dízima periódica 0,232323...é igual a $\frac{23}{99}$, explicando todos os passos da demonstração.

2) Reduza à forma de fração ordinária as dízimas periódicas a seguir:

a) 0,777...

b) 1,666...

c) 0,170170...

d) 1,2727...

e) 0,343343...

f) 0,270270...

g) 21,4545...

h) 3,0202...

i) 5,2121...

j) 0, 999...

3) Estabeleça a seguinte regra: Toda dízima periódica simples é igual a uma fração ordinária, cujo numerador é igual a um período e cujo denominador é constituído de tantos noves quantos são os algarismos do período. (“dízima periódica simples” significa que o período começa logo após a vírgula; fique entendido também que a dízima não tem parte inteira).

4) Mostre que a soma, a diferença, o produto e a divisão de dois números racionais é um número racional.

4.2.4. Atividade 4) O Conjunto dos Números Irracionais

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números irracionais e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo a Teoria das Proporções de Eudoxo.

4.1) Da Intuição...

> A origem histórica da necessidade da criação dos números irracionais deve-se simultaneamente a fatos, intimamente relacionados, de ordem geométrica e aritmética. (Caraça, 1959, p. 87)

O autor refere-se à existência de certos segmentos então chamados de "incomensuráveis" entre si, isto é, segmentos que não possuem uma medida comum entre si. No campo aritmético, a existência de segmentos incomensuráveis equivale à impossibilidade da existência de números racionais que representem esses segmentos, ou ainda, "à impossibilidade da existência, sempre, de um número racional raiz exata de outro". (Caraça, 1959, p. 87)

A incomensurabilidade da diagonal do quadrado era conhecida na "escola pitagórica", mas a sua descoberta não se desenvolveu em conjunto dos números, como nos parece natural; foi tratada como a razão de segmentos incomensuráveis.

Continuavam a considerar apenas os números racionais, desenvolvendo-se ao lado uma teoria geométrica. A separação da Aritmética com a Geometria em compartimentos estanques é essencialmente de ordem filosófica.

Mas a busca pela formalização dos conjuntos numéricos e a criação da Geometria Analítica com Fermat e Descartes, no século XVII, exigiu uma mudança de atitude em relação a esses dois campos, preparando assim o caminho para o tratamento aritmético das incomensurabilidades:

> Newton dá já uma definição de número, a partir da razão de grandezas, que compreende tanto os números racionais como os irracionais. Só no século XIX, porém, com Weierstrass, Méray Dedekind e Cantor, apareceram teorias dos números irracionais satisfatórias do ponto de vista do rigor científico. (Caraça, 1959, p. 87)

Figueiredo (1996) também aborda a incomensurabilidade da diagonal do quadrado da seguinte forma:

> [...] a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos têm comprimento 1, então a hipotenusa não é racional. Portanto, o ponto P da reta R, obtido traçando-se a circunferência centrada em 0 e raio igual à hipotenusa, não corresponde a um racional (ver Figura 2 abaixo) (Figueiredo, 1996, p. 4)

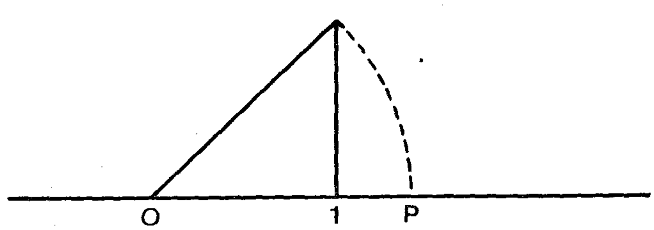


Fig. 2

O autor não apenas cita a sua incomensurabilidade, mas demonstra a irracionalidade da hipotenusa.

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que a hipotenusa seja um racional p / q. Podemos supor que p e q são primos entre si. Pelo Teorema de Pitágoras, $(p / q)^2 = 1 + 1$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é um inteiro par, o que implica que p é par, isto é, p = 2r. Portanto, $4r^2 = 2q^2$, ou seja, $q^2 = 2r^2$, de onde se segue que q é par. Ora, p e q, sendo números pares, não podem ser primos entre si. Essa é a contradição!

A demonstração acima explicita a existência de pontos da reta (real!) que não correspondem a elementos de **Q**, indicando uma insuficiência dos racionais no "preenchimento" desta reta.

4.2) ... para o Rigor !

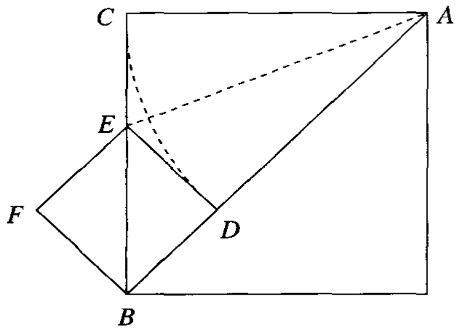
Desde o século V a.C., época dos pitagóricos, acreditava-se que dados dois segmentos AB e CD (aqui representados sem a barra superior, por simplificação de notação), sempre existiria um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em AB e em CD. Uma simples reflexão intuitiva nos sugere que essa é uma ideia muito razoável pois, caso um certo EF não sirva, podemos procurar outro "menor" que satisfaça a condição de ser submúltiplo comum de AB e CD.

Dois segmentos são ditos comensuráveis quando existe o segmento EF capaz de medí-los um número inteiro de vezes.

Ao contrário do que nos induz a intuição geométrica, existem segmentos incomensuráveis, o que foi motivo de muita surpresa para todos os matemáticos da época. A priori, a sua aceitação não foi unânime, acarretando a chamada "crise dos incomensuráveis" (BOYER, 1974; EVES, 1997).

Ávila (2006) apresenta como exemplo inicial de segmentos incomensuráveis, o lado e a diagonal de um quadrado.

Seja o quadrado a seguir de lado AC e diagonal AB.



