DANIEL GUSTAVO DE OLIVEIRA

EXPLORANDO O CONCEITO DE DERIVADA EM SALA DE AULA, A PARTIR DE SUAS APLICAÇÕES E SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA.

OURO PRETO
2011

DANIEL GUSTAVO DE OLIVEIRA

EXPLORANDO O CONCEITO DE DERIVADA EM SALA DE AULA, A PARTIR DE SUAS APLICAÇÕES E SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel.

OURO PRETO
2011

O482e Oliveira, Daniel Gustavo de.
Explorando o conceito de derivada em sala de aula, a partir de suas aplicações e sob uma perspectiva histórica [manuscrito] / Daniel Gustavo de Oliveira. – 2011.
viii, 78 f.: il. color; grafs.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática - História - Teses. 3. Cálculo diferencial - Estudo e ensino - Teses. 4. Ensino superior - Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

CDU: 517.22:378.147

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EXPLORANDO O CONCEITO DE DERIVADA EM SALA DE AULA, A PARTIR DE SUAS APLICAÇÕES E SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA.

Autor: Daniel Gustavo de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel

____
Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel – UFOP -Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – UFOP

____
Prof. Dr. Wagner Lannes - UFVJM

2011

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família Andréia e Gustavo, em especial ao meu pai Airton, à minha mãe Tânia, ao meu padrasto Alberto Perotti, ao meu irmão Diego e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me deu força e coragem para realizar este e todos os projetos de minha vida.

Ao Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel, pela orientação ao longo desta pesquisa e o apoio durante o Curso de Mestrado em Educação Matemática.

Ao Prof. Alberto Ramos Perotti que foi meu primeiro incentivador durante o Curso de Licenciatura em Matemática, e pelo apoio dado no Mestrado em Educação Matemática.

Aos demais professores do Curso de Mestrado em Educação Matemática pelo incentivo nesta pesquisa.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho, em especial a minha esposa Andréia e meu filho Gustavo, aos meus amigos Vitor, Marleane, Davis, Cristiane e meu sobrinho Davi.

Aos professores Frederico da Silva Reis e Wagner Lannes, por aceitarem nosso convite e pelas contribuições na qualificação.

Aos meus amigos de turma pelos momentos que partilhamos, em especial Osvaldo (Osvaldim Careca), Kelly (loira) e Lílian, que se tornaram, nesse pequeno e intenso período, verdadeiros amigos.

RESUMO

Este trabalho apresenta alguns métodos elaborados por eminentes matemáticos, como Fermat, Barrow, Newton e Descartes, para a determinação do conceito de derivada, a partir da reta tangente a uma curva em um dado ponto. O objetivo principal é favorecer a compreensão deste conceito, utilizando a Educação **pela** História da Matemática. Para tanto, foi construída uma sequência de ensino aplicada a um grupo de 38 alunos dos cursos de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto. Os resultados estiveram de acordo com a opinião do pesquisador e ao final quando foi apresentado um questionário de avaliação respondido pelos participantes, verificou-se que a maioria apreciou o trabalho, reforçando a idéia de que realmente a intervenção Histórica na Educação Matemática pode motivar e facilitar o aprendizado.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Cálculo. Educação Matemática. História da Matemática. Ensino Superior.

ABSTRACT

This paper presents methods created by eminent mathematicians such as Fermat, Barrow, Newton and Descartes to the determination of the derivative of the tangent line of a curve through a given point. The main objective is to facilitate the comprehension of the concept which is currently presented in a more elaborate manner than that of the mentioned mathematicians. For that, a sequence of applied teaching was built with a group of 38 students of Mathematics and Statistics of the Universidade Federal Ouro Preto. The results were supportive of the researcher opinion and at the end, when an evaluation questionnaire was presented to the participants, most of then showed appreciation for the work and decided that a Historical intervention of the Mathematics Education can really motivate and transform the learning process into an easier one.

KEYWORDS: Teaching of Calculus — Mathematics Education – Mathematics History - Higher Education.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - Introdução

1.1 - Breve Histórico

Neste item apresento um breve histórico de minha experiência no ensino da Matemática e a estrutura deste trabalho.

Iniciei minha carreira no magistério já no período em que cursava a graduação em Matemática. Sem muita orientação pedagógica, repetia os procedimentos da maioria dos meus professores.

As aulas seguiam sempre a mesma rotina: definição, exemplos, propriedades, aplicações e atividades de fixação. As atividades tinham também sua rotina própria. Variavam gradativamente das mais elementares às mais complexas e, em cada etapa, eu resolvia algumas como modelo e os alunos se encarregavam de outras semelhantes.

As avaliações eram elaboradas com base nessas atividades e qualquer solicitação que exigisse alguma criatividade recebia críticas: “Você não ensinou isto!”.

Os alunos se preparavam para a prova e conseguiam alcançar nota suficiente para a aprovação, mas, quando aquele mesmo conteúdo era solicitado mais adiante ou no semestre seguinte, a maioria não se lembrava de nada, esta situação parece que vem piorando, hoje em dia os alunos nem sequer se preparam para a prova.

Existiam, no entanto, alguns poucos que conseguiam dar conta do trabalho, e acabei percebendo que estes gostavam da Matemática, ainda que ela fosse ensinada da maneira aqui descrita, afinal, eu também gostava e tinha aprendido da mesma forma.

Acreditava que esse tipo de ensino não era produtivo. Explicava algum conteúdo para poucos alunos que provavelmente aprenderiam, mesmo sem a minha intervenção. Os demais passariam a vida toda sem saber Matemática e, certamente, procurariam profissões que não envolvessem essa área do conhecimento.

A falta de interesse e, consequentemente, a falta de motivação para o aprendizado da Matemática eram problemas cuja solução dependia de fatores que eu não podia controlar. Mesmo assim procurei minimizá-los, pensando da seguinte maneira: “se vários professores procurarem, de alguma forma, motivar um número maior de alunos, vamos aumentar o contingente daqueles que poderão incorporar a Matemática à sua formação geral”.

Esta busca continua e percebo que vai continuar para o resto da minha vida, mas a minha postura mudou.

Passei a analisar melhor os livros didáticos que iria adotar, preocupando-me mais com os aspectos pedagógicos, e tomei conhecimento de que um grande grupo de professores tinha preocupações semelhantes. Procurei então o curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

No decorrer do curso, percebi que grande parte da falta de motivação dos alunos vinha do fato de eles não conhecerem os conceitos envolvidos. Eu também tinha dificuldades nesses conceitos matemáticos, pois me preocupava mais com os modelos e exemplos, e acabava mecanizando as soluções sem saber direito o que estava fazendo.

Um desses conceitos era o de derivada. Eu sabia as regras de derivação, memorizava a tabela das derivadas elementares e conseguia derivar funções complicadíssimas; mas não tinha condições de interpretar os resultados encontrados.

Aprendi na Graduação que a operação de Integração era a inversa da Derivação e, então, da mesma forma mecânica, passei a integrar funções, novamente sem entender o que realmente estava fazendo.

Veio então meu interesse em estudar detalhadamente esses conceitos e me propus a elaborar um trabalho sobre o Ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Comecei a fazê-lo no curso de Especialização, e logo fui aconselhado pelo meu orientador a escolher apenas um tema, ou seja, a elaboração de um conceito, que uma vez estudado, poderia se estender para uma dissertação de mestrado.

Escolhi a derivada e escrevi este trabalho, com o intuito de apresentar a minha contribuição para a facilitação do aprendizado deste conceito em novas pesquisas.

O Cálculo pode ser apresentado aos alunos de forma mais eficiente e prazerosa, não só destacando os seus conceitos com o devido rigor, mas também analisando as perspectivas históricas em que estas idéias apareceram, para que fiquem mais claras as aplicações que provenieram destes conceitos.

Para compreender esses conceitos é importante conhecer suas razões históricas. Um exemplo disso é a idéia de derivada, que apareceu muito antes (século XVII) que a de limite (século. XVIII) e, no entanto, hoje definimos a derivada a partir do conceito de limites.

> A derivada foi inventada no século XVII, através de vários problemas particulares, que eram resolvidos um a um, separadamente, até que, pelo final do século, foi-se percebendo que havia um elemento comum em todos eles. Durante todo esse século, e em boa parte do século seguinte, não havia o conceito de limite. Newton falava em quantidades evanescentes, ora tratadas como nulas e desprezíveis, ora

> tratadas como inferiores a qualquer quantidade positiva. Leibniz (1646-1716) fazia algo parecido, com notação mais apropriada. D'Alembert (1717-1783) foi o primeiro a interpretar a derivada como limite, isto lá pelos meados do século XVIII, quando os métodos do Cálculo já estavam bem desenvolvidos, graças aos esforços de vários sábios, dentre os quais se destacam Jacques Bernoulli (1654 – 1705), Jean Bernoulli (1667 – 1748), Daniel Bernoulli (1700 – 1782) e Euler (1707 – 1783). Limite mesmo, numa teoria bem estruturada e útil ao desenvolvimento da Análise Matemática, isso só foi acontecer a partir de 1815. (ÁVILA, 2007, p.171)

A Matemática é ensinada de acordo com uma sequência Lógica, adaptada ao rigor da ocasião (nem sempre este rigor é o mesmo, a medida que o desenvolvimento da Matemática acontece, o rigor vai se tornando mais elaborado). No entanto, as idéias Matemáticas não apareceram no transcorrer da História já "arrumadas" nesta estrutura Lógica, vários estudiosos apresentaram resultados que posteriormente foram organizados.

> Deve-se a Cauchy (1789 – 1857) grande parte da abordagem do cálculo apresentado nos atuais textos universitários, como os conceitos básicos de limite e continuidade. (EVES, 2004, p. 531)

Não seria melhor apresentarmos inicialmente o conceito dentro de uma abordagem histórica para depois justificá-lo pelo rigor, mostrando que foram necessários mais de cem anos para que isso realmente acontecesse?

Com a perspectiva adotada nesta pesquisa, uma interpretação geométrica adequada do conceito de derivada vai proporcionar ao aluno de Cálculo, uma visão mais abrangente sobre esse assunto, bem como poderá auxiliá-lo no entendimento de outros temas.

Estas são as questões que motivaram o desenvolvimento desta pesquisa sobre o ensino do conceito de derivada dentro de uma perspectiva histórica.

No próximo item, faço algumas apreciações sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, com base em minha experiência como aluno dessa disciplina e, posteriormente, como professor.

1.2 - Um pouco sobre o ensino de Cálculo

O Cálculo Diferencial e Integral, em geral, é a primeira disciplina com características de Matemática Superior que o aluno de um curso da área de Ciências Exatas encontra ao entrar para a Universidade.

Por estar acostumado a estudar a Matemática a partir de “modelos”, ele começa a estranhar o fato de precisar compreender determinados significados bastante abstratos, tais como os conceitos de Função, Limite, Continuidade etc., para então utilizá-los na compreensão das derivadas e integrais.

O Ensino da Matemática passa muito bruscamente dos aspectos intuitivos, com os quais o aluno estava largamente acostumado, para considerações teóricas e abstratas, o que justifica a dificuldade em se compreender conceitos.

> No Brasil, o ensino do Cálculo tem sido responsabilizado por um grande número de reprovações e de evasões de estudantes universitários. É comum em nossas universidades a reclamação, por parte dos alunos ou por parte dos professores de outras áreas, da inexistência de esforços para tornar o Cálculo interessante ou útil. (MEYER e SOUZA JÚNIOR, 2002, p.121).

O processo de ensino e aprendizagem do Cálculo tem motivado estudos por parte de vários teóricos da Educação Matemática, na tentativa de diminuir o expressivo número de reprovações nessa disciplina, em quase todas as Instituições de Ensino Superior.

Ainda que existam vários motivos para essas reprovações, as principais pesquisas apontam para o tratamento dado aos conceitos envolvidos e para a prática pedagógica dos professores que ministram esses conteúdos.

Mendes (1994), estudando problemas de aprendizagem do Cálculo na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), destaca as causas dos insucessos que, segundo esse autor, podem ser atribuídos:

> - Ao aluno, porque não possuía a base necessária para o acompanhamento da disciplina de Cálculo;
> - À falta de recursos na universidade, principalmente material bibliográfico e espaço físico, contribuindo para a formação de turmas numerosas e heterogêneas;
> - Ao desempenho dos professores, isto é, à falta de competência técnico-pedagógica para desenvolver suas atividades de acordo com a realidade que se apresenta. (MENDES, 1994, p. 7)

Outro destaque interessante vem de Meyer (2003, p. 14), que também traz uma consideração importante ao retratar o tratamento dado pelo aluno aos conceitos abstratos do Cálculo. Segundo essa autora, os estudantes apresentam muitas dificuldades para compreender os conceitos abstratos de taxa de variação, limite, tangente e funções.

Cabe ainda outro destaque apontado por Meyer (2003, p 14.). A facilidade que os estudantes normalmente demonstram com o aspecto “algorítmico” do cálculo da derivada. Segundo a autora, os cálculos de derivada de funções usando as regras de derivação são facilmente assimilados pelos alunos, que costumam aplicá-los corretamente. Isso acontece, talvez, pelo fato de essas aplicações aproximarem-se da forma com que o aluno aprendeu Matemática durante o Ensino Fundamental e Médio, baseada em regras de memorização de conceitos.

Percebemos, em nossa experiência inicialmente discente e depois docente, que o conceito de derivada é trabalhado em sala de aula, sem muito rigor. Mesmo a definição que envolve o “limite do quociente”, muitas vezes, é deixada de lado, para em seguida serem apresentadas as regras de derivação, ora demonstradas precariamente, a partir da definição, ora apenas relacionadas por uma tabela.