Vamos supor, por absurdo, que os segmentos AC e AB são comensuráveis. Isto implica que existe um terceiro segmento λ, submúltiplo comum de AC e AB. Com centro em A e raio AC tracemos o ponto D na diagonal AB. Seja DE o segmento perpendicular à diagonal AB, com $E \in$ CB. De certo que os triângulos ACE e ADE são congruentes (AC = AD, AE é lado comum e os ângulos ADE e ACE são retos) sendo, portanto CE = ED. Como o triângulo BDE é retângulo isósceles (já que o ângulo formado pela diagonal e um lado é de 45º), concluímos que BD = DE. Logo:

AB = AD + BD = AC + BD , isto é, AB = AC + BD

Como o segmento λ é submúltiplo comum de AC e de AB, ele será submúltiplo de BD (que seria a diferença entre AB e AC). Temos também que:

AC = BC = BE + EC = BE + BD , isto é, AC = BE + BD

Como o segmento λ é submúltiplo comum de AC e de BD (como demonstramos acima), ele será submúltiplo de BE. Então, o mesmo segmento λ será submúltiplo comum de BE e BD, segmentos esses que são, respectivamente, a diagonal e o lado do quadrado BDEF. Ora, a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original ao quadrado menor BDEF pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente, de modo que esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos. Dessa maneira, provamos que o segmento λ deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos. Como foi “fixado” no primeiro passo, isto nos leva a um absurdo!

Concluímos, portanto, que o lado e a diagonal do quadrado são segmentos incomensuráveis.

Então, a partir desta idéia, podemos concluir que a razão entre dois segmentos incomensuráveis não é um número racional; logo, será um número irracional.

A formalização do conjunto dos números irracionais, ou **R – Q**, foi feita por Eudoxo, em sua Teoria das Proporções (ver ÁVILA, 2006, p. 50).

Exercícios

1) Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.

2) Prove que $\sqrt{p}$ é irracional, onde p>1 é um número primo qualquer.

3) Prove que a soma ou a diferença entre um número racional e um número irracional é um número irracional. Mostre, com um contra-exemplo, que o produto de dois números irracionais pode ser um número racional.

4) Prove que o produto de um número irracional por um número racional diferente de zero é um número irracional.

4.2.5. Atividade 5) O Conjunto dos Números Reais

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números reais e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo os Cortes de Dedekind.

5.1) Da Intuição...

> A Matemática desenvolveu-se extensamente nos tempos modernos (isto é, a partir do século XVI), até o início do século XIX, mesmo sem qualquer fundamentação dos diferentes sistemas numéricos. Trabalhavam-se livremente com os números racionais e irracionais, desenvolvendo todas as suas propriedades, sem que houvesse uma teoria embasando esse desenvolvimento. (Ávila, 2006, p. 55)

Esta nota histórica nos mostra dois aspectos interessantes no desenvolvimento dos números reais.

O primeiro aspecto diz respeito a uma sensação de “dever cumprido” que muitos matemáticos sentiram ao se construírem os números irracionais que agora, unidos aos racionais, formavam o conjunto dos números reais, um conjunto realmente “completo”, no sentido de que, se associado a uma reta contínua, cada elemento deste conjunto era representado por um ponto na reta e, da mesma forma, cada ponto desta reta representava um elemento deste conjunto. Assim, “completou-se” a idéia da reta real da maneira como hoje a conhecemos:

$$\mathbf{IR = Q \cup (IR - Q)}$$

____●__________●______●_______●______●___●___●________●_______

– 4 – 2 – 3/2 0 1 $\sqrt{2}$ 2 π

Outro aspecto é que muitos matemáticos se sentiam “incomodados”, pois, muitos conceitos matemáticos importantes como limites, derivadas e integrais (só para ficarmos em conceitos do Cálculo Diferencial e Integral), estavam baseados numa noção que até então não estava “rigorosamente formalizada”: a noção de “número real”.

Nesta perspectiva, muitos matemáticos do século XIX fizeram acontecer um movimento que ficou conhecido como a “Aritmetização da Análise” (ver REIS, 2009) que se revelou em diversas tentativas de dar ao Cálculo (e, portanto, a toda a Matemática) um padrão de formalização e rigor que, necessariamente passava, naquele momento, pela “urgência” de se ter uma definição precisa, rigorosa e inabalável de número real.

5.2) ... para o Rigor !

> Vários matemáticos do século XIX cuidaram da construção dos números reais, dentre eles Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor. Mas as teorias dos números reais que permaneceram foram a de Dedekind e a de Cantor. (Ávila, 2006, p. 57)

A partir de agora, faremos uma breve exposição das idéias centrais da teoria de Dedekind, destacando inicialmente a definição de “corte”, que é considerada fundamental dentro da perspectiva, então inovadora, de se pensar num número real como um “par de dois subconjuntos”.

Definição

Um **corte de números reais** ou, simplesmente, **corte**, é um par ordenado de subconjuntos do conjunto dos números racionais não vazios (E , D), tal que:

i) E U D = **Q**

ii) Todo elemento de E é menor que todo elemento de D, isto é:

$$\text{Se } x \in E \text{ e } y \in D, \text{ então } x < y.$$

Teorema de Dedekind

Todo corte possui um **elemento de separação**. Este elemento é o **número real** com o qual ele é identificado.

Exemplos:

1) $E = \{ x \in \mathbf{Q} \ / \ x \leq 3\}$
$D = \{ x \in \mathbf{Q} \ / \ x > 3\}$

$\Rightarrow$ **(E,D)** = 3

2) $E = \{ x \in \mathbf{Q}_- \text{ ou } (x \in \mathbf{Q}_+ \ / \ x^2 < 2)\}$
$D = \{ x \in \mathbf{Q}_+ \ / \ x^2 > 2\}$

$\Rightarrow$ **(E,D)** = $\sqrt{2}$

Nos exemplos acima, os números reais 3 e $\sqrt{2}$ são os elementos de separação dos respectivos cortes.

A demonstração deste teorema é bastante elaborada e, em alguns casos, o mesmo é enunciado até como “Postulado de Dedekind” (Figueiredo, 1996, p. 9).

Entretanto, o que vale destacar é que, a partir deste teorema, formalizamos o conceito de número real (que, então, é identificado com o seu corte), formalização esta, que vinha sendo perseguida desde os primórdios do desenvolvimento dos sistemas numéricos (ver JÚDICE, 2007).

Exercícios

1) Prove que entre dois números reais distintos sempre há uma infinidade de números racionais (isto é, o conjunto dos números racionais é denso em **IR**).

2) Prove que entre dois números reais distintos sempre há uma infinidade de números irracionais (isto é, o conjunto dos números irracionais é denso em **IR**).

3) Mostre que dado um número real positivo **a**, existe um natural **n** tal que $\frac{1}{n} < \mathbf{a}$.

4) Defina cortes para os seguintes números reais:

a) 2

b) π

Passaremos, agora, a descrever nossa metodologia de pesquisa, detalhando a implementação de nossa proposta com alunos de Licenciatura em Matemática.

Capítulo 5

DESCREVENDO NOSSA METODOLOGIA DE PESQUISA E ANALISANDO NOSSOS DADOS À LUZ DO APORTE TEÓRICO

> "É importante notar que o ser humano é o principal ator nesta modalidade de pesquisa, e não há procedimentos que substituam idéias e *insights*".
>
> Marcelo de Carvalho Borba

5.1. Descrevendo a Metodologia de Pesquisa

Basicamente, podemos classificar nossa pesquisa como qualitativa em relação a seus objetivos e também em relação a seus métodos, uma vez que intentamos, na visão do aluno, investigar as contribuições de nossa proposta de ensino de Conjuntos Numéricos para o ensino de disciplinas de Fundamentos de Análise Real, a partir das observações feitas em sala de aula e das interações entre os alunos manifestadas quando da implementação das atividades.

Como instrumentos de coleta de dados, recorremos ao diário de pesquisa e a 3 (três) questionários abertos: um Questionário Inicial, aplicado antes do inicio da 1ª atividade (setembro de 2009); um Questionário de Avaliação de Atividades, aplicado ao fim da 5ª atividade (outubro de 2009); e um Questionário Final, aplicado ao final do projeto (outubro de 2009). As anotações no diário de pesquisa eram feitas pelo presente pesquisador, após cada aula, levando em consideração os comentários feitos pelos alunos no decorrer das aulas.

Iniciando o semestre letivo, desenvolvemos o capítulo de Preliminares de Lógica, fundamental para conhecer melhor o perfil da turma, que continha alunos de diferentes períodos. Após a finalização deste primeiro capítulo, aplicamos o Questionário Inicial, respondido individualmente, contendo as seguintes questões:

1) Em sua opinião, qual é o papel das demonstrações em Matemática? Comente!

2) Quais são as principais dificuldades que você manifesta ao demonstrar resultados (propriedades, teoremas, etc)? Dê exemplos!

3) Você acha que as demonstrações e, de uma maneira geral, o rigor é importante para sua formação enquanto futuro Professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio? Justifique!

Nas aulas seguintes, começamos a desenvolver nossas atividades de Conjuntos Numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) utilizando, em média, 2 horários de 50 minutos (2 aulas) para a leitura, discussão e apresentação da atividade e mais 2 horários de 50 minutos (2 aulas) para discussão e resolução dos exercícios. Tal procedimento foi utilizado para cada uma das 5 atividades que, portanto, foram desenvolvidas em 5 semanas letivas, já que a carga horária da disciplina era de 4 horas/aula semanais.

Ao fim da 5ª atividade, aplicamos o Questionário de Avaliação de Atividades, preenchido individualmente, que continha as seguintes questões:

1) Na realização das atividades, onde ocorreram suas maiores dificuldades? Explicite!

2) A realização das atividades contribuiu para uma ressignificação dos seus conhecimentos em relação aos Conjuntos Numéricos? Em que aspectos ou tópicos do conteúdo?

3) Você tem alguma sugestão de mudança ou acréscimo nas atividades ou na sua forma de realização, visando sua real aplicação didática? Descreva!

Como forma de conclusão de nosso projeto de pesquisa e tentando retomar algumas questões do Questionário Inicial, aplicamos o Questionário Final, respondido individualmente, que continha as seguintes perguntas:

1) Você considera importante para o Professor de Matemática o aspecto do rigor matemático presente nos enunciados e demonstrações dos resultados? Justifique!

2) Quais seriam alguns dos principais tópicos do conteúdo matemático dos Conjuntos Numéricos em que a realização das atividades didáticas pode contribuir para sua aprendizagem? Por quê?

3) Em relação às dificuldades que você manifestava ao demonstrar resultados (propriedades, teoremas, etc), você considera que houve algum avanço no sentido de superação das mesmas? Dê exemplos!

Passaremos agora, para a análise destes questionários, procurando destacar algumas observações feitas em sala de aula e as interações entre os alunos manifestadas quando da implementação das atividades. Tais observações foram registradas em nosso “diário de pesquisa de campo”.

Cabe destacar que, dos 21 (vinte e um) alunos do curso de Licenciatura em Matemática do ISEIB matriculados na disciplina de “Introdução à Análise Real”, apenas 4 (quatro) residiam em Montes Claros – MG; os outros 17 (dezessete) residiam em cidades circunvizinhas, deslocando-se diariamente para a faculdade no período noturno, chegando às 19:00 horas para o início das aulas e retornando para as suas cidades de origem às 22:30 horas. Por isso, apenas 12 (doze) alunos efetivamente responderam aos questionários, pois o preenchimento dos mesmos sempre ocorria em horários extraclasse.

Por questões de natureza ética, identificaremos os 12 (doze) alunos participantes da pesquisa (respondentes dos questionários) apenas por números. Dentre estes 12 (doze) alunos, 7 (sete) estavam cursando o 6º período (Alunos 1 a 7) e 5 (cinco) cursavam o 5º período (Alunos 8 a 12).

5.2. Analisando o Questionário Inicial

Em setembro de 2009, aplicamos o Questionário Inicial, objetivando identificar a opinião dos alunos sobre o papel das demonstrações, as dificuldades por eles manifestadas ao demonstrar resultados e a importância das demonstrações e do rigor para a formação do Professor de Matemática.

Em relação ao papel das demonstrações em Matemática, a grande maioria dos alunos destacou a demonstração como forma de “comprovação” ou de “validação” dos resultados.

Inicialmente, 2 (dois) alunos (Alunos 1 e 4) ressaltaram a importância das demonstrações para a "compreensão" da Matemática sem, entretanto, explicar melhor porque isto acontece.

Estas ideias nos remetem a Hanna (1989) tanto ao ressaltar o papel de uma "prova que prova" quanto de uma "prova que explica", já que ambas têm como função provar a veracidade de uma propriedade matemática. Entretanto, os Alunos 1 e 4 destacaram ainda o papel da demonstração como um instrumento que contribua para se compreender a propriedade matemática. Então, temos as duas "faces" das demonstrações propostas por Hanna (1989), a "prova que prova" e a "prova que explica"; a primeira, com a única função de comprovar a veracidade de um teorema e a segunda que, além de comprovar a veracidade do teorema, ajuda no processo de aprendizado / entendimento da respectiva propriedade.