> Tenho observado que muitos de nossos alunos, após cursarem a disciplina de Cálculo I, são capazes de determinar a função derivada de diversas funções, utilizando-se de regras e procedimentos algébricos, ou mesmo, de reproduzir a definição formal de derivada de uma função. Mas, frequentemente, produzem significados para este conceito que não são compartilhados pela comunidade matemática e, portanto, não correspondendo aos significados pretendidos pelo sistema educacional. (MEYER, 2003, p. 4)

Corroborando com as idéias de Meyer (2003) de que os alunos sabem calcular a derivada mas não produzem significados corretos do conceito de derivada, propomos neste trabalho contribuir para um melhor entendimento desse conceito, inserindo aspectos históricos e métodos antigos, usados por determinados matemáticos do século XVII. A seguir abordaremos um pouco das aplicações desse conceito de derivada.

1.3. Um pouco de história das aplicações do Cálculo

No Ensino Superior, podemos destacar as várias aplicações do conceito de derivada como taxa de variação. Segundo Dall’nesse (2000) diversas áreas do conhecimento utilizam a derivada como ferramenta para resolver fenômenos que envolvam taxa de variação:

> Pode-se citar, por exemplo, a Biologia, em que a derivada se aplica na pesquisa da taxa de crescimento de bactérias de uma cultura; na Eletricidade, para descrever a variação da corrente num circuito elétrico; na Economia, para estudar a receita, o custo e o lucro marginal. Na Física, o conceito de derivada está presente em problemas que necessitam definir velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva: a primeira refere-se à medida de variação da distância percorrida em relação ao tempo, e a segunda refere-se à medida de variação da velocidade. (DALL'NESSE, 2000, p. 12)

Sobre as aplicações do Cálculo, Bos & Baron (1985) revelam que as técnicas do Cálculo foram elaboradas para resolver problemas do século XVII e século XVIII, e que a maioria desses problemas não era especificamente de matemática pura, mas envolviam aspectos da teoria mecânica com muita complexidade. Esses problemas serviram para o desenvolvimento tanto da teoria mecânica quanto da análise.

> A lista de problemas aos quais o cálculo pode ser aplicado estendeu-se muito mais. Problemas de navegação, por exemplo, estimularam estudos analíticos em astronomia para fornecer melhores tábuas de navegação, estimulando também estudos sobre métodos para se determinar o curso mais vantajoso para um navio com relação ao vento e à corrente. Estudos hidrodinâmicos foram inspirados pelos problemas do movimento da água em rios e canais. A construção naval sugeriu questões de estabilidade de corpos flutuantes e sobre a forma de navio que encontraria a menor resistência ao mover-se pela água. Em óptica, os efeitos de refração e reflexão em lentes e espelhos curvos puderam ser estudados por meio do cálculo. A artilharia pedia estudo das trajetórias de projéteis através do meio aéreo resistente. Em resumo, havia uma grande variedade de problemas, desde os mais teóricos até os mais práticos, entre os quais se incluíam alguns cuja solução teve resultados práticos (como as tabelas lunares para a navegação), e também alguns cujo tratamento permaneceu totalmente acadêmico, não trazendo nenhuma contribuição ou orientação (pelo menos, durante muito tempo) para a parte prática de onde surgiam tais problemas (por exemplo, a corda vibrante). (BOS, 1985, p. 37-38)

A História da Matemática neste trabalho será utilizada preferencialmente para favorecer o aprendizado, no entanto, não é possível deixar de lado algumas aplicações dos conceitos estudados, uma vez, que elas não só justificam o estudo, como também facilitam a aquisição do conceito.

Faremos agora uma breve apresentação deste trabalho juntamente com sua estrutura.

1.4 – Apresentando a pesquisa

Apresentamos agora os princípios básicos norteadores deste trabalho.

1.4.1– Questão de investigação

Como o conceito de derivada pode ser explorado a partir do uso da História da Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral?

1.4.2 – Objetivos e hipótese de trabalho

- Contribuir para a discussão sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a partir de seus fundamentos epistemológicos relacionados ao conceito de derivadas;

- Apresentar uma proposta de ensino que permita explorar o conceito de derivadas, dentro de uma perspectiva histórica.

Baseamos nossa pesquisa na seguinte hipótese de trabalho:

Embora as modernas tendências em Educação Matemática orientem o uso da História da Matemática no Ensino de Matemática, acreditamos que isso não esteja sendo feito de fato, tanto em alguns livros didáticos, quanto pelos professores em sala de aula.

Como a utilização da História da Matemática pode contribuir para o Ensino de Matemática?

1.4.3 – Metodologia de pesquisa – Pesquisa Teórico-bibliográfica sobre História da Matemática, História do Cálculo e Ensino de Cálculo;

1.4.4 – A pesquisa de campo – Pesquisa de Campo com alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Estatística da UFOP, a partir da elaboração e aplicação de uma sequência de atividades baseada em métodos históricos, determinados por matemáticos do século XVII, mais precisamente, Fermat, Barrow, Newton e Descartes.

Posteriormente solicitamos aos participantes que respondessem a um questionário que destacava a sua opinião sobre a validade do processo. Em outro local deste trabalho (capítulo 4) analisaremos as respostas apresentadas no referido questionário.

1.4.5 – Estrutura

Nosso trabalho está estruturado da seguinte maneira:

- Capítulo1: apresento um breve histórico e um pouco da metodologia deste trabalho;
- Capítulo 2: fazemos um levantamento histórico dos conceitos de Cálculo, especificamente sobre derivadas, mostramos os métodos históricos de alguns matemáticos do século XVII e apresentamos o conceito de reta tangente;
- Capítulo 3: relatamos a metodologia de pesquisa e a justificativa sobre o uso da História da Matemática na Educação Matemática;
- Capítulo 4: apresentamos a sequencia de ensino e analisamos os dados.
- Capítulo 5: apresentamos as considerações finais.

Dentro dessa perspectiva, acreditamos que o ensino do conceito de derivada, a partir de uma visão histórica, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem, tornando-o mais prazeroso para os alunos e ressaltando o desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

CAPÍTULO 2 – A determinação da tangente a uma curva qualquer

Neste capítulo abordaremos o conceito de reta tangente e fazemos um levantamento histórico do conceito de derivada.

2.1 - Uma breve incursão pela História do Cálculo

> O Cálculo foi moldado no século XVII, com as figuras de Newton e Leibniz. (Dirk Struik)

A palavra "cálculo" é o diminutivo de calx, do latim, que significa "pedra". Mas, qual é a relação dessa palavra com a Matemática? Será que o Cálculo pode ser considerado uma pedra no ensino da Matemática?

A semente do Cálculo Integral já existia na matemática grega, principalmente nos trabalhos de Eudóxio[1] e Arquimedes[2].

Deve-se a Eudóxio a criação de uma teoria das proporções que constitui a base do livro V dos elementos de Euclides e também os fundamentos do chamado *Método de Exaustão*, largamente utilizado por Arquimedes e que representa a primeira semente do Cálculo Integral.

O trabalho de Eudóxio sobre a teoria das proporções, de certa forma, explicou a grande dúvida dos Pitagóricos quanto à existência dos números irracionais.

> Tão ou mais importante que sua Teoria das Proporções foi o tratamento dado por Eudóxio ao chamado **Método da Exaustão**. Naquela época, os geômetras gregos já haviam conjecturado que imaginar o círculo como sendo o limite ao qual tende uma família de polígonos inscritos (ou circunscritos), cujo número de lados tende ao infinito, era o caminho para a determinação da área e do perímetro daquela figura delimitada por uma linha curva. Tal conjectura já teria sido levantada por Briso, um jovem aluno de Pitágoras e, certamente, o foi pelo filósofo Ântifon (circa de 430 a. C), contemporâneo e amigo de Sócrates. Dizia-se, então, que, inscrevendo-se um polígono em um círculo, ficaria caracterizada uma diferença entre as áreas das duas figuras e que tal diferença poderia ser sucessivamente diminuída, à medida que o número de lados do polígono fosse sendo aumentado.

---

[1] Eudóxio viveu no século IV a.C. Parece que seu primeiro mestre foi Arquitas de Tarento, um neo-pitagórico. Posteriormente estudou em Atenas, na Academia de Platão. Exerceu a Medicina por algum tempo em Atenas e depois viajou para o Egito. Na volta estabeleceu-se em Cízico na Ásia Menor. (BOYER, 1974, p. 66)

[2] Arquimedes (287 a.C – 212 a.C) nasceu em Siracusa e permaneceu nesta cidade durante toda a sua vida, só se ausentando por um pequeno período quando estudou em Alexandria. É considerado o maior matemático e físico de toda a Antiguidade. (BOYER, 1974, p. 89)

> Mas era preciso prová-lo. Para tanto, Eudóxio demonstrou, com base em seu postulado (a prova encontra-se na proposição X-1, dos elementos de Euclides), que **dadas duas grandezas da mesma espécie, A e ε, sendo ε tão pequeno quanto quisermos, se subtrairmos de A uma quantidade não inferior à sua metade, do resto outra quantidade não inferior à metade deste e assim por diante, chegar-se-á, finalmente, a um resto menor do que ε.** (GARBI, 2006, p.46, grifo do autor.)

Foi com base nesse método que Eudoxio determinou a área do círculo e o perímetro da circunferência considerando uma família de polígonos inscritos ao mesmo.

> Esse processo de reduzir tanto quanto quisermos as diferenças entre um comprimento, uma área ou um volume **desconhecidos** e, respectivamente, famílias de comprimentos, áreas e volumes **conhecidos** recebeu o nome de **Método da Exaustão**. O círculo (perímetro e área) é exaurido por uma família de polígonos, o volume do cilindro o é pelos volumes de uma família de prismas, o do cone o é pelos de uma família de pirâmides, etc. (GARBI, 2006, p.47, grifo do autor.)

A contribuição de Arquimedes ao Cálculo Integral deve-se ao uso habilidoso que fez do *Método da Exaustão*, com o qual calculou pela primeira vez áreas e perímetros de algumas figuras cujos lados são curvas.

Os conceitos de derivada e diferencial, obviamente, não estavam presentes na Grécia. Na primeira metade do século XVII, dois grandes matemáticos franceses, Fermat[3] e Descartes[4], criaram a Geometria Analítica. Inicialmente eles não usaram os eixos coordenados como hoje são conhecidos, mas essa ideia já estava presente, de forma implícita, na obra de Apolônio.

Uma aplicação prática da Geometria Analítica aparece no urbanismo, principalmente no planejamento de várias cidades gregas e romanas, nas quais as ruas obedecem uma distribuição quadriculada. O plano de Alexandria, por exemplo, obra do arquiteto grego Dinocratesse desenvolvido a partir de dois eixos monumentais, com as ruas dispostas perpendicularmente a eles, como se fosse um grande tabuleiro

---

[3] Pierre de Fermat (1601-1665) viveu e estudou em Toulouse, onde exerceu o cargo de Juiz. É considerado o maior dos matemáticos amadores. Ficou famoso o seu teorema que por mais de 300 anos desafiou grandes matemáticos posteriores a ele. Os seus estudos em Geometria ofereceram elementos não só para a criação da Geometria Analítica, como também para o Cálculo Diferencial e Integral. (BOYER, 1974, p. 253)

[4] René Descartes (1596-1650) durante sua vida exerceu várias atividades, inclusive como soldado mercenário do exército holandês, mas sua verdadeira vocação era para a Filosofia e a Matemática. Juntamente com Fermat contribuiu para o surgimento da Geometria Analítica e do Cálculo. (BOYER, 1974, p. 245)

quadriculado. Provavelmente uma das principais preocupações ao criar a Geometria Analítica era a de utilizar a Álgebra, que dava seus primeiros passos com o trabalho dos matemáticos do Renascimento, aplicando-a a problemas geométricos.

O desenvolvimento da imprensa com a utilização de tipos móveis por Gutemberg, a partir de 1447 (data do 1° livro impresso), permitiu a divulgação de muitas obras da Matemática da Antiguidade e um número grande de pessoas, em vários países, começou a se interessar pelo assunto.

Não havia ainda organizações de matemáticos profissionais, mas começaram a surgir grupos de estudiosos que apresentavam seus problemas para que os outros membros pudessem colaborar nas soluções.

Na França, formou-se um grupo ao qual pertenciam Fermat e Descartes e que contava também com a participação de um frade chamado Marin Mersenne[5]. Foi praticamente pelos trabalhos dos membros desse grupo que apareceram as idéias básicas do que hoje se conhece como Geometria Analítica.

Com essa nova ferramenta, esses dois grandes matemáticos, como também outros que pertenciam ao grupo de Mersene puderam atacar com sucesso problemas que ainda estavam em aberto. Dentre essas questões, estavam à determinação da tangente a uma curva qualquer e o cálculo de máximos e mínimos de curvas polinomiais.

Fermat resolveu este último de forma muito elegante. Para compreendê-lo, tome como exemplo, a curva dada pela equação $y = 2x^3 -5x^2 + 4x – 7$.

Se x é um ponto da curva, um ponto vizinho de x tem abscissa $x + E$, logo, a ordenada correspondente é:

$$y_1 = 2 (x + E)^3 -5 (x + E)^2 + 4 (x + E) – 7$$

Como o ponto é de máximo ou de mínimo e E é muito pequeno, podemos considerar $y_1 = y$, conforme justifica Eves (2004).

> Kepler observou que os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo comum. Fermat transformou esse fato num processo para determinar esses pontos de máximo ou de mínimo. Esse método será considerado aqui em poucas linhas. Se f(x) tem um máximo ou um mínimo comum em x e se *e* é muito pequeno, então o valor de f(x-*e*) é quase igual ao

[5] Mersenne (1588-1648) não foi um matemático de grandes criações, mas é muito importante o seu papel de “despachante” de correspondência. Muito ligado a Fermat e Descartes, ele não só levava a um os resultados do outro, como também divulgava seus estudos a toda uma comunidade de matemáticos europeus. (BOYER, 1974, p. 245)

> de f(x). Portanto, pode-se experimentar fazer f(x-*e*) = f(x) e, para tornar essa igualdade correta, impor que *e* assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais f(x) assume um máximo ou um mínimo. (EVES, 2004, p. 429)

Assim, temos: $2(x + E)^3 - 5(x + E)^2 + 4(x + E) - 7 = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$

$$\Rightarrow \cancel{2x^3} + 6x^2E + 6xE^2 + 2E^3 \cancel{-5x^2} - 10xE - 5E^2 + \cancel{4x} + 4E \cancel{-7} \cancel{-2x^3} \cancel{+5x^2} \cancel{-4x} \cancel{+7} = 0$$

$$\Rightarrow 6x^2E + 6xE^2 + 2E^3 - 10xE - 5E^2 + 4E$$

$$\Rightarrow (6x^2 - 10x + 4)\,E + (6x - 5)E^2 + 2E^3 = 0$$ Dividindo tudo por E, temos:

$$\Rightarrow (6x^2 - 10x + 4) + (6x - 5)E + 2E^2 = 0$$ Como $E \to 0$, vem:

$$\Rightarrow 6x^2 - 10x + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

Que são os valores encontrados quando fazemos a Derivada da função igual a zero.

De fato, de acordo com as técnicas modernas,

$y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7 \Rightarrow y' = 6x^2 - 10x + 4.$

$$6x^2 - 10x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Por essa utilização Laplace considera Fermat o criador do Cálculo Diferencial.

Os métodos para estudar retas tangentes que levaram ao conceito moderno de derivada, tanto em Descartes como em Fermat estavam baseados na idéia de “infinitamente pequeno”.

Alguns matemáticos consideravam que uma curva é formada de segmentos de reta, infinitamente pequenos, e sustentavam que a reta tangente a um ponto é a extensão de um desses segmentos. Outros afirmavam que as retas tangentes são as que passam por dois pontos infinitamente próximos na curva.

Os cálculos algébricos baseados nessas idéias envolveram infinitesimais, isto é, quantidades que são infinitamente pequenas, mas, não nulas.

Dentre as várias críticas aos "novos métodos", surgidas no século XVII, destacam-se as do bispo e filósofo George Berkeley (1685 – 1753), registradas no seu livro "O Analista" de 1734 que tem um subtítulo bastante longo e explicativo:

> Um discurso dirigido a um matemático infiel[6], onde se examina se o objeto, princípios e inferências da Análise Moderna são concebidos mais claramente ou são deduzidos com maior evidência que os mistérios e pontos da fé da religião. Primeiro tira tranca de teu olho; e então verás claramente para tirar o argueiro do olho do teu irmão. (BERKELEY apud BOYER, 1974 p. 316)

Berkeley não negava a teoria dos fluxões de Newton, nem os resultados obtidos empregando tais técnicas, mas tinha críticas bastante fundamentadas. Ele dizia que os matemáticos primeiro assumem que são dados incrementos às variáveis e depois retiram esses incrementos supondo que sejam nulos.

> E o que são esses fluxões? As velocidades de incrementos evanescentes. E o que são esses incrementos evanescentes. Não são nem quantidades finitas, nem infinitas, nem nada. Não poderíamos chamá-las de fantasmas de quantidades que se expiraram? (BERKELEY apud BOYER – 1974 p.316)

O uso dos infinitesimais foi desenvolvido até a operação geral conhecida hoje como derivação, na Inglaterra, por Newton[7], por volta de 1660 e, de modo independente, na Alemanha, por Leibniz[8], em 1670.

Os trabalhos de Newton só foram publicados depois de 1670, enquanto Leibniz publicou os seus de imediato, fatos que contribuíram para a polêmica que se criou sobre

---

[6] O "matemático infiel" era um grande amigo de Newton, Edmund Halley (o que deu nome ao cometa). Halley como livre pensador que era, havia convencido um individuo da não existência de Deus, e por essa razão Berkeley não pôde administrar a ele os sacramentos na hora da morte. (BOYER, 1974, p. 316)

[7] Isaac Newton (1645 – 1727) estudou e depois foi professor na Universidade de Cambridge. É considerado um dos maiores gênios de todos os tempos. Além de ser um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral tem trabalhos relevantes em outros campos da Matemática e também da Física. (BOYER, 1974, p. 287)

[8]Gottfried Leibniz (1646 – 1716) aos 12 anos, já dominava o grego e o latim, além de todos os conhecimentos correntes da época em Matemática, Teologia, Filosofia e Direito. Quando, por sua pouca idade, a Universidade Leipzig, cidade onde nasceu, lhe negou o título de Doutor, ele mudou-se para Nuremberg e aí escreveu um brilhante trabalho sobre o ensino das leis pelo método histórico. Daí em diante seguiu a carreira diplomática, atividade que lhe proporcionou tempo para escrever uma quantidade imensa de artigos sobre os mais variados assuntos. (BOYER, 1974, p. 292-293)

o verdadeiro criador do Cálculo. Parece que os dois brilhantes matemáticos chegaram a esses resultados de forma independente.

No que diz respeito às notações adotadas, Leibniz teve mais êxito que Newton, por essa razão seus trabalhos foram mais lidos e compreendidos e, a partir daí, vários matemáticos conseguiram resolver problemas que se encontravam em aberto até então.

2.2 – O conceito de tangente

A reta tangente à circunferência aparece em Euclides, mais precisamente no livro III, na definição 2: *"Uma reta que, tocando o círculo e sendo prolongada, não o corta, é dita ser tangente ao círculo"*.(BICUDO, 2009, p.151)

Essa definição certamente não serve para a definição de reta tangente a uma curva qualquer, neste caso, não se pode dizer que a tangente é uma reta que encontra a curva em um único ponto.

Observe, na figura 1, uma reta r que encontra a curva num único ponto, mas não é tangente a ela. Já na figura 2, observe que a reta s encontra a curva em vários pontos, sendo tangente no ponto P.

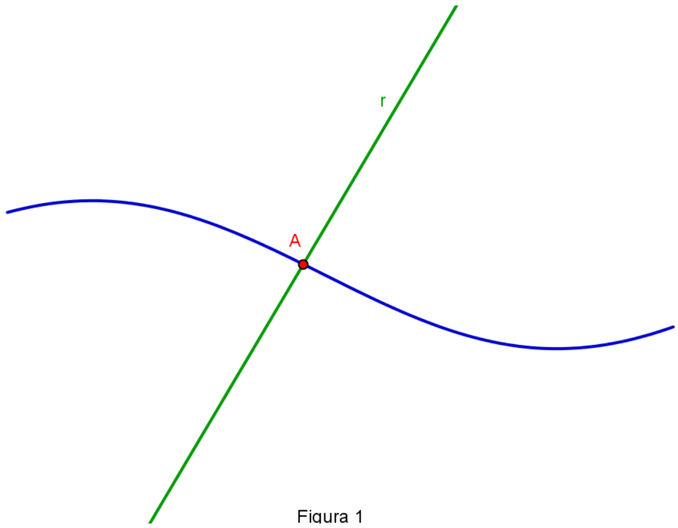


Figura 1

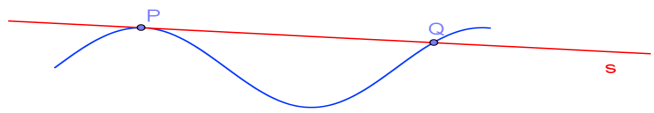


Figura 2

Tudo leva a crer que os gregos não conheciam muitas curvas. Euclides estudou a circunferência. Mais tarde Apolônio trabalhou com as cônicas e Arquimedes com a espiral que leva seu nome.

Podemos considerar Arquimedes como o matemático mais criativo de toda a Antiguidade e um dos maiores de todos os tempos, mas quem recebeu o título de “O grande geômetra” foi Apolônio, uma vez que ele se preocupou com os problemas mais complexos.

Muitas das obras de Apolônio não chegaram até nós. Dentre as que se perderam, existe uma que se chamava “Tangências.” Papus, um dos mais importantes matemáticos posteriores a Apolônio, comentou a obra dizendo que ela se compunha de dois livros e tratava basicamente do seguinte problema: “Dadas três coisas, cada uma das quais podendo ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, traçar uma circunferência que seja tangente às três coisas”. Sabe-se também que Apolônio sabia traçar a tangente a qualquer cônica, mas não existe referência de que ele tenha determinado algum processo para traçar a tangente a uma curva qualquer.

Arquimedes, no seu trabalho “Sobre Espirais”, faz o estudo de uma curva que ficou conhecida como Espiral de Arquimedes. Uma das propriedades que ele estudou foi a construção da tangente por um ponto dado na curva, e é provável que esta tenha sido a primeira vez que se determinou a tangente a uma curva diferente da circunferência e das cônicas.

No século XVII, mais precisamente no período que precede a criação do Cálculo Diferencial e Integral, a sociedade estava envolvida com novos problemas, que iriam acarretar mudanças na filosofia das ciências. O pioneiro dessas modificações foi Galileu, que mudou os paradigmas até então válidos e adotou novas posturas para a ciência. A geometria não ficou alheia a essas modificações. De uma ciência com características estáticas trazidas da Grécia, passou a ser uma ciência dinâmica como o mundo da época. De fato, enquanto para Apolônio, a parábola era uma curva determinada pela secção de um cone por um plano, para Galileu, ela representava a trajetória de um projétil disparado por um canhão. Ele percebeu ainda que havia um movimento no sentido horizontal, outro no sentido vertical, e que a direção final seguia a orientação da reta tangente à parábola, em cada ponto.

Outros problemas tinham modelos diferentes e levavam a outras curvas, mas o princípio era o mesmo, dado pelo paralelogramo das forças, daí a necessidade de se saber calcular a tangente a cada curva, o que demandava um processo geral para esse cálculo, em qualquer circunstância.

Os grandes matemáticos da época atacaram o problema e as soluções começaram a aparecer. Dentre eles, destacamos Fermat e Descartes.

2.3 - Apresentando os diversos métodos para a determinação da tangente

Com o advento da Geometria Analítica, os matemáticos da primeira metade do século XVII dispuseram de novas técnicas para desenvolver soluções de vários problemas, ainda em aberto.

Dois desses problemas eram:

1) Quadraturas de figuras curvas;
2) Determinação de tangentes a curvas genéricas.

Os problemas do tipo 1 acabaram levando ao Cálculo Integral, e, os do tipo 2, ao Cálculo Diferencial.

Neste trabalho abordamos apenas os problemas do tipo 2.

Mostraremos nas próximas seções os métodos para determinação de tangente a uma curva de Fermat, Barrow e Descartes.

2.3.1 - Método de Fermat

Fermat era um advogado de profissão e exercia a função de magistrado na cidade de Toulouse. A Matemática para ele era uma distração das horas de lazer, por esse motivo ele não publicava seus resultados, apenas a sua correspondência com Mersenne permite que se conheça parte da sua produção.

A obra completa de Fermat tornou-se pública posteriormente por iniciativa de seu filho Clement. *"... a técnica de construir tangentes foi desenvolvida por meu pai em 1629 e a simplicidade é a sua principal característica...*"(CLEMENT SAMUEL apud RICIERI, 1993, p. 56).

O processo de construção de tangentes utilizado por Fermat é realmente muito simples e bem análogo ao que hoje conhecemos e utilizamos no Cálculo Diferencial e Integral.

> Fermat também descobriu um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. Sua idéia consistia em achar a *subtangente* relativa a esse ponto, isto

> é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo. (EVES, 2004, p. 430)

Em notação moderna, seja T = (x_0, y_0) um ponto genérico da curva pelo qual se pretende passar uma tangente, t. Na figura 3 abaixo, observa-se que $tg\ \alpha = \frac{TS}{MS}$. Se $y = f(x)$ for a equação da curva e se denotarmos a "*subtangente*" $\overline{MS}$ por b, teremos $tg\ \alpha = \frac{f(x_0)}{b}$. A idéia de Fermat consiste em achar b.

Seja, T' = ($x_0 + E$, $f(x_0 + E)$) outro ponto desta curva com T' muito próximo de T (Fermat dizia que o E deveria ser "sabiamente escolhido"). Então, devido à proximidade de T e T', Fermat considerava o ponto T' também pertencente à reta tangente e então haveria "*semelhança*" entre os triângulos TMS e T'MS'.

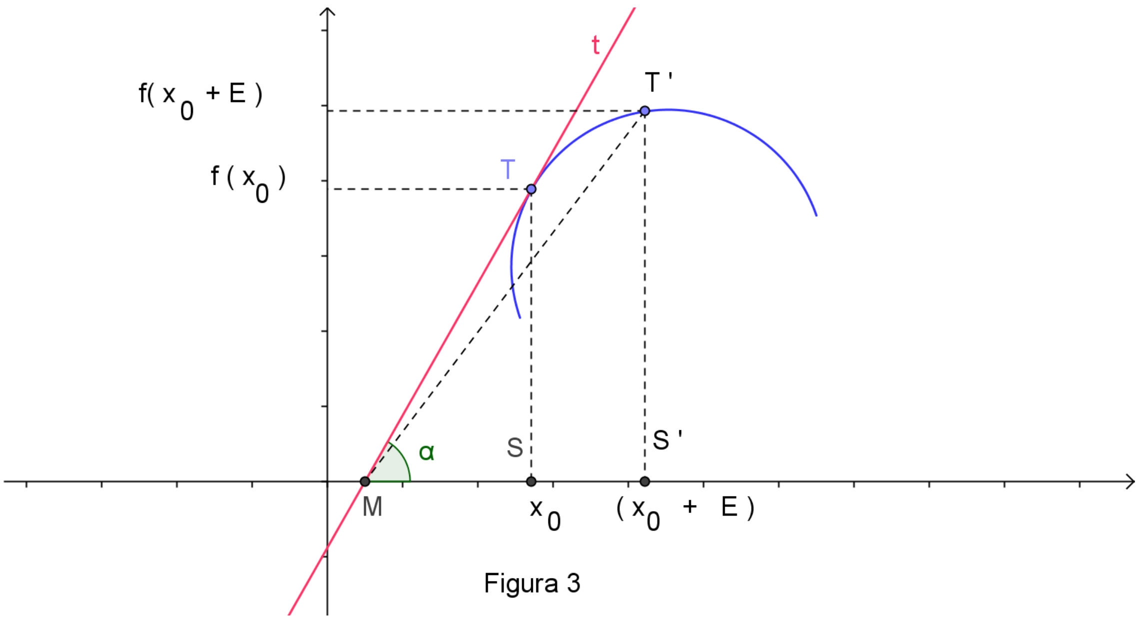


Figura 3

De modo que :

$$\frac{TS}{MS}=\frac{T'S'}{MS'}\rightarrow\frac{f(x_0)}{b}=\frac{f(x_0+E)}{b+E}\Rightarrow(b+E)\ f(x_0)=b\ f(x_0+E)$$
$$\Rightarrow b\cdot f(x_0)\ +\ E\ f(x_0)=b\cdot f(x_0+E)$$
$$\Rightarrow E\cdot f(x_0)\ =b\cdot\left(f(x_0+E)-f(x_0)\right)\Rightarrow b\ =\ \frac{E\ f(x_0)}{f(x_0+E)\ -f(x_0)}$$

Levando a expressão encontrada para a subtangente b em $tg\ \alpha\ =\ \frac{f(x_0)}{b}$, encontramos $tg\ \alpha\ =\frac{f(x_0+E)-f(x_0)}{E}$.