O caráter de generalidade de uma demonstração, conforme destacado por Garnica (2002), foi apontado por um aluno, com um papel relevante:

> É muito importante, pois através dela (da demonstração) passamos e conseguimos perceber o que muitas vezes não percebemos nas resoluções com números. (Aluno 6)

De fato, acreditamos que uma demonstração (por ser rigorosa e generalizadora) tem o papel de estender e comprovar propriedades e resultados que, até se cursar a disciplina de Análise Real, muitas vezes são verificados pelos alunos somente através de exemplos numéricos, como é o caso de propriedades de conjuntos numéricos ("racional mais racional é racional") ou de propriedades de limites de funções ("limite da soma é a soma dos limites"). Assim, a Análise Real cumpre seu importante papel na transição para um pensamento matemático avançado (TALL, 1991).

Apenas um aluno apresentou uma perspectiva negativa sobre o papel das demonstrações em Matemática:

> Creio que se trata de formalidade e que, às vezes, esta formalidade me deixa confusa e desanimada. (Aluno 5)

Como a disciplina ainda estava no início, talvez a confusão a que o aluno se referia estivesse relacionada a alguma disciplina cursada anteriormente, na qual as demonstrações tiveram um lugar de destaque na metodologia desenvolvida (como, por exemplo, a disciplina de "Estruturas Algébricas"). Entretanto, pela nossa experiência discente e docente, esta parece ser a realidade de muitos alunos de Análise Real e, porque não dizer, do curso de Matemática, em geral.

Já em relação às principais dificuldades manifestadas pelos alunos na demonstração de resultados matemáticos, muitos relataram a dificuldade de "escrever o seu pensamento". Esta dificuldade estava presente no questionário de 7 (sete) alunos:

> Na maioria das vezes, a minha dificuldade é não saber por onde começar e também escrever de maneira clara o que estou pensando. (Aluno 11)

A dificuldade de escrever pode ser estar associada à natureza dos dois processos: "pensar matematicamente" (MOREIRA, CURY e VIANNA, 2005) e "descrever o pensamento matemático" (TALL, 1991). Acreditamos que o "pensar matematicamente" tem um caráter basicamente intuitivo, influenciado pela "imagem conceitual" que os alunos trazem das ideias matemáticas; já o "descrever o pensamento matemático" tem um caráter basicamente rigoroso, influenciado pela "definição conceitual" que os alunos tentam agregar às ideias matemáticas.

Esses relatos coadunam com a pesquisa de Pinto (2001), que destacou o curso de Análise Real como uma introdução dos alunos nos aspectos formais da Matemática, "não sendo a sua docência, uma tarefa fácil".

Um aluno destacou a necessidade de conhecer profundamente o tema a ser estudado (e demonstrado!), sob pena de ter como maior dificuldade a elaboração e organização do que se deve demonstrar:

> O maior domínio do conteúdo ajudaria na separação e definição da sequência das ideias utilizadas, de forma a melhor atender às necessidades da questão. (Aluno 3)

Finalizando o questionário inicial, atentamos à importância dada aos alunos para as demonstrações e o rigor na sua formação, enquanto futuros professores dos Ensinos Fundamental e Médio.

Eles foram unânimes ao reafirmar a importância das demonstrações para um professor desses níveis de ensino. Entretanto, podemos identificar duas categorias distintas de justificativas dadas para as suas respostas. Alguns alunos apontaram que o rigor e as demonstrações têm a finalidade principal de comprovar a veracidade das propriedades estudadas, servindo de garantia para o seu uso:

> Devemos mostrar, ou melhor, demonstrar aos alunos a veracidade de determinadas propriedades e teoremas. Com isto, os alunos terão uma crença maior no conteúdo. (Aluno 7)

Ainda nesse viés, outros alunos chamaram atenção para a possibilidade do uso de uma propriedade, após ser demonstrada, como “ferramenta de trabalho” para futuras demonstrações, na mesma perspectiva de Moreira, Cury e Vianna (2005):

> Além do conhecimento das fórmulas e cálculos, precisamos saber por que elas funcionam e como foram concebidos. Além de usá-las para provar que algumas novas relações podem ser feitas. (Aluno 8)

Outro grupo de alunos considera as demonstrações, com todo o rigor inerente a elas, como uma etapa do processo de aprendizagem, seja do aluno ou do professor. Alguns a consideram importante para o aprendizado do aluno (Alunos 1 e 4) e a grande maioria (Alunos 2, 3, 5, 9, 10, 11 e 12) a consideram importante para o aprendizado do professor, assegurando-lhe confiança e domínio da disciplina a ser ministrada na sala de aula:

> Certamente, as demonstrações servirão de amparo nos momentos de questionamentos por parte dos alunos em relação ao professor, e o rigor ajuda a diminuir os possíveis equívocos cometidos durante o estudo destes conceitos, formalizando os trabalhos a serem realizados. (Aluno 3)

Um aluno destacou ainda, que o conhecimento advindo da demonstração, acarretará numa maior segurança do professor e numa melhor metodologia para aplicarmos em sala de aula; mas não esclareceu se essa “melhor metodologia” seria a própria utilização da demonstração em sala de aula ou se seria uma consequência do aprofundamento do conteúdo pelo professor ao utilizá-la na preparação de suas aulas.

Percebemos que os alunos pesquisados atribuem ao rigor e às demonstrações, a mesma função de “provar” a veracidade de uma propriedade e de “entendê-la” , assim como apontado por Hanna (1989), tanto ao se manifestarem sobre o papel das demonstrações na Matemática, de uma forma geral, quanto ao se manifestarem sobre o papel das demonstrações na formação do professor dos Ensinos Fundamental e Médio.

5.3. Analisando o Questionário de Avaliação das Atividades

Em outubro de 2009, aplicamos o Questionário de Avaliação das Atividades, objetivando identificar as dificuldades manifestadas pelos alunos na realização das atividades, a contribuição das mesmas para uma ressignificação dos conhecimentos relacionados aos Conjuntos Numéricos e ainda, levantar possíveis sugestões de mudança ou acréscimo nas atividades ou na sua forma de realização.