Fermat não tinha o conceito de limite, mas, ao dizer que E deveria ser “sabiamente escolhido”, ele queria dizer que E deveria tender a zero. Em notação moderna e precisa,

$$tg\ \alpha\ =\ \lim_{E\to 0}\frac{f(x_0+E)-f(x_0)}{E}.$$

Essa expressão equivale, como sabemos, à derivada de f(x) no ponto T (x_0, y_0).

Não se sabe se a técnica de Fermat[9] chegou à Inglaterra e se Barrow[10] tomou conhecimento dela através de algum matemático da ilha. Mas Barrow publicou, em 1670, um processo bastante semelhante ao de Fermat.

2.3.2. Método de Barrow

A citação a seguir traz um resumo do método de Barrow.

> Então Barrow prossegue explicando um método de tangentes que é virtualmente idêntico ao usado no cálculo diferencial. É muito semelhante ao de Fermat, mas usa duas quantidades – em vez da letra *E* única de Fermat – quantidades que equivalem aos modernos Δx e Δy. Barrow explica sua regra para tangentes essencialmente do modo seguinte. Se *M* é um ponto sobre uma curva dada (em notação moderna) por uma equação polinomial *f(x,y) = 0* e se *T* é o ponto de intersecção da tangente desejada *MT* com o eixo *x*, então Barrow

[9] Fermat não costumava publicar seus resultados, ele simplesmente os passava a **Mersene** que cuidava da sua divulgação entre outros matemáticos que também mantinham correspondência com ele. (BOYER, 1974, p. 259)

[10] Isaac Barrow (1630 – 1677) era pastor luterano e professor de Matemática em Cambridge. Newton foi seu aluno, colaborou com ele em diversas obras e posteriormente o sucedeu na Universidade. (BOYER, 1974, p. 284)

> marcava um *"arco infinitamente pequeno MN da curva"*. Então traçava as ordenadas *M* e *N* e por *M* uma reta *MR* paralela ao eixo *x* (figura 4). Então, designando por *m* a ordenada conhecida em M, por *t* a subtangente desejada *PT* e por *a* e *e* os lados vertical e horizontal do triângulo *MRN*, Barrow observava que a razão de *a* para *e* é igual à razão de *m* para *t*. Como diríamos agora, a razão de *a* para *e*, para pontos infinitamente vizinhos, é a inclinação da curva. Para achar essa razão, Barrow procedia de modo semelhante ao de Fermat. Substituía *x* e *y* em $f(x,y) = 0$ por $x + e$ e $y + a$ respectivamente, depois, na equação resultante ele desprezava todos os termos não contendo *a* ou *e* (pois esses juntos dão zero) e todos os termos de grau maior que um em *a* e *e*, finalmente substituía *a* por *m* e *e* por *t*. Daí a subtangente é obtida em termos de *x* e *m*, e se *x* e *m* são conhecidos a quantidade *t* está determinada. (BOYER, 1974, p. 284-285)

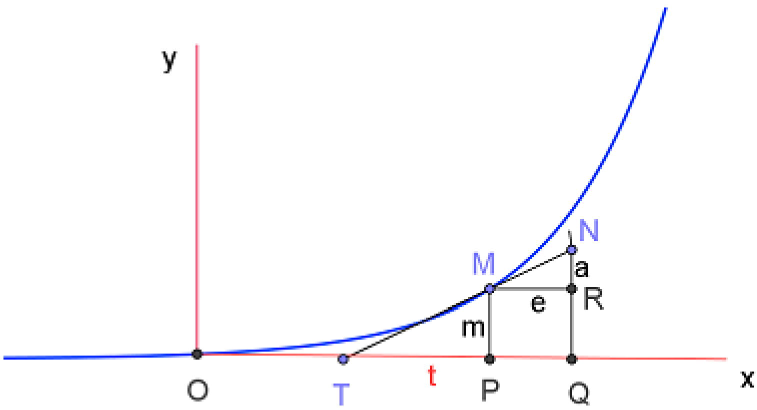


Figura 4

(Adaptado de BOYER, 1974, p. 285)

Abaixo desenvolvemos em linhas gerais o método apresentado por Barrow.

Seja M um ponto sobre uma curva f(x,y) = 0 e T a intersecção da tangente à curva em M com o eixo OX (veja figura 4 acima). Considere um ponto N, próximo de M, na curva e, conforme observação de Barrow, por ser muito próximo de M, N também pode ser considerado ponto da tangente. Considere agora MR paralelo ao eixo *x*. Vamos atribuir conforme figura acima:

$$\begin{cases} a = NR \\ e = MR \\ t = PT \\ m = MP \end{cases}$$

Barrow observava que os triângulos PMT e RNM eram semelhantes de modo que:

$$\frac{a}{e} = \frac{m}{t}$$

Para Barrow, a razão *a/e* representa a inclinação da curva, ou o coeficiente da reta tangente definida por MT. Denotaremos aqui tal inclinação por *coef*. Para achar essa razão, Barrow substituía x por $x + e$ e y por $y + a$ na equação $f(x,y) = 0$ e, então, resolvia a equação resultante. Barrow desprezava todos os termos não contendo a ou e na equação resultante $f(x+e,y+a) = 0$ (veja citação acima). Em notação moderna, sabemos que isso é uma consequência do fato de que as coordenadas de M satisfazem a equação $f(x,y) = 0$. Em outros termos, Barrow tentava resolver o sistema:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ f(x+e, y+a) = 0 \end{cases}$$

Como exemplo, suponha que queiramos determinar o coeficiente, *coef*, da reta tangente à parábola $y = x^2$ em um ponto genérico x. De nossos conhecimentos do cálculo moderno, sabemos que $coef = 2x$. Vamos então encontrar *coef* pelo método de Barrow. Em nosso exemplo temos $f(x,y) = y - x^2$. Da igualdade $f(x+e, y+a) = 0$ obtemos $y + a - (x+e)^2 = 0$, ou equivalentemente, $y + a - x^2 - 2ex - e^2 = 0$ (**). Agora, usando o fato de que $f(x,y) = 0$, ou seja, que $y - x^2 = 0$, então (**) torna-se $a - 2ex - e^2 = 0$. Finalmente, desprezamos e^2 – conforme Barrow, por ser uma potência de grau maior que um em e – resulta

$$a - 2ex = 0,$$

ou, ainda,

$$a = 2ex.$$

Finalmente

$$coef = \frac{a}{e} = \frac{2ex}{e} = 2x.$$

Observe que, na notação moderna, e representa a diferencial dx, e desprezar o termo e^2 equivale a atribuir $(dx)^2 = 0$.

Newton certamente tomou conhecimento do método de Barrow, pois, além de ser seu aluno foi um dos que estimulou o mestre para que publicasse o seu método.

2.3.3 - Método de Descartes

> "... desde 1631 tenho estudado cuidadosamente o problema das tangentes e, agora (1633), finalmente dou-me por satisfeito. O método do círculo resolve esses problemas com simplicidade..."
>
> (René Descartes)

O *método do Círculo*, criado por René Descartes, encontra-se na segunda parte de *La Géométrie (1637)* e serve também para construir tangentes a curvas, conforme descrevemos a seguir. Sejam f(x, y) = 0 a equação da curva ζ, dada e (x_1, y_1) as coordenadas do ponto P, pelo qual se deseja traçar a tangente (veja figura 5).

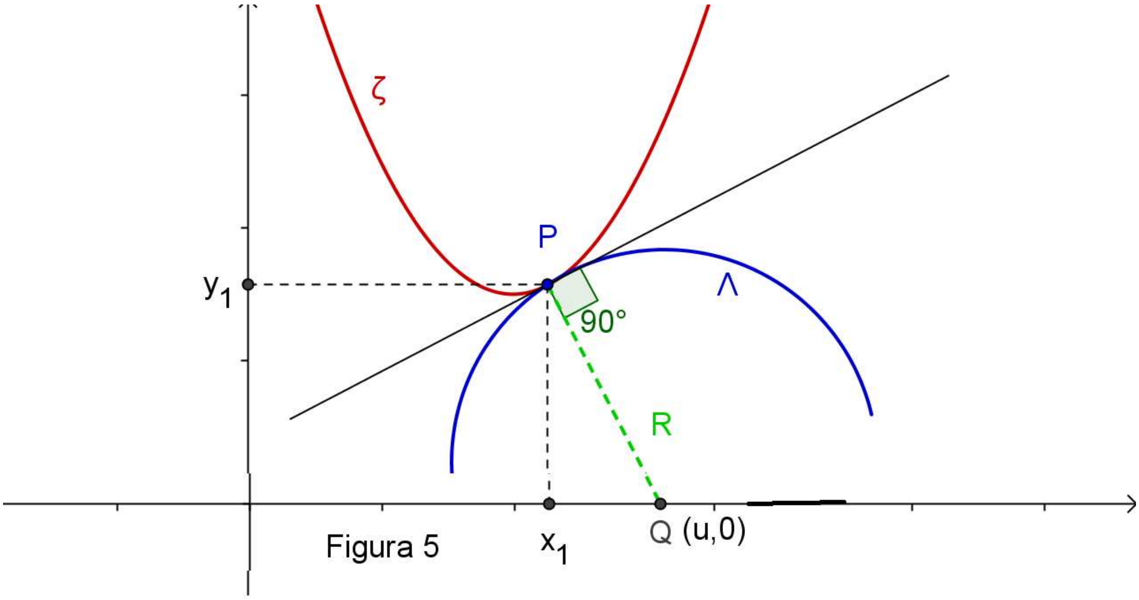


Figura 5

Seja Q = (u, 0) um ponto do eixo x. Então a equação da circunferência Λ de centro Q e que passa por P é:

Λ: $(x - u)^2 + y^2 = R^2$; onde $R = \overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - u)^2 + {y_1}^2}$

Eliminando-se y do sistema formado pelas equações de ζ e Λ, obtém-se uma equação em x que leva às abscissas dos pontos onde Λ corta ζ. Determina-se a seguir *u*, de modo que essa equação em x tenha um par de raízes iguais a x_1. Essa condição impõe que a circunferência Λ seja, agora, tangente à curva ζ em P, ou, equivalentemente, que PQ seja perpendicular à tangente (veja figura 5). Esse procedimento se justifica pelo fato de a tangente à circunferência ser mais facilmente obtida. Finalmente obtemos a tangente desejada (veja figura 6) através de:

$$tg\ \alpha = \frac{u - x_1}{y_1} \qquad (*)$$

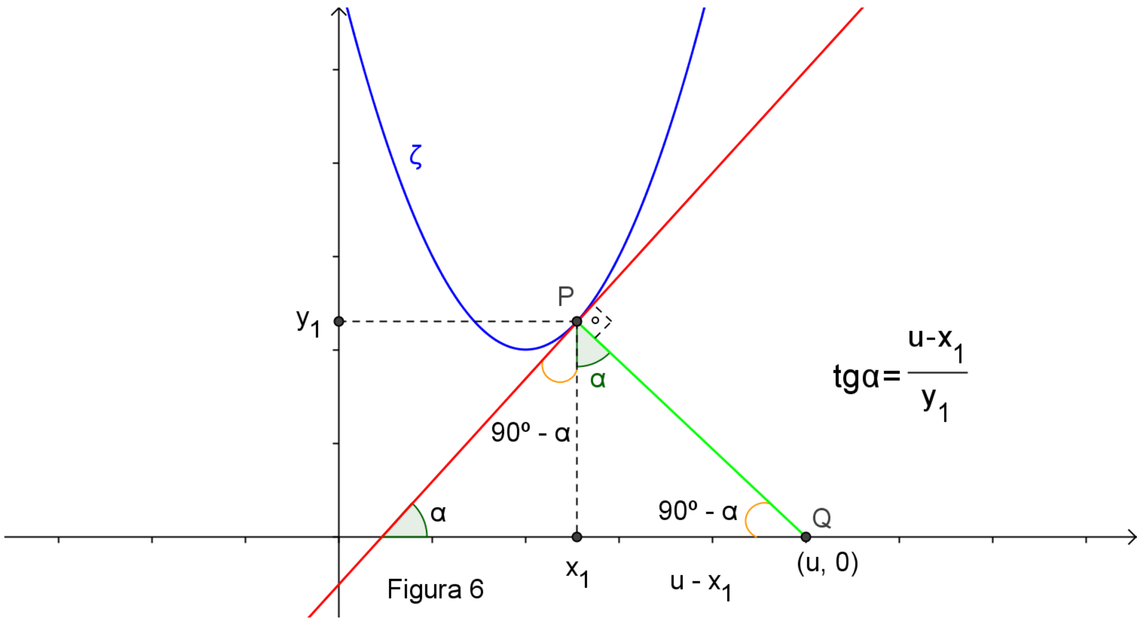


Figura 6

Para o caso particular, em que ζ é dada por y = f(x), as intersecções com a circunferência procurada são pontos S = (x, y) de $\zeta \cap \Lambda$, que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} \Lambda: (x-u)^2 + y^2 = R^2 \quad com \quad R = \sqrt{(x_1 - u)^2 + {y_1}^2} & (I) \\ \zeta : f(x) = y\,; & (II) \end{cases}$$

Levando (II) em (I), temos:

$$(x - u)^2 + [f(x)]^2 = (x_1 - u)^2 + {y_1}^2 \qquad (III)$$

Simplificando (III), vem que:

$$x^2 - 2\,ux + [f(x)]^2 - ({x_1}^2 - 2\,ux_1 + {y_1}^2) = 0 \qquad (III')$$

A determinação do centro Q (u,0) é conseqüência da imposição de que (III') tenha um par de raízes iguais, quando for resolvida para x. É claro que Descartes considerava na época expressões adequadas para f(x), de modo que (III') resultasse em uma equação do 2º grau a ser resolvida para x.

Suponhamos, por exemplo, y = $\sqrt{x^2 + x}$. Neste caso, temos $x_1 = 1$, $y_1 = \sqrt{2}$ e f(x) = $\sqrt{x^2 + x}$.

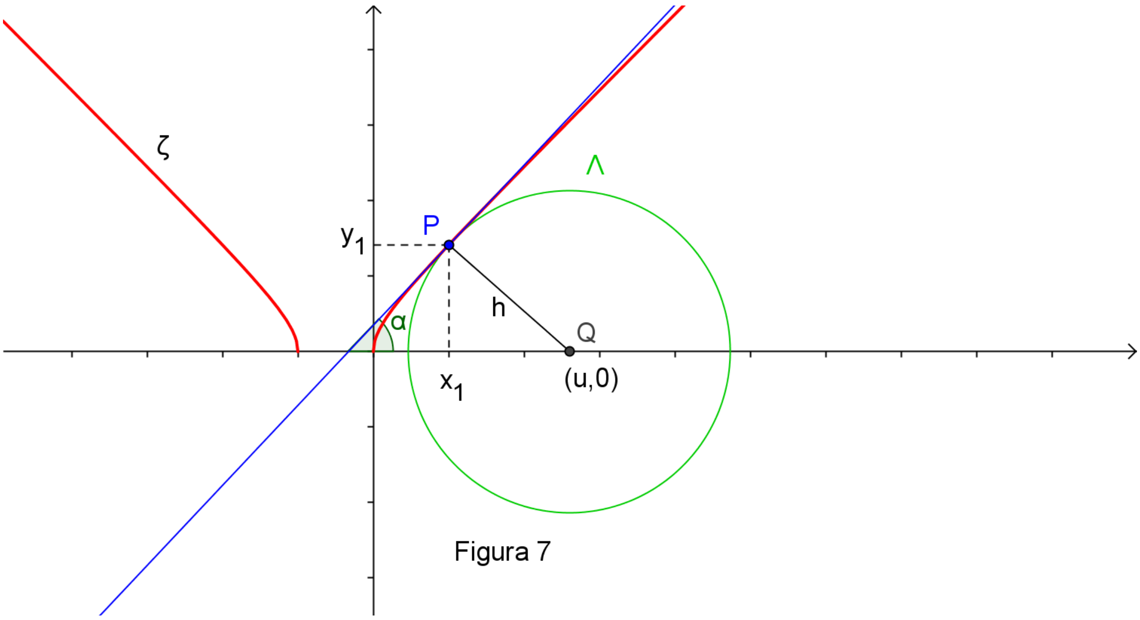


Figura 7

Vamos inicialmente, considerar P = (x_1, y_1) genericamente e encontrar uma expressão para o valor da tangente em P. Assim, substituindo f(x) = $\sqrt{x^2 + x}$ em (III'), obtemos:

$$x^2 - 2ux + \left[\sqrt{x^2 + x}\right]^2 - [x_1^2 - 2ux_1 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_1}\right)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ux + x^2 + x - [x_1^2 - 2ux_1 + x_1^2 + x_1] = 0$$

$\Leftrightarrow 2x^2 + (-2u + 1)\,x - 2x_1^2 + 2ux_1 - x_1 = 0$ Essa equação terá raiz dupla $\Leftrightarrow$ se seu discriminante for zero:

$$\Delta = (-2u + 1)^2 - 4\,(2)\,(-2x_1^2 + 2ux_1 - x_1)$$

Então , $\Delta = 0$ se, e somente se,

$(1-2u)^2 - 4\,(2)(-\ 2x_1^2 + 2ux_1 - \ x_1) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 4u + 4\,u^2 + 16x_1^2 - 16ux_1 + 8x_1 = 0$

$\Leftrightarrow\ 4\,u^2 + (-4 - 16x_1)u + 16x_1^2 + 8x_1 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow u\ = \frac{-(-4-16\,x1)\ \pm\ \sqrt{(-4-16\,x1)^2 - 4(4)(16x_1^2 + 8x1 + 1)}}{8} =$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{+\,4 +\ 16\,x1 \pm \sqrt{16 + 128\,x1 + 256\,x_1^2 - 256x_1^2 - 128\,x1 - 16}}{8} = \frac{+\,4 + 16\,x1}{8} =$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{1+4x_1}{2}.$$

Substituindo esse valor de u em $(*)$ vem que:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{(u - x_1)}{y_1} = \frac{\frac{1+4x_1}{2} - x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_1}} = \frac{\frac{1+4x_1 - 2x_1}{2}}{\sqrt{x_1^2 + x_1}} = \frac{1+\ 2x_1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_1}}$$

$$\boxed{\text{tg}\ \alpha = \frac{2x_1 + 1}{2\sqrt{x_1^2 + x_1}} \qquad (\text{IV'})}$$

Observe que (IV’) nada mais é do que a derivada da função y = $\sqrt{x^2 + x}$ no ponto genérico (x_1, y_1).

Para achar a tangente no ponto P = (1, $\sqrt{2}$) , basta tomar x_1 = 1e y_1 = $\sqrt{2}$ em (IV’).

Temos assim, um processo geral para a determinação da tangente a uma curva; porém em casos mais complicados, a álgebra necessária era extremamente complicada, o que faz do método de Descartes menos eficiente que outros para a determinação das tangentes, como o de Fermat, por exemplo.

2.3.4 - Método do Polinômio

O *Método do Polinômio* foi publicado em 1673 por Johan Hudde e René François Walter no *Philosophical Transactions (a method of drawning tangents to all geometrical curves).* Ele foi criado com a intenção de facilitar o cálculo de derivadas de polinômios de grau superior a quatro. Os cálculos para a determinação da reta tangente pelo método de Descartes para tais polinômios eram extremamente complicados na época, pois necessitavam de um algebrismo muito sofisticado. A seguir faremos um resumo do método, extraído exclusivamente do livro de Ricieri (1993).

Este método é uma extensão do de Descartes e a fundamentação está numa propriedade que afirma que se um polinômio, $p(x)$, tem uma raiz dupla, r, então r também será raiz de um outro polinômio, $\overline{p(x)}$, que, na notação moderna, nada mais é do que o polinômio $x\,p'(x)$. Provavelmente os inventores deste método tinham conhecimento desta propriedade, sem saber que $\overline{p(x)}$ na verdade, era a derivada do polinômio $p(x)$ multiplicado pelo fator x. Embora o polinômio indicado por Ricieri (1993) contenha o fator x, vemos que essa propriedade continua válida, mesmo que não multipliquemos $p'(x)$ por x. De fato, se r é raiz dupla de $p(x)$, então p se fatora como

$$p(x) = (x - r)^2\, q(x),$$

onde $q(x)$ é um polinômio de grau n – 2 (estamos supondo que o grau de p é n $\geq$ 2). Assim, $p'(x) = 2(x - r)\, q(x) + (x - r)^2\, q'(x) = (x - r)\, [\, 2\, q(x) + (x - r)\, q'(x)\,]$, o que mostra que r continua raiz de $p'(x)$. Além disso, o método dos polinômios continua valendo, mesmo quando consideramos $p'(x)$ para ser o polinômio $\overline{p(x)}$, ao invés do polinômio $x\,p'(x)$.

A seguir vamos determinar $\overline{p(x)}$, para dois polinômios: um de 2º grau e outro de 3º grau.

Se um polinômio

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$

tem uma raiz dupla x_0 então x_0 também será raiz do polinômio

$\bar{P}(x) = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 x + 2 \cdot a_2 x^2 + ...$,

que é construído a partir de P(x).

Por volta de 1657, Johann Hudde e René François Walter - barão de Sluse - publicaram esse método. Apresentamos abaixo duas aplicações:

- Com função do 2º grau

  $P(x) = 9 + 1(-6x) + x^2 = (x - 3)^2$

  $\bar{P}(x) = 0 \cdot 9 + 1 \cdot (-6x) + 2 \cdot x^2 = -6x + 2x^2 = 2x(x-3)$

- Com função do 3º grau

  $P(x) = 32 + 32x - 10x^2 + x^3 = (x-4)^2 (x-2)$

$\bar{P}(x) = 0 \cdot 32 + 1 \cdot 32x + 2 \cdot (-10x^2) + 3x^3 = 32x - 20x^2 + 3x^3$

Suponhamos, por exemplo**:** $f(x) = x^n$

Da equação de Descartes, temos:

$[f(x)]^2 + (u - x)^2 - R^2 = 0$

$[x^n]^2 + (u - x)^2 - R^2 = 0$ Chamamos este polinômio de P(x)

$P(x) = x^{2n} + u^2 - 2ux + x^2 - R^2$

$P(x) = u^2 - R^2 - 2ux + x^2 + x^{2n}$ Logo $\bar{P}(x)$ é:

$\bar{P}(x) = 0 \cdot (u^2 - R^2) + 1 \cdot (-2ux) + 2 \cdot x^2 + 2n \cdot x^{2n} = 0$

$\bar{P}(x) = (-u + x + n \cdot x^{2n-1}) \cdot 2x = 0$ Isolando u – x no 1º membro, temos:

$u - x = n \cdot x^{2n-1}$ Substituindo no cálculo da tangente:

$$\text{tg}\,\propto = \frac{u-x}{f(x)} = \frac{n \cdot x^{2n-1}}{x^n} = n \cdot x^{n-1}$$

2.4 - Os principais problemas do Cálculo

> O Cálculo foi criado sobretudo para tratar dos principais problemas científicos do século XVII. (Kline)

Aprofundando um pouco mais a fase que é considerada o período da verdadeira "criação do Cálculo", podemos identificar quatro tipos de problemas principais que motivaram os pesquisadores da época a os investigarem no tema de derivadas e integrais:

- O primeiro era sobre velocidade e aceleração;
- O segundo, sobre a obtenção de uma tangente a uma curva;
- O terceiro, em como obter valores de máximo e mínimo de uma função
- O quarto, que era o de se obter o comprimento de curvas, as áreas delimitadas por curvas e os volumes formados por superfícies.

Em relação ao primeiro problema, era dada uma fórmula da distância que um corpo percorre em função do tempo, para assim obter-se a velocidade e a aceleração em qualquer instante, ou a fórmula que descreve a aceleração para então se obter a velocidade ou a distância percorrida.

O segundo tipo de problema, considerado de geometria pura, tinha grande importância para aplicações científicas, principalmente no ramo da óptica, que era de interesse de grandes matemáticos da época como Fermat, Descartes e Newton.

O terceiro problema estava relacionado com valores de máximo e mínimo de determinadas funções. Seu cálculo poderia, por exemplo, ser aplicado a um canhão de guerra que dispara uma bala para atingir certos alvos, tentando responder qual seria a distância percorrida pela bala horizontalmente e qual o valor do ângulo de inclinação do canhão com o solo, para se atingir certa distância.

Até o fim do século XVII, os artilheiros ajustavam seus canhões empiricamente e ajustavam os tiros a partir do primeiro. Eles sabiam, com base em alguns estudos de Tartaglia, no século XVI, que o alcance máximo era obtido com canhão inclinado a 45º e que qualquer variação simétrica (para mais ou para menos) a determinado tiro era alcançada com uma variação simétrica do ângulo do referido tiro para mais ou para menos.

Galileu mostrou que a trajetória da bala era uma parábola e calculou a sua velocidade em qualquer ponto da trajetória, com isso, foi possível estabelecer uma tabela que dava a altura e amplitude do tiro a partir do ângulo usado pelo canhão.

Os valores de máximos e mínimos também estavam relacionados com o movimento dos planetas, para calcular suas distâncias em relação ao Sol.

Problemas de máximo e mínimo também ocorrem em questões práticas e contextualizadas que envolvam, por exemplo, as dimensões que uma embalagem deve ter para que se gaste uma menor quantidade de material e/ou problemas sobre maximizar o lucro de venda de um determinado produto.

Em relação ao quarto problema, tentava se obter, por exemplo, a distância que um planeta percorria em um determinado intervalo de tempo, as áreas formadas por certas curvas, os volumes que eram formados por superfícies. Um exemplo disto era o método de exaustão aplicado pelos gregos para obter algumas áreas e volumes:

> Mersene em 1615 tinha chamado a atenção dos matemáticos para a ciclóide, tendo talvez ouvido falar da curva através de Galileu; em 1628 quando Roberval chegou a Paris, Mersene propôs ao jovem que estudasse a curva. Em 1634 Roberval pode provar que a área sobre um arco da curva é exatamente 3 vezes a área do círculo gerador. Em 1638 ele tinha descoberto como traçar a tangente a curva em qualquer ponto (problema resolvido ao mesmo tempo também por Fermat e Descartes) e tinha achado o volume gerado quando a área sob um arco gira em torno da reta de base. (BOYER, 1974, p. 259)

Quanto ao comprimento de arco, Torricelli, e também Roberval, trabalhando de forma independente, complementaram um trabalho anterior feito por Cavalieri de comparação entre a parábola e a espiral de Arquimedes.