Em relação às dificuldades encontradas pelos alunos na realização das atividades propostas, muitos ainda consideraram como maior entrave, a dificuldade em expressar as idéias matemáticas. Em contrapartida, muitos relataram que sentiram dificuldades no momento de "escrever matematicamente", buscando se "expressar em palavras":

> Minha maior dificuldade foi exatamente na questão da transformação de dados matemáticos seguindo o rigor. Consigo expressar em palavras, mas não matematicamente. (Aluno 1)

Antes da aplicação das atividades, percebemos através do Questionário Inicial, que os alunos tinham como maior dificuldade a escrita das ideias matemáticas, tanto nas demonstrações densas de simbologia matemática como nas demonstrações mais textuais (aqui, não estamos relacionando uma ou outra à questão de demonstrações mais rigorosas ou mais intuitivas). A dificuldade era, então, expressar as suas idéias "no papel":

> Tenho dificuldade de escrever, colocar no papel o que penso. (Aluno 6 – Questionário Inicial)
>
> Na maioria das vezes é [...] escrever de maneira clara o que estou pensando. (Aluno11 – Questionário Inicial)
>
> Colocar no papel as demonstrações, mesmo notando a veracidade dos fatos; descrever as relações. (Aluno 8 – Questionário Inicial)
>
> Tenho grande dificuldade, escrever é muito difícil. Às vezes, sabemos, mas não conseguimos colocar no papel. (Aluno 4 – Questionário Inicial)
>
> As vezes, não entendo direito como vou escrever aquilo que sei através da prática e transformar em escrita. (Aluno 5 – Questionário Inicial)

No questionário da avaliação das atividades, então, eles relataram que tinham dificuldade de escrever e demonstrar matematicamente (demonstrações densas de simbologia matemática), mas conseguiam se expressar textualmente. Pudemos notar, de nossas observações em sala de aula, que um exemplo dessa situação foram as demonstrações que envolviam sucessores de números naturais. Alguns alunos utilizaram termos como "sucessor de um número" e "sucessor do sucessor de um número", mas nenhum deles utilizou as simbologias "s(n)" e "s(s(n))" com $n \in$ **IN**.

É claro que um Professor de Matemática precisa saber se expressar sobre alguns conceitos não somente utilizando simbologias. Entretanto, também é fundamental para futuros professores dos Ensinos Fundamental e Médio, conhecer profundamente a simbologia matemática, até mesmo como forma de escolher as melhores explicações sobre o que os símbolos matemáticos representam.

Ao analisarmos as respostas dadas pelos alunos às contribuições das atividades para uma ressignificação dos seus conhecimentos em relação aos Conjuntos Numéricos, percebemos uma visão positiva dos mesmos em relação às atividades, mas as respostas infelizmente não contribuíram para a elaboração de categorias significativas, uma vez que foram muito simples e evasivas. A maioria dos alunos respondeu apenas que as atividades contribuíram, havendo poucos destaques dos aspectos ou tópicos do conteúdo. Apenas 3 (três) alunos elaboraram um pouco mais suas respostas:

> Sim, este tipo de trabalho desperta uma outra visão analítica sobre a composição e operações com conjuntos. (Aluno 3)
>
> Sim, pois com os exemplos e atividades foi possível compreender melhor a teoria dos conjuntos. (Aluno 1)
>
> Sim, acho que em todos os aspectos e tópicos, pois percebi que meu desenvolvimento em relação a conjuntos foi surpreendente. (Aluno 4)

Em relação a sugestões de mudança ou acréscimo nas atividades ou na sua forma de realização, na realidade, alguns alunos apresentaram sugestões de continuidade do projeto, apontando como fator positivo a "forma agradável e proveitosa de abordar um conteúdo tão complexo como a Análise Real" (Aluno 3), numa perspectiva muito próxima de Bortoloti (2009). Outro fato destacado foi a abordagem intuitiva e histórica no início de cada atividade:

> Você deve continuar abordando os conteúdos com esta naturalidade, e apresentando a história do surgimento dos conteúdos. (Aluno 1)

Como sugestão de mudança, os alunos foram unânimes em pedir um maior número de exercícios, pois como a média foi de 4 (quatro) exercícios por atividade, não foi possível, segundo eles, uma "memorização dos processos de resolução". Eles queriam que os exercícios seguissem um *modus operandi*, que os permitissem, após a resolução do primeiro exercício, seguir o "mesmo padrão" para os demais.

Entretanto, comparando com disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral (aqui nos referindo a alguns aspectos mais manipulativos), sabemos que em Análise Real a variedade de resolução dos exercícios é maior, basicamente, de demonstrações de propriedades diversas, o que exige uma diversificação de argumentações e uma flexibilidade de pensamento (REIS, 2001). Ademais, o processo "siga o modelo" contradiz a visão de que os exercícios fazem parte do processo de aprendizagem, não servindo apenas como "instrumentos de memorização".

5.4. Analisando o Questionário Final

Em outubro de 2009, foi aplicado o Questionário Final, respondido individualmente, objetivando retomar, de certa forma, questões levantadas no Questionário Inicial, na perspectiva de identificar a importância do rigor matemático para o Professor de Matemática, alguns tópicos dos Conjuntos Numéricos em que a realização das atividades contribuiu para a aprendizagem e ainda, possíveis avanços na superação das dificuldades manifestadas pelos alunos na demonstração de resultados, ao iniciar a disciplina.

Em relação à importância dada, como Professor de Matemática, ao rigor matemático presente nos enunciados e demonstrações de resultados, 11 (onze) alunos conferiram ao rigor um papel muito importante para a sua formação e apenas um aluno afirmou que o rigor não é importante, justificando que às vezes "ele atrapalha e limita o raciocínio e a liberdade de pensar" (Aluno 5).

Dentre aqueles que ressaltaram a importância do rigor, a maioria dos alunos (Alunos 1, 3, 4, 6, 7, 8 e 11) o fez defendendo-o como fundamental para organizar, sistematizar e validar as propriedades matemáticas:

> A presença do rigor matemático no processo ensino/aprendizagem de Matemática, a torna uma disciplina organizada e sistematizada, garantindo credibilidade ao conteúdo proposto. (Aluno 7)

Achamos interessante a relação entre a intuição e o rigor pensada por um aluno ao destacar que "aquilo que vem a fundamentar a intuição é exatamente o rigor!" (Aluno 3). Estaria essa fundamentação, na visão do aluno, atrelada a uma forma de se trabalhar de forma intuitiva, sendo o rigor uma diretriz do processo dessa aprendizagem intuitiva? Difícil de se afirmar com certeza!