Assim, buscando responder a estas perguntas, foram elaborados os importantes trabalhos de Newton e Leibniz.

2.5 - O Cálculo de Newton

> Tomando a Matemática desde o início do mundo até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade. (Gottfried Leibniz)

Tudo indica que Newton (1642 – 1727) chegou primeiro ao Cálculo, em 1665/1666, chamado por ele de “Teoria das Fluxões”.

Newton desenvolveu seu Cálculo Diferencial para descobrir exatamente como as tangentes mudam de direção, à medida que percorremos determinada curva, ou seja, ele tentava investigar qual era a inclinação desta reta.

Newton escreveu *Philosophiae naturalis principia mathematica*, em 1665-1666, mas só a publicou em 1687 enquanto o primeiro artigo de Leibniz sobre o Cálculo apareceu em 1684 na *Acta Erunditorum*, uma espécie de “periódico científico” mensal fundado em 1682. Ficou então esta célebre polêmica: quem chegou primeiro aos resultados? Leibniz conhecia os manuscritos de Newton?

> Como um influente representante de governo Leibniz viajou muito. Em 1672 foi a Paris, esperando distrair os desígnios aquisitivos dos franceses contra a Alemanha por meio da “guerra santa” dirigida contra o Egito (sugestão mais tarde adotada por Napoleão). Lá ele encontrou Huygens, que sugeriu que se ele desejava tornar-se um matemático deveria ler os tratados de Pascal de 1658-1659. Em 1673 uma missão política levou-o a Londres, onde comprou um exemplar das Lectiones Geometricae de Barrow, encontrou Oldenburg e Collins, e tornou-se membro do Royal Society. (BOYER, 1974, p.293)

Isaac Barrow (1630 – 1677), em seu trabalho *Lectures on Optics and Geometry*, de 1669, desenvolveu um método para determinar tangentes a uma curva, usando o “Triângulo Diferencial” ou “Triângulo de Barrow”. Esse método contribuiu muito para o avanço do Cálculo, pois, aplicando o Cálculo Elementar, temos a derivada para várias equações específicas. O método de Barrow não apresentava nenhuma formalização. Tal formalização apareceu, entretanto, nos trabalhos de Newton (seu pupilo), Leibniz, Cauchy (1789 – 1857) e outros.

No período de 1666 e 1676, os matemáticos precisavam de algum algoritmo geral que se aplicasse a todos os tipos de funções, seja racional, irracional, algébrica ou transcendente. Com essa preocupação, Newton propôs uma nova análise infinitesimal a partir de uma expansão binomial infinita, para se chegar às quadraturas.

Nessa mesma época Newton desenvolveu outro trabalho chamado *"o método dos fluxões"*. Nesse método a simbologia utilizada por Newton era um ponto em cima de uma letra para representar um valor finito ou uma velocidade chamada de "fluxão" e as letras sem pontos representavam os "fluentes".

Ilustraremos com um exemplo o método de Newton:

Newton interpretou a curva como sendo a trajetória de um ponto P cuja velocidade tangencial projetada nos eixos OX e OY produz as componentes da velocidade $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Para Newton x e y são quantidades que "fluem", por isso chamou-as de "fluentes" $\dot{x}$ e $\dot{y}$ são as variações de x e y respectivamente, Newton chamou-as de "fluxões". ([11]*)

Para este intervalo de tempo *o* infinitamente pequeno (evanescente) as coordenadas de P, antes (x, y) passam a ser $(x + \dot{x}o,\ y + \dot{y}o)$

A inclinação da tangente é o "fluxões".

$$\text{Fluxões} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Newton considera x e y como função do tempo, pois $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ representam o movimento uniforme.

Resumindo o método de Newton ou o método dos fluxões considera que :

$$\text{Fluxões} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

e

$$f(x, y) = f\,(x + \dot{x}o,\ y + \dot{y}o)$$

Suponhamos como exemplo o cálculo dos fluxões da curva $y = x^2$:

$f(x, y) = y - x^2$

$f(x, y) = f\,(x + \dot{x}o,\ y + \dot{y}o)$

$\Rightarrow y - x^2 = (y + \dot{y}o) - (x + \dot{x}o)^2$

$\Rightarrow y - x^2 = y + yo - x^2 - 2x\,\dot{x}o - \dot{x}^2 o^2$

---

[11] (*) Em linguagem moderna $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

$\Rightarrow \dot{y}o = 2x\,\dot{x}o + \dot{x}^2 o^2$

$\Rightarrow \dot{y} = 2x\,\dot{x} + \dot{x}^2 o$;

Mas:

fluxões = $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

então: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(2x + \dot{x}\,o)\dot{x}}{\dot{x}} = 2x + \dot{x}o.$

Por ser infinitesimal o pode ser desprezado.

Assim: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$

Newton pensava na derivada como uma velocidade, e que quantidades geométricas eram geradas por movimentos contínuos.

2.6. O Cálculo de Leibniz

> A matemática se compõe de dois domínios amplos e antitéticos, o contínuo e o discreto; e em toda a História da Matemática o único homem a transitar nesses dois domínios com soberbo desembaraço foi Leibniz. (Howard Eves)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) desenvolveu seu Cálculo nos anos de 1673 a 1676 sob a influência de Huygens (1629 – 1695) e dos trabalhos de Descartes e Pascal (1623 – 1662), publicando seu primeiro artigo em 1684, com duas páginas, tratando das regras básicas da diferenciação. O processo utilizado era muito parecido com o de Newton, no que diz respeito a quantidades infinitamente pequenas.

Leibniz deu uma nova notação para a diferenciação, ao invés de utilizar $x + x_0$, ele utilizou x + dx.

Assim, para achar a diferencial de xy, era só fazer o produto (x + dx) . (y + dy) menos a quantidade xy, que daria:

$xy + xdy + ydx + dxdy - xy = d(xy)$

Como dxdy era uma quantidade muito pequena, Leibniz a desprezou, tornando a diferencial de xy em:

$d(xy) = xdy + ydx$

Essa relação entre diferenciais acabou se tornando uma regra bastante conhecida nos dias de hoje, pelos alunos de Cálculo.

Segundo o Teorema de Leibniz, podemos escrever a derivada n-ésima de um produto de funções. Para n = 4, por exemplo, temos a notação:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)} ;$$

sendo y = uv, teremos $\frac{d^4y}{dx^4} = u^{(4)}v^{(0)} + 4u^{(3)}v^{(1)} + 6u^{(2)}v^{(2)} + 4u^{(1)}v^{(3)} + u^{(0)}v^{(4)}$

onde os coeficientes 1, 4, 6, 4, 1 são os coeficientes binomiais correspondentes à expansão da potência de expoente 4.

Leibniz não parou só na diferenciação, ele propôs também avanços no ramo da integração, como:

$$\int_0^x x = \frac{x^2}{2} \text{ e } \int (x+y) = \int x + \int y .$$

Leibniz produziu, também, várias notações como dx, dy, $\int$ e também criou alguns termos como abscissa, ordenada, coordenada, eixo de coordenadas e função. Reis (2001) propõe um questionamento acerca da notação utilizada nos dias de hoje, pois ela se assemelha muito com a notação de Leibinz.

> ... por que a nossa “tradição” em Cálculo é, reconhecidamente, leibniziana, conforme podemos constatar nos livros didáticos ? Teria sido pela notação de Leibniz (...), mais intuitiva e aplicável que a de Newton (...). (REIS, 2001, p. 56)

Concordamos com as idéias de Reis (2001), quando relata que nossa tradição atual no Cálculo é, essencialmente, “leibnitziana”, conforme pode ser observado pelas notações acima destacadas, usualmente encontradas nos livros didáticos de Cálculo utilizados nos cursos de graduação das universidades. Isto ocorre porque Leibniz foi mais feliz que Newton na notação que usou.

> Leibniz tinha uma sensibilidade muito grande para forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton. (EVES, 2004, p.243)

Os matemáticos ingleses que, por um costume muito britânico de valorizar suas conquistas, insistiram em utilizar a notação de Newton, tiveram um considerável atraso no desenvolvimento do Cálculo depois da morte do mestre.

CAPÍTULO 3 – Da História da Matemática para um percurso metodológico

Depois da pesquisa teórico-bibliográfica, com leitura e análise de artigos científicos, dissertações, teses e livros relacionados ao Ensino e História do Cálculo Diferencial e Integral, optamos por uma sequência de ensino apoiada em fundamentos históricos, para o aprimoramento do conceito de derivada. Para isso, inicialmente, devemos discutir um pouco da utilização da História da Matemática na Educação Matemática.

3.1 – História da Matemática na Educação Matemática

As recentes pesquisas em Educação Matemática têm destacado a importância da História da Matemática e da Educação Matemática na formação dos estudantes, em todos os níveis de ensino:

> Existe um consenso quase unânime, entre os pesquisadores em Educação Matemática, acerca da importância da perspectiva histórica e da sua fundamentação epistemológica na formação científica. Nos últimos anos a história da matemática vem se incorporando, sobretudo, à teoria e à prática do ensino da matemática. Assim, se estabeleceu uma aproximação entre essas duas áreas de conhecimento, que já foram consideradas tradicionalmente alheias entre si. (VALDÉS, Juan E. Nápoles 2006, p.9)

O ensino da Matemática é apresentado numa sequencia lógica que é diferente da sequência histórica em que os conhecimentos apareceram. Acreditamos que o professor encarregado desse ensino saiba desse fato e conheça a sequência histórica, não só para usá-la no magistério, mas também para que tenha uma visão mais humana da própria Matemática.

> É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só depois o cálculo diferencial. A idéia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p.417)

A História da Matemática nos aproxima de homens que, por diversos motivos ajudaram no desenvolvimento da Matemática:

> Com respeito a todos os temas básicos do cálculo infinitesimal... teorema do valor médio, série de Taylor,... nunca se sucita a questão: Por que assim precisamente? ou: Como se chegou a isso? Contudo todas essas questões foram, em algum período, objetivos de uma imensa busca, respostas a perguntas instigantes... Se voltássemos às origens dessas idéias, elas perderiam essa aparência de morte e de feitos dissecados e voltariam a ter uma vida fresca e pujante. (TOEPLITZ, apud VALDÉS, 2006, p.17)

Foram esses motivos que nos levaram a adotar uma perspectiva histórica para elaborar a sequência de ensino que será apresentada na seção 4.1, com a finalidade de reforçar e justificar o conceito de derivada ensinado no primeiro ano, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

Existem muitos alunos que, por vários motivos não gostam da matemática. Se eles tiverem conhecimento das necessidades que os cientistas tiveram em adquirir determinados conceitos e também das dúvidas que encontraram para chegar a eles, talvez fiquem mais motivados para aprender Matemática.

Mas é preciso ter em mente que relacionar o conceito a ser ensinado com uma data ou com o matemático que conseguiu chegar a ele não basta. É preciso ir mais longe, explorar as dificuldades encontradas, as soluções incompletas, e as tentativas feitas para alcançar o sucesso.

É nessa linha de raciocínio que aparece o “obstáculo epistemológico”, um elemento pedagógico criado por Bachelard em sua obra "A formação do espírito científico", de 1938, e definido como conhecimentos não criticados, hábitos de pensamento que apresentam a ciência como um trabalho de ruptura em face de suas representações.

Um conhecimento adequado da História da Matemática e da História da Educação Matemática poderá proporcionar ao professor a oportunidade de perceber porque o aluno está encontrando dificuldade em compreender aquela passagem que o professor acha tão evidente.

É preciso deixar claro que estamos apresentando uma alternativa para a motivação do aluno, que deve aprender, e para os cuidados do professor, que deve ensinar. Não estamos sozinhos nesta afirmativa, Mendes, Fossa e Valdés (2006) apontam vinte e três autores que sustentam a nossa afirmativa:

> Podemos considerar... que o uso da história como recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensino-aprendizagem da matemática que permita uma ressignificação do conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos. Com essa prática, acreditamos ser possível imprimir maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula durante nossa ação docente, pois esperamos que esse modo de encarar o ensino da matemática possa se constituir em um dos agentes provocadores de ruptura na prática tradicional educativa vivida até hoje nas aulas de matemática. (MENDES, FOSSA, VALDÉS, 2006, p.84)

Ao discutir as interfaces da História da Matemática com a Educação Matemática, Mendes (2006, p. 85) destaca algumas questões que podem nortear a Educação Matemática, com o auxílio da História.

> Como buscarmos as possíveis relações entre a história da matemática e o ensino da matemática?
> Que implicações pedagógicas podem surgir dessas relações?
> Como ligar o desenvolvimento histórico-epistemológico da matemática ao seu ensino?
> Quais as possibilidades de estabelecer uma proposta de ensino que relacione a matemática ao seu desenvolvimento histórico? (MENDES, 2006, p.85)

As pesquisas narradas por Mendes (2006) que apontam essas indagações, o autor menciona o livro "Using history in mathematics education", do professor John Fauvel (1991), livro este que assinala inúmeras razões para usar a História na Educação Matemática:

- A história aumenta a motivação e a aprendizagem da matemática.
- Humaniza a matemática
- Mostra o seu desenvolvimento histórico, através da ordenação e apresentação de tópicos do currículo.
- Os alunos compreendem como os conceitos se desenvolveram.
- Contribui para as mudanças de percepções dos alunos com relação à matemática.
- A comparação entre o antigo e o moderno estabelece os valores das técnicas modernas, a partir do conhecimento desenvolvido ao longo da história da sociedade.
- Ajuda a desenvolver uma aproximação multicultural para a construção do conhecimento matemático.
- Suscita oportunidades para a investigação matemática.
- Pode apontar possíveis aspectos conceituais históricos da matemática que dificultam a aprendizagem dos estudantes.

> - Contribui para que os estudantes busquem no passado soluções matemáticas para o presente e projetem seus resultados no futuro.
> - Ajuda a explicar o papel da matemática na sociedade.
> - Faz da matemática um conhecimento menos assustador para os estudantes e para comunidade em geral.
> - Explora a história, ajudando a sustentar o interesse e a satisfação dos estudantes.
> - Fornece oportunidades para a realização de atividades extracurriculares que evidenciem trabalhos de outros professores e/ou outros assuntos (caráter interdisciplinar da História da Matemática). (FAUVEL apud MENDES, 2006, p.86)

Essas preocupações, que hoje afligem os educadores quanto ao modo de apresentar a Matemática, já são antigas.

No final do século XIX e início do século XX a Educação Matemática sofreu influência da Lei Biogenética Fundamental "A ontogenia recapitula a filogenia" enunciada pelo biólogo alemão Ernst Haeckel (1834 – 1919). Foi essa lei que forneceu argumentação para que os estudiosos da Educação Matemática da época afirmassem que professores de matemática devem conhecer História da Matemática.

A ontogenia representa o desenvolvimento animal individual e por filogenia entende-se a história da evolução da espécie animal.

Dessa forma, dizer que a ontogenia recapitula a filogenia significa, para a raça humana, dizer que o desenvolvimento do homem ocorre da mesma forma que o desenvolvimento da humanidade.

Com base na Lei Biogenética Fundamental foi estabelecido o "Princípio Genético para o ensino", com o seguinte enunciado:

> O aprendizado efetivo requer que cada aprendiz retrace os principais passos na evolução histórica do assunto estudado. (BYERS apud PRADO, 1990, p.10)

Defendido por dois dos mais eminentes matemáticos do início do século XX – Henri Poincaré (1854 – 1912) e Felix Klein (1849 – 1925) - o princípio genético ganhou notoriedade e passou a ser considerado na Educação Matemática, mas, para que pudesse ser aplicado, seria necessário que o professor de Matemática conhecesse a História da Matemática:

> Poincaré defende a idéia de que se o professor deseja que o aluno compreenda o raciocínio presente numa demonstração é necessário considerar a intuição matemática no ensino. Tal ensino deve, portanto, percorrer certo caminho, que não é linear, para chegar à

> demonstração, que é lógica. Em educação matemática a demonstração é um ponto de chegada, não devendo ser o de partida. (PRADO, 1990, p.11.)

Além de ter sido um grande matemático e lógico, Poincaré contribuiu muito para a Educação Matemática, que era a sua grande preocupação, sem contar com seus importantes estudos na Filosofia da Matemática. Seus conhecimentos em ambos os campos (Educação e Filosofia) permitiram que ele pudesse emitir conceitos como a sua notável afirmativa do que seria uma “boa definição”:

> Para o filósofo ou para o sábio, a boa definição é aquela que satisfaz as regras da lógica; para o ensino, é aquela que é compreendida pelo aluno. (POINCARÉ apud PRADO, 1990, p. 11)

Poincaré afirma que o mestre não deve se preocupar somente com a lógica, ao ensinar, pois, dessa forma estaria apenas satisfazendo uma preferência sua, sem se importar com o que ocorre na mente do aprendiz.

O sábio francês argumenta que nossos antepassados acreditavam que sabiam o que era uma fração, tinham idéia intuitiva da continuidade, acreditavam que sabiam calcular a área de uma superfície curva. Com o desenvolvimento da Matemática e o nosso conceito atual de rigor, hoje sabemos que esses conceitos não estavam rigorosamente estruturados, mas eram adequados para as necessidades da época.

Da mesma forma, os alunos quando começam a estudar Matemática, criam idéias intuitivas. Se estas não são rigorosas e lançamos mão da lógica para explicá-las usando rigor, eles poderão não entender a nossa argumentação e passarão a não arriscar mais idéias intuitivas, criando um bloqueio para os estudos da Matemática. Se, ao contrário, esta intuição primitiva for respeitada, no momento em que a mente do aprendiz necessitar de uma compreensão mais rigorosa, a demonstração poderá ser apresentada e então será bem-vinda.

> O educador deve fazer a criança repassar por onde haviam passado seus ascendentes, muito rapidamente, mas sem omitir etapas. Para esse fim, a história da ciência deve ser o nosso primeiro guia. (POINCARÉ apud PRADO, 1990, p.12)

Outro grande matemático e lógico, contemporâneo de Poincaré, Felix Klein, também lançou mão do Princípio Genético para servir de base à sua filosofia no Ensino da Matemática:

> ... do pondo de vista da pedagogia da matemática, nós podemos certamente protestar contra a apresentação prematura de assuntos abstratos e difíceis aos alunos. Para fornecer uma expressão precisa de minha visão sobre este ponto gostaria de expor a lei biogenética fundamental, segundo a qual o indivíduo atravessa, em uma série abreviada, todos os estágios do desenvolvimento da espécie. (POINCARÉ apud PRADO, 1990, p.12-13)

O matemático alemão acreditava que a Educação Matemática, bem como a Educação em geral, devia seguir o Princípio Genético, mas argumentava que um sério entrave para a aplicação desta metodologia era a falta de conhecimento histórico por parte dos mestres, daí a importância que ele atribuía aos estudos de História da Matemática.

Sobre a aplicação do Princípio Genético, Klein afirma:

> Um sério obstáculo para a difusão desse natural e genuinamente científico método de instrução é a deficiência de conhecimento histórico, que frequentemente pode comprometê-lo. (KLEIN apud PRADO, 1990, p.13)

O período que vai de 1914 até 1945 envolve as duas grandes guerras mundiais e se caracteriza, na Educação, por uma prevalência dos estudos científicos, pelo interesse em suas aplicações. Ocorre então certo desinteresse pelas Ciências Humanas e consequentemente pela História das Ciências.

O princípio genético só vai reaparecer em 1964 com Polya, agora enunciado da seguinte maneira:

> Quando se ensina um ramo da Ciência (ou uma teoria, ou um conceito) devemos deixar a criança traçar nele as grandes etapas da evolução intelectual da raça humana. (POLYA apud PRADO, 1990, p.15)

Polya, no entanto, defende a utilização do Princípio Genético de forma mais amena, não para toda a formação matemática, mas como uma fonte de interessantes sugestões. Outros autores também defendem o Princípio Genético como elemento auxiliar da Educação Matemática, tanto na escolha dos tópicos a serem estudados como também na ordenação dos conteúdos que constituem cada um dos tópicos. O advento da chamada Matemática Moderna deu novamente ênfase ao Ensino da Matemática estruturado sob o ponto de vista da lógica e mais uma vez o Princípio Genético foi abandonado.

Com o fracasso da Matemática Moderna e a consequente procura de novas formas de ensino, reaparece mais uma vez o interesse pela História da Matemática como mediadora na Educação Matemática.

No Brasil, essa preocupação vem ganhando corpo, com a adesão de vários professores e pesquisadores, e vem sendo muito incentivada, tanto pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), como pela Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHM).

Existem muitas experiências em várias regiões do país, tentando criar elementos cada vez mais adequados à utilização da História da Matemática na Educação Matemática. A maioria dessas pesquisas tem se desenvolvido, no entanto, nos níveis fundamental e médio.

Este trabalho pretende dar alguma contribuição nessa linha, para o magistério superior, mais precisamente, no ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

3.2 – Retomando nossa pesquisa

A seguir, apresentamos os detalhes mais técnicos dessa pesquisa.

3.2.1 - Questão de Investigação

Como o conceito de derivada pode ser explorado, a partir do uso da História da Matemática no Cálculo Diferencial e Integral?

Tal questão se enquadra na Linha 1 – Educação Matemática Superior, Informática Educacional e Modelagem Matemática, desenvolvida no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

3.2.2 – Hipótese de Trabalho

Baseamos nossa pesquisa na seguinte hipótese de trabalho:

Embora as modernas tendências em Educação Matemática orientem o uso da História da Matemática no ensino de Matemática, acreditamos que isso não esteja acontecendo na maioria dos casos, tanto em alguns livros didáticos, quanto na prática dos professores em sala de aula.

Além disso, acreditamos que o uso da História da Matemática surge como um elemento motivador para os alunos, de modo a facilitar o aprendizado, que neste trabalho será sobre o conceito de derivada.

> ... o conhecimento histórico da Matemática despertaria o interesse do aluno pelo conteúdo matemático que lhe estaria sendo ensinado. Os mais ingênuos acabam atribuindo à história um poder quase que mágico de modificar a atitude do aluno em relação à Matemática. (MIGUEL e MIORIM, 2004, p. 16)

É importante ressaltar que o uso da História da Matemática pode ser mais que um elemento motivador, conforme podemos verificar na fala de Miguel e Miorim (2004):

> Além de constituir um espaço privilegiado para a seleção de problemas, *os Parâmetros* consideram várias outras funções que a história poderia desempenhar em situações de ensino, tais como o desenvolvimento de atitudes e valores mais favoráveis diante do conhecimento matemático, o resgate da própria identidade cultural, a compreensão das relações entre tecnologia e herança cultural, a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos matemáticos, a sugestão de abordagens diferenciadas e a compreensão de obstáculos encontrados pelos alunos. (MIGUEL e MIORIM, 2004, p. 52)

Por esses motivos, traçamos nossos objetivos com o uso da História da Matemática neste trabalho, conforme apresentaremos a seguir.

3.2.3 - Objetivos

- Contribuir para a discussão sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a partir de seus fundamentos históricos relacionados ao conceito de derivada;
- Apresentar uma sequência de ensino que permita ao aluno explorar o conceito de derivada dentro de uma perspectiva histórica.

3.2.4 - Pesquisa de Campo

A pesquisa de campo foi elaborada com base em métodos determinados, por vários matemáticos, no decorrer da História da Matemática, que procuraram desenvolver o conceito de derivada a partir da idéia de reta tangente a uma curva qualquer, em um ponto dado.

Os trabalhos foram realizados em um único dia (sábado) das 9:00h às 15:00h, com intervalo de uma hora para almoço. Participaram 38 alunos da Universidade Federal de Ouro Preto, sendo 23 do curso de Licenciatura em Matemática e 15 do curso de bacharelado em Estatística. Destes alunos 14 já haviam cursado a disciplina de Cálculo I e os demais estavam cursando pela primeira vez. Com exceção de dois alunos, os participantes eram todos da faixa etária de 19 a 32 anos.

Iniciamos os trabalhos entregando a cada participante um texto que constava de cinco atividades, cada uma delas correspondendo a um método para a determinação da tangente a uma curva específica em um determinado ponto.

Explicamos aos alunos o método de Fermat, assunto da Atividade 1. Em seguida apresentamos um exemplo que serviu de modelo para a determinação da tangente por este método. Pedimos então que os alunos executassem uma atividade, semelhante ao do modelo resolvido na lousa.

O mesmo procedimento foi adotado para a Atividade 2 (método de Barrow), Atividade 3 (método de Newton), Atividade 4 (método de Descartes) e Atividade 5 (método dos polinômios).

Encerramos os trabalhos solicitando aos participantes que respondessem a um questionário que destacava a sua opinião sobre a validade do processo.

3.2.5 – Instrumentos de Pesquisa

Optamos pela realização de uma pesquisa qualitativa, pois segundo Flick (2009):

> Os aspectos essenciais da pesquisa qualitativa consistem na escolha adequada de métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagem e métodos. (FLICK, 2009, p. 23)

Embora a pesquisa qualitativa seja de particular relevância nas ciências sociais, principalmente em função das mudanças que a sociedade vem experimentando nos últimos tempos, a sua utilização na Educação Matemática ainda é pequena em relação à pesquisa quantitativa, mais natural para as pessoas que se relacionam diariamente com os números. No entanto, pesquisadores como Borba e Araújo veem a pesquisa qualitativa como elemento de grande valia para o diagnóstico dos problemas encontrados pelos alunos na aprendizagem da Matemática.

> ...em nosso entendimento, pesquisar não se resume a listar uma série de procedimentos destinados à realização de uma coleta de dados, que, por sua vez, serão analisados por meio de um quadro teórico estabelecido antecipadamente para responder a uma dada pergunta. Como procuramos deixar claro, existem fundamentos que, articulados, constituem a alma da pesquisa. (BORBA e ARAUJO, 2006 P. 45)

Partindo dessas considerações, elaboramos como instrumento de coleta de dados um questionário “semi-aberto”, que juntamente com sua análise será apresentado no próximo capítulo.

Por tudo isto, conforme já argumentamos anteriormente, elaboramos a seguinte sequência de ensino enfocada em argumentos históricos para melhorar a compreensão do conceito de derivada usando as definições de vários matemáticos, como Fermat, Descartes, Barrow, Newton, até a elaboração final e rigorosa desse conceito.

CAPÍTULO 4 - Apresentando a sequência de ensino e analisando os dados

Neste capítulo vamos mostrar a sequência de ensino, justificar as atividades apresentadas e discutir os resultados obtidos com a análise da sequência e análise da aplicação de um questionário.

Esta sequência de ensino pretende mostrar de forma simples de apresentar o conceito de derivada.

4.1 A sequência de ensino

A sequência elaborada para a introdução do conceito de derivada constou de uma introdução histórica, seguida de uma referência à equação da reta, para ao fim apresentar os métodos de traçado de tangentes desenvolvidos e utilizados por matemáticos do século XVII. Foram escolhidos cinco métodos, a saber:

- Método de Fermat
- Método de Barrow
- Método de Newton
- Método de Descartes
- Método dos Polinômios

As atividades foram aplicadas em uma classe onde os alunos puderam desenvolvê-las individualmente ou em grupos de no máximo duas pessoas. As atividades foram iniciadas com uma explicação do método em curso, seguida de um modelo prontamente resolvido e, finalmente, de um exemplo proposto que deveria ser resolvido pelo aluno e/ou a equipe.

O objetivo da sequência foi o de introduzir o conceito de derivada de forma intuitiva, com base nos vários processos que foram utilizados durante o desenvolvimento deste conceito no decorrer da História. Por se tratar de um estudo intuitivo e introdutório, foram consideradas apenas funções diferenciáveis (no conceito moderno) e descartados os exemplos em que a reta tangente à curva fosse paralela ao eixo OX ou ao eixo OY. Estas situações, incluindo o conceito de continuidade, deveriam, em nossa opinião, não serem estudados em uma primeira, mas sim, numa segunda abordagem, quando o aluno já tivesse o conceito de derivada bem estruturado.