Outro grupo de alunos (Alunos 2, 9, 10, e 12) atribuiu ao rigor a função didática de "ensinar" (HANNA, 1989), ressaltando também a utilização do rigor no desenvolvimento do raciocínio crítico do aluno e no seu aperfeiçoamento. Entretanto, houve quem destacasse que:

> Mesmo sendo o rigor de suma importância, devemos a todo momento buscar diferentes formas para transmitir os objetivos tanto nos enunciados como nas demonstrações. (Aluno 2)

Em relação aos principais tópicos de Conjuntos Numéricos para os quais as atividades contribuíram para sua aprendizagem, a maioria dos alunos (Alunos 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11 e 12) afirmou que todo o conteúdo foi elucidado pelas atividades realizadas, justificando que os Conjuntos Numéricos constituem um tema fundamental na prática docente do Professor de Matemática:

> Todos. É fundamental o conhecimento de conjuntos numéricos, eles serão essenciais no cotidiano profissional da educação em Matemática. (Aluno 7)

Percebemos, pelas respostas, que alguns alunos se esquivaram de selecionar os tópicos em que as atividades mais contribuíram para sua aprendizagem, alegando simplesmente que todos os conteúdos são muito importantes e, portanto, devem ser contemplados com a "mesma ênfase".

Um aluno (Aluno 5) destacou a atividade de Números Inteiros, como aquela em que ele sentiu maior dificuldade na resolução dos exercícios. Conjecturamos que isto pode estar relacionado ao fato de que, na atividade de Números Naturais, os 2 (dois) exercícios iniciais eram de demonstração por indução, tema estudado pelos alunos anteriormente e os 2 (dois) últimos eram efetivamente "novidade". Já na atividade de Números Inteiros, todos os exercícios apresentavam novos desafios.

Já outro aluno (Aluno 6) destacou a atividade de Números Irracionais, por tratar de um tópico bastante abstrato. De nossas observações em sala de aula, percebemos essa "abstração" dos números irracionais relacionada à diferença com as atividades anteriores. A atividade de Números Naturais é iniciada relatando o processo de contagem de objetos (abordagem "concreta" para os alunos); a atividade de Números Inteiros trabalha com a ideia de excesso e falta, relacionando-os com os números positivos e negativos (abordagem também "concreta" para os alunos); a atividade de Números Racionais busca relacioná-los com a razão de segmentos (outra abordagem "concreta" para os alunos).

Logo, até então, as atividades tinham um certo cunho "prático" para os alunos, diferentemente da atividade de Números Irracionais, que buscou abordá-los a partir de segmentos incomensuráveis. A questão é que o senso comum aponta para a inexistência de segmentos incomensuráveis, isto é, a grande maioria dos estudantes acredita sempre na possibilidade de existência de um "submúltiplo comum" a quaisquer outros dois segmentos! Aqui, provavelmente, resida a dificuldade de "abstração" levantada pelo aluno.

Finalmente, em relação aos avanços percebidos pelos alunos na superação das suas dificuldades apresentadas inicialmente nas demonstrações de resultados, apenas 3 (três) alunos (Alunos 9, 10 e 12) manifestaram que ainda apresentam as mesmas dificuldades iniciais, relatando possuir uma grande dificuldade com as demonstrações. Uma observação interessante a ser feita nesse caso é de que todos os referidos alunos cursavam o 5º período do curso. Os demais alunos (Alunos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 11) acreditam ter obtido avanços, relatando uma melhoria na escrita das idéias matemáticas utilizadas nas demonstrações e na sua organização. Um aluno afirmou ter sido a primeira vez que pesquisou / estudou a escrita de demonstrações, sinalizando para uma "introdução ao Pensamento Matemático Avançado", com as ideias intuitivas sendo substituídas por (ou evoluindo para) conceitos alicerçados em definições formais (TALL, 1991):

> Pela primeira vez pesquisei a fundo quanto à escrita. Percebi que antes, o medo de errar me impedia de raciocinar harmonicamente, mas agora entendi que a escrita segue um sistema coordenado de ideias que tem que ser rigorosamente obedecidas. (Aluno 5)

Nessa perspectiva, alguns alunos (Alunos 2, 4 e 8) relataram muitas dificuldades iniciais na escrita e, especialmente, nas demonstrações (já destacadas aqui, na análise do Questionário Inicial), mas perceberam sua evolução com o decorrer das atividades. Essas dificuldades iniciais podem estar relacionadas ao processo de formulação da definição conceitual, quando as imagens conceituais normalmente entram em conflito (TALL e VINNER, 1981). A construção da definição conceitual envolve um processo de construção-desconstrução-construção contínua da imagem conceitual, até que ocorra uma acomodação a ponto de permitir a formatação da definição conceitual (VINNER, 1991). Também é um processo natural de evolução para o "Pensamento Matemático Avançado" (TALL, 1991).

Acreditamos que, a partir da presente análise dos nossos dados, podemos elaborar algumas categorizações como forma de conclusão de nossa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> “Um problema que vale a pena ser atacado prova seu valor contra-atacando”.
>
> Piet Hein

Neste momento de conclusão de nossa pesquisa, procuraremos retomar os objetivos inicialmente propostos. Acreditamos que nossa metodologia de pesquisa possibilitou contemplar tais objetivos na medida em que buscamos instrumentos de pesquisa adequados para esse fim. Assim, intentamos:

- Discutir o ensino de Análise Real no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior: Essa discussão foi feita nos Capítulos 1 e 2, os quais podem ser considerados frutos de nossa pesquisa teórico-bibliográfica sobre Educação Matemática no Ensino Superior, destacadamente sobre o ensino de Análise Real. Cabe destacar também que essa pesquisa nos forneceu o embasamento necessário para dar um aporte tanto para a análise dos dados quanto para a análise dos livros didáticos;

- **Analisar livros didáticos de Análise utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática:** Essa análise foi feita no Capítulo 3 e pode ser considerada fruto de nossa pesquisa documental sobre a apresentação e a abordagem dos conceitos de Conjuntos Numéricos, em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática. Cabe destacar que esta análise nos forneceu diversos elementos e ideias para a apresentação de nossa proposta de ensino;

- **Apresentar uma proposta de ensino de Conjuntos Numéricos para disciplinas de Fundamentos de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática:** Essa apresentação foi feita no Capítulo 4 e permitiu a realização de nossa pesquisa de campo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática a partir do planejamento, implementação e avaliação de atividades didáticas sobre Conjuntos Numéricos. Cabe destacar que essa proposta de ensino constitui um produto educacional do nosso mestrado profissional.

A partir de agora, então, tentaremos elaborar um conjunto de respostas à questão que norteou nossa investigação:

Como os Conjuntos Numéricos são apresentados / abordados em livros didáticos de Análise Real utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática e de que forma eles podem ser problematizados / explorados na perspectiva de em ensino que aborde dialeticamente seus aspectos intuitivos e rigorosos?

1. Sobre a apresentação e a abordagem dos livros didáticos de Análise Real

Os livros didáticos aqui analisados não se balizam, de uma maneira geral, por trabalhar "linearmente" todos os Conjuntos Numéricos. Isto talvez se explique pelo fato de que a própria história dos números revela uma construção "não-linear"

Optamos por seguir uma certa linearidade, presente também nos livros do ensino médio, na confecção das nossas atividades e execução dos trabalhos em sala de aula.

Pinto (2009) ressalta o aspecto "impactante" para os alunos de um primeiro curso de Análise Real, no qual os alunos de Licenciatura em Matemática se iniciam na cultura do matemático profissional. Sendo assim, achamos prudente fazer um estudo gradativo dos Conjuntos Numéricos, buscando referenciá-los historicamente, destacando conexões com os aspectos algébricos e, principalmente, considerando os níveis de rigor, sobre os quais dissertaremos a seguir.

2. Sobre a importância dos níveis de rigor no ensino de Análise Real

Considerando a importância do rigor no ensino e na aprendizagem de Análise, consideramos fundamental o papel do professor como mediador na busca do equilíbrio entre rigor e intuição na prática pedagógica. Assim, buscamos iniciar as atividades fazendo uma abordagem histórica e intuitiva, objetivando contribuir para uma reelaboração da imagem conceitual dos alunos; a partir daí, iniciamos um trabalho que pode ser considerado "mais rigoroso", tentando contribuir para uma composição da sua definição conceitual. Entretanto, essa diferenciação não coincide, necessariamente, com a transição "Da intuição... para o rigor!" feita em nossas atividades. Isto porque acreditamos que tal transição deve ser um processo contínuo e dialeticamente construído na prática, pelo professor.

Logo, acreditamos também na influência da forma de se expressar do professor, que deve buscar usar uma linguagem mais próxima do aluno, tanto no que se refere aos aspectos intuitivos, quanto no que se refere aos aspectos rigorosos.

Reafirmamos aqui as ideias defendidas por Reis (2009), de que o rigor deve ser trabalhado em níveis, cabendo ao professor a tarefa de explorá-lo, levando em consideração as diversas componentes do processo de ensino e aprendizagem, tais como os aspectos sócio-histórico-culturais dos alunos, a realidade por eles vivenciadas, a exigência da disciplina ministrada, o nível de ensino (Fundamental, Médio, Superior ou Pós-graduação) e os objetivos e metodologias de cada disciplina. Defendemos, portanto, que o rigor é fundamental no ensino de Análise Real, mas que deve ser buscado de forma gradativa, levando-se em consideração todo o contexto da sala de aula.

3. Sobre a questão da maturidade do aluno de Análise Real

Conforme Moreira, Cury e Vianna (2005), a Análise Real tem a particularidade de se constituir em um espaço de percepção da Matemática como um instrumento de entendimento profundo de certos fenômenos naturais e de aplicações em outras ciências, proporcionando uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da Matemática escolar. Exigem-se, então, habilidades até então pouco exploradas em outras disciplinas do curso de licenciatura e uma certa "maturidade" dos alunos, muitas vezes ainda não consolidada.

Ao submetermos a nossa proposta didática a alunos de diferentes períodos (no caso, 5º e 6º períodos) em uma mesma sala de aula, percebemos diferenças possivelmente influenciadas por essa heterogeneidade. Entre os alunos participantes de nossa pesquisa, todos os 7 (sete) alunos matriculados no 6º período apresentaram uma evolução no "pensar matematicamente" e no "descrever o pensamento matemático", o que pode ser associado a somente 2 (dois) dos 5 (cinco) alunos matriculados no 5º período. Ressaltamos que não foi objetivo da nossa pesquisa, investigar qualitativamente as "diferenças de desempenho" entre tais alunos.

Isto nos leva a sugerir que a disciplina de Análise Real se adequa melhor aos períodos finais do curso, época em que os alunos têm uma maior experiência matemática, adquirida em todas as disciplinas dos períodos anteriores, destacadamente em Cálculo, Teoria dos Números, Estruturas Algébricas e Geometria Euclidiana.

4. Sobre as relações em sala de aula de um curso de Análise Real

Apesar de não ser o objetivo principal desse trabalho, preocupamo-nos com as relações em sala de aula no processo de ensino e aprendizagem, tendo uma atenção especial com o vocabulário usado nas explanações e em conversas informais, dentro e fora do ambiente da sala de aula, para desmistificar, ou pelo menos atenuar, o receio apresentado pelos alunos diante da disciplina de Análise Real, muitas vezes provocadas pelo próprio docente que "mistifica" o seu trabalho. Essa atenção ao vocabulário estava presente também durante as explicações do conteúdo, onde nos pautamos pelo uso de uma linguagem mais próxima do aluno.

Outro destaque foi o posicionamento dos alunos em relação ao seu esforço individual com relação à frequência e ao interesse na implementação das atividades, atitudes essas inerentes ao sucesso de todo o processo de aprendizagem, conforme discutido por Bortoloti (2009), ao investigar as relações entre afeto e cognição em um curso de Análise Real para a licenciatura. A autora nos chamou a atenção para a influência de aspectos emocionais na aprendizagem, corroborando com Lorenzato (2008, pref.) ao afirmar, no prefácio do seu livro, que as motivações da escrita surgiram no "reconhecimento de que a metodologia de ensino empregada pelo professor é determinante para o desempenho dos seus alunos, tanto cognitiva como afetivamente."

5. Sobre algumas críticas e perspectivas futuras

Em relação às críticas apresentadas pelos alunos como "sugestões" de alteração de nossas atividades, concordamos que, de fato, os exercícios devem estar presentes em um maior número; além disso, devem ser elaborados e/ou selecionados de acordo com alguns objetivos pré-estabelecidos, propiciando uma melhor ressignificação do conteúdo. Acenamos com essas sugestões, para futuras pesquisas...

É claro que isto não significa que acreditamos em exercícios elaborados dentro de um "padrão manipulativo" como em outras disciplinas, pois as especificidades da disciplina de Análise Real apontam para uma diversidade de habilidades, com vistas à transição para um Pensamento Matemático Avançado (TALL, 1991).

Esperamos, por fim, que nossa pesquisa contribua para a discussão do trabalho docente com Análise Real e que possa ser fértil na geração de pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. S. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BARON, M.E.; BOS, H.J.M. **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BORTOLOTI, R. D. M. **Afeto e cognição no contexto da disciplina Análise Real no curso de Matemática**. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.** Recife: SBEM, p. 147-167, 2009.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática Bacharelado e Licenciatura.** PARECER CNE/CES Nº 1302/2001.

BURTON, L. **Recognising Comonalities and Reconciling Differences in Mathematics Education.** Educational Studies in Mathematics. Londres, 2002.

CARAÇA, B. J. **Lições de Álgebra e Análise.** Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1959.

CLÍMACO, H. D. A. **Prova e Explicação em Bernard Bolzano**. Cuiabá: UFMT, 2007.

DAVIS, R. B.; VINNER, S. **The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages.** Journal of Mathematical Behavior, n. 5, p. 281-303, 1986.

FERNANDES, A.M.V.; AVRITZER, D.; SOARES, E.F.; BUENO, H.P.; FERREIRA, M.C.C.; FARIA, M.C. **Fundamentos de álgebra**. Belo Horizonte:UFMG, Coleção: Didática 2005.

FIGUEIREDO, D.G. **Análise I.** Campinas: UNICAMP, 1996.

FISCHBEIN, E. **Intuition and Mathematical Education.** Osnabrucker Schriftenzur Mathematik, p.148-176, 1978

GARNICA, A. V. M. **As demonstrações em Educação Matemática: Um ensaio.** In: BOLEMA, n. 18. Rio Claro, p. 91-122, 2002.

GASCHO, J.A. **Lógica formal, lógica dialética e aprendizagem.** In: Revista UNIVILLE, v. 8, n. 2. Joinville, p. 20-25, 2003.

GONÇALVES, H. A. **Jogo, brincadeira ou Geometria**. Juiz de Fora: UFJF, 1999.

GRATTAN-GUINNESS, I. **O que foi e o que deveria ser o Cálculo?** In: Zetetiké, v. 5, n. 7. Campinas, p. 69-89, 1997.

HANNA, G. **Proofs that prove and proofs that explain.** Proceedings of the Tentieth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. III. Paris, p. 45-54, 1989.

JÚDICE, E. D. **Números Reais**. Belo Horizonte: FUMARC, 2007.

KLINE , M. **O fracasso da Matemática Moderna.** São Paulo: IBRASA, 1976.

LANE, S. M. **Responses to Theoretical Mathematics.** Bulletin of the American Mathematics Society, v.30, n.2, p.190-191, 1994.

LIMA, E.L. **Análise Real – Volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1993;

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática.** Campinas: Autores Associados, 2008.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação: Alegorias, tecnologias e temas afins.** São Paulo: Cortez, 2001.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. **Por que Análise Real na licenciatura?** In: Zetetiké, v. 13, n. 23. Campinas, p. 11-42, 2005.

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). **A formação do professor que ensina Matemática: Perspectivas e pesquisas.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAPERT, S. **Mindstroms: Children, computers and powerful ideas**. New York: Basic Books, 1980.

PEREIRA, J. E. **A formação acadêmico-profissional: Compartilhando responsabilidades entre universidades e escolas. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: didática e formação de professores.** In: Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, XIV, Porto Alegre, 2008. Anais… Porto Alegre: ENDIPE, 2008.

PERMINOV, V.Y. **On the realiability of mathematical proofs.** Revue International de philosophie. p.500-508, 1988.

PIERPONT, J. **On the Arithmetization of Mathematics.** Bulletin of the American Mathematical Society, p. 394-406, 1899.

PINTO, M. M. F. **Discutindo a transição dos Cálculos para a Análise.** In: Laudares, J. B.; Lachini, J. (Orgs.) **A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, p. 123-145, 2001;

PINTO, M. M. F **Re-visitando uma teoria: O desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de Análise Real.** In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.** Recife: SBEM, p. 27-42, 2009.

POINCARÉ, H. **Mathematics and Science: Last Essays**. New York: Dover, 1908.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese de Doutorado. Faculdade de Educação – UNICAMP. Campinas, 2001.

REIS, F. S. **Discutindo algumas relações entre a história e o ensino de Análise Matemática: Da Aritmetização da Análise para a sala de aula do Ensino Superior.** In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, IV, Brasília, 2009. Anais... Brasília: SBEM, p. 1-14, 2009.

REIS, F. S. **Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise.** In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.** Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

REIS, F. S.; MASSON, A.B. **A inserção de Tecnologias Informáticas em novas metodologias para o ensino de Cálculo I na Universidade Federal de Ouro Preto.** In: Semana de Iniciação Científica da UFOP, X, Ouro Preto, 2003. Anais... Ouro Preto: UFOP, p. 1-10, 2003.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. **Números Reais: Concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura.** In: Zetetiké, v. 7, n. 12. Campinas, p. 95-117, 1999.

TALL, D. O. **The Psichology of Advanced Mathematical Thinking.** In: TALL, D.O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 3-21, 1991.

___________ **The transition to the Advanced Mathematical Thinking: Functions, limits, infinity and proof.** In: GROWS, D. A. (Ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan, p. 495-511, 1992.

TALL, D. O.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity.** Educational Studies in Mathematics, n. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. **The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics.** In Tall, D. O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 65-81, 1991.

ZAIDAN, S. **Breve panorama da formação de professores que ensinam Matemática e dos professores de Matemática na UFMG**. In: Zetetiké, v. 17, Número Temático. Campinas, p. 37-56, 2009.

ZUFFI, E. M. **Uma Seqüência Didática Sobre "Funções" Para A Formação de Professores do Ensino Médio**. IN: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM-2004, Recife, Pernambuco. Anais.