4.1.1 Apresentando as Atividades

Elaboramos a seguinte sequência de ensino baseada nos métodos antigos para o cálculo da derivada.

Atividade 1

Calcule a tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ no ponto T = (x, f(x)) pelo método de Fermat.

Atividade 2

Calcule a tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ no ponto T = (x, f(x)) pelo método de Barrow.

Atividade 3

Calcule a tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ no ponto T = (x, f(x)) pelo método de Newton.

Atividade 4

Calcule a tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto T = (x, f(x)) pelo método de Descartes.

Atividade 5

Calcule a tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto T = (x, f(x)) pelo método do Polinômio.

4.1.2 Analisando as atividades

Nesta etapa, fizemos uma análise das respostas dadas pelos entrevistados. Entregamos a cada aluno um texto com um exemplo de cada um dos métodos históricos e ainda resolvemos expositivamente o exemplo. Em seguida os alunos resolveram outro exemplo, podendo consultar todo o material impresso e ainda os apontamentos do quadro.

Na primeira atividade eles ficaram um pouco tímidos. Alguns se levantaram para ajudar os demais colegas e discutiram bastante, entre eles, cada passo da atividade.

Na segunda e terceira atividades eles já se sentiram mais a vontade, levando pouco mais de 15 minutos para responder as mesmas.

Na quarta atividade (método de Descartes), onde se exigiu mais conhecimento algébrico, os alunos reclamaram de certas dificuldades, mas, ainda sim, conseguiram resolvê-la.

Na quinta atividade os alunos já estavam cansados, e alguns deixaram de resolvê-la ou mostraram somente boa vontade, mas os alunos que tentaram a atividade conseguiram resolver.

Quando todos os alunos já estavam terminando de responder o questionário, apareceu um aluno que queria participar da atividade, então o pesquisador sugeriu que este aluno tentasse responder estas 5 atividades e o questionário depois e entregasse para o pesquisador em um outro momento, assim este aluno respondeu todas as atividades e o questionário e entregou para o pesquisador depois de 3 dias. Esta análise será feita separada das demais no item 4.1.2.6, pois este aluno não teve nenhum contato com a explicação dos métodos utilizados, teve somente a cópia impressa das atividades.

Acreditamos que se este aluno conseguir resolver os métodos somente seguindo a atividade, a sequencia terá um imenso valor para seu aprendizado, e teremos indícios que vale a pena o professor de Cálculo Diferencial e Integral utilizá-la em suas aulas, mostrando um grande apoio didático pedagógico para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Cálculo.

4.1.2.1 Critérios de Análise das Atividades

Nosso critério de análise das atividades se baseia em cinco categorias:

1) Totalmente (T): Critério atribuído para aquele aluno que conseguiu realizar toda a atividade sem nenhum erro;

2) Parcialmente (P): foi aquele aluno que errou algum algebrismo no meio do processo, mas percebe-se que ele entendeu o método utilizado;

3) Boa Vontade (V): foi aquele aluno que demonstrou ter boa vontade em aprender o processo, mas seus erros não validam seu aprendizado;

4) Em Branco (B): foi aquele aluno que deixou em branco a atividade, mesmo após entregá-la com sua identificação fictícia;

5) Não Entregaram: foi aquele aluno que por algum motivo não entregou sua atividade para análise.

4.1.2.2 Análise da Atividade 1 – Método de Fermat

Foi sugerido aos entrevistados que resolvessem a derivada de $F(x) = x^3 + 3x^2$ em um ponto genérico da curva pelo método de Fermat. Após a atividade, foi sugerido que eles calculassem a derivada pelo método moderno ensinado nos dias de hoje para efeito de comparação. Aqueles que também fizeram a atividade pelo método moderno disseram que "estavam tirando a prova".

Percebemos assim uma boa aceitação do método, pois 28 dos entrevistados conseguiram resolver totalmente esta atividade pelo método proposto; 8 a resolveram parcialmente e 2 alunos demonstraram boa vontade em resolvê-las.

4.1.2.3 Análise da Atividade 2 – Método de Barrow

Fornecemos aos entrevistados a mesma função pedida no método de Fermat para se determinar o valor da derivada em um ponto genérico da curva, agora usando o método de Barrow.

Novamente o objetivo de se resolver a atividade pelo método proposto foi satisfatório, pois quase todos os alunos (35 exatamente) conseguiram resolver a atividade totalmente, somente 2 alunos a resolveram parcialmente e um único demonstrou boa vontade em resolvê-la.

4.1.2.4 Análise da Atividade 3 – Método de Newton

Novamente a função utilizada nesta atividade foi a mesma, $F(x) = x^3 + 3x^2$, desta vez utilizando-se o método de Newton. A vantagem de se trabalhar com a mesma função é a de que o aluno já sabe que resposta ele deverá encontrar quando calcular o valor da derivada em um ponto genérico da curva pelo método de Newton.

Grande parte dos alunos (31 exatamente) conseguiram resolver totalmente este método, com mais 3 alunos que resolveram parcialmente, mais 3 alunos que demonstraram boa vontade em resolver e somente 1 aluno não entregou a atividade.

4.1.2.5 Análise da Atividade 4 – Método de Descartes

A maioria dos alunos (32 exatamente) conseguiu resolver totalmente este método, com mais 5 alunos que resolveram parcialmente e somente 1 aluno deixou em branco a atividade.

4.1.2.6 Análise da Atividade 5– Método dos Polinômios

A atividade ficou de certa forma prejudicada porque os alunos preferiram responder rapidamente e passar ao questionário para ir embora.

Assim, 27 resolveram totalmente, 2 resolveram parcialmente, 5 tiveram boa vontade para resolver mas não chegaram a bom termo e 4 alunos simplesmente deixaram em branco a atividade.

4.1.2.7 Análise à parte

Diz respeito a um aluno que resolveu a atividade em casa.

O referido aluno resolveu parcialmente a atividade 1 e totalmente as demais atividades. Este fato de certa forma tornou-se interessante no contexto do trabalho, pois serviu para mostrar que a sequência era auto instrutiva, ou seja, os sujeitos poderiam ter respondido o questionário sem a assistência do professor.

4.1.2.8 Quadro resumo sobre os infinitésimos

O quadro abaixo compara as quantidades desprezíveis de Fermat, Barrow e Newton com os infinitésimos do Cálculo moderno.

Métodos	**Quantidades desprezadas**	**Relação com a notação de infinitésimos do Cálculo Moderno**
Fermat	E	dx
Barrow	e ; a	dx ; dy
Newton	o (*)	dt
Descartes	Não utiliza estes conceitos	____________

(*) Esta notação aparece no método dos fluxões desenvolvido por Newton sempre associada a $\dot{x}$, $\dot{y}$. Assim, por exemplo, $\dot{x}o$ representa no, Cálculo moderno, $\frac{dx}{dt}$ *dt.*

4.2. Apresentando o Questionário

Antes da aplicação da sequência foi elaborada uma análise "*a priori*" de cada uma das questões, apontando aquilo que se esperava como resposta pelos alunos.

Depois de aplicada, foi elaborada também uma análise "*a posteriori*" contendo comentários das respostas e sugestões dos alunos, além de uma comparação com aquilo que se esperava "*a priori*".

A análise à priori leva em conta nossa expectativa de respostas dos entrevistados para cada questão; qual era o objetivo de cada uma; o que esperávamos encontrar de respostas; que conhecimentos eles puderam adquirir com estas atividades. Quanto a análise à posteriori definimo-la como sendo a análise das respostas de cada um dos entrevistados a cada questão do questionário.

Agora podemos apresentar nosso questionário:

Questionário Final sobre a sequência de ensino

1) Identificação (fictícia):____

2) Idade:

3) É repetente na disciplina de Cálculo I?

   a) Sim   b)Não.

4) Como você avalia esta sequência?

   a) Muito boa   b) Boa   c) Regular   d) Ruim

5) Se você fosse professor de Cálculo I, utilizaria estas atividades em sua prática pedagógica? Justifique.

6) Como você classificaria o uso da História da Matemática neste trabalho:

   a) Contribuiu para entender o conceito de derivada;

   b) Não contribuiu para entender o conceito de derivada;

   c) Não teve efeito maior do que o de despertar a curiosidade;

   d) Outros:____

Quanto aos métodos utilizados nesta sequencia.

7) Como você classificaria os métodos estudados neste trabalho?

   a) Contribuiu para entender o conceito de derivada;

   b) Não contribuiu para entender o conceito de derivada;

   c) Não teve efeito maior do que o de despertar a curiosidade;

   d) Outros:____

8) Existe alguma relação destes métodos com o método moderno de encontrar a derivada?

9) Comparando com o método moderno houve alguma mudança nestes métodos antigos?

10) Você percebeu alguma evolução na resolução do problema de tangente comparando os métodos antigo e moderno? Justifique:

11) Você acha que o método moderno para o cálculo da derivada é mais fácil que os de Fermat, Barrow, Newton ou Descartes? Justifique.

12) Comparando os métodos estudados, você considera algum mais eficiente que outro? Justifique.

13) As quantidades desprezíveis mencionadas por Fermat (E), Barrow (A e B) e por Newton (*o*) são abordadas no Cálculo Moderno?

a) Não

b) Sim. (De que maneira?)

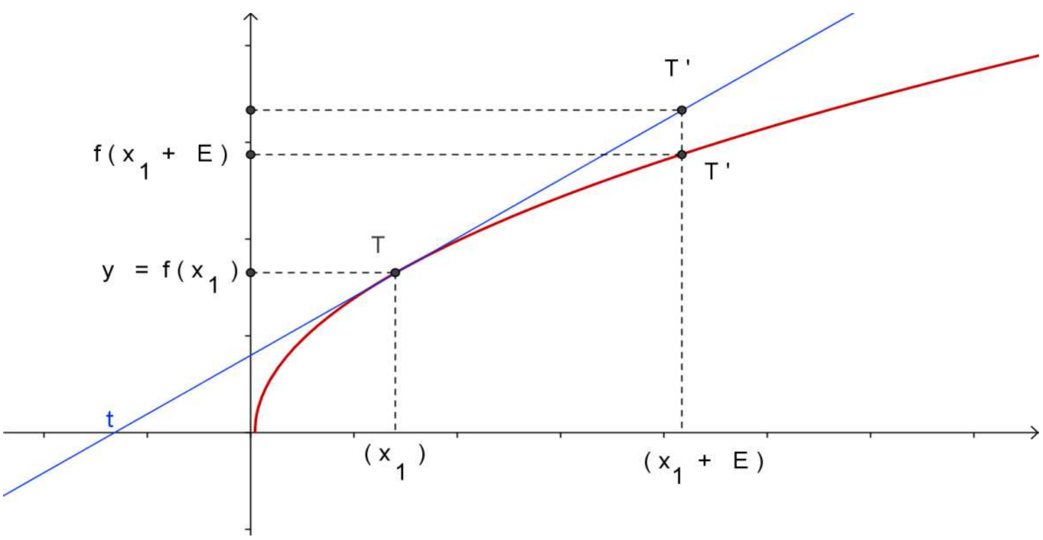
14) O conceito de reta tangente abordado por Fermat em seu método coincide com o conceito de reta tangente do Cálculo Moderno? Justifique.

15) O conceito de reta tangente abordado por Barrow em seu método coincide com o conceito de reta tangente do Cálculo Moderno? Justifique.

16) O conceito de reta tangente abordado por Descartes em seu método coincide com o conceito de reta tangente do Cálculo Moderno? Justifique.

17) Você percebe diferença entre os conceitos de reta tangente na ótica de Barrow e na ótica de Descartes? Explicite.

18) Fermat, em seu método, considera T ’ como sendo também um ponto da reta tangente à curva em T (veja figura abaixo). Isso significa que Fermat estava desprezando uma certa quantidade em seus cálculos. O que representa a quantidade desprezada por Fermat no *Cálculo* de hoje? (utilize notação do Cálculo Moderno para sua justificativa).



4.2.1 Analisando o Questionário

Para o desenvolvimento da pesquisa foi sugerido aos alunos que escolhessem um nome fictício para ser identificado, tentando preservá-los de qualquer tipo de constrangimento ao responder as questões. Eles acabaram escolhendo alguns nomes curiosos, que a nosso ver, iriam atrapalhar o desenvolvimento da pesquisa, decidimos então mudar estes nomes conforme a tabela abaixo e relacionamos também cada aluno com o seu respectivo curso.

Nº	**Nome Fictício fornecido pelo aluno**	**Nome Fictício escolhido pelo Pesquisador**	**CURSO**
01	Rayka	E1	Estatística
02	Juliana Paes	M1	Matemática
03	Fermat	M2	Matemática
04	Mãe Diná	E2	Estatística
05	Creuza	M3	Matemática
06	Judas	M4	Matemática
07	Tg θ	M5	Matemática
08	Lanterna Verde	M6	Matemática
09	Manjalino	E3	Estatística
10	J	M7	Matemática
11	Jovic	E4	Estatística
12	Em Branco	E5	Estatística
13	Florzinha	E6	Estatística
14	Lobato	M8	Matemática
15	Luluzinha	E7	Estatística
16	Lindinha	E8	Estatística
17	Ton	M9	Matemática
18	Carmem Miranda	M10	Matemática
19	Maria	M11	Matemática
20	Emanueli de Souza Euler	M12	Matemática
21	Otavio 01	E9	Estatística
22	Cat	M13	Matemática
23	Bombeiro	M14	Matemática

24	Tito	M15	Matemática
25	Aguinaldo A. Conceição	M16	Matemática
26	Cinderela	M17	Matemática
27	Bolão	E10	Estatística
28	Juju	M18	Matemática
29	Tiririca	M19	Matemática
30	Aluno 97	M20	Matemática
31	(°°°) _ Três pontinhos	M21	Matemática
32	Branca de Neve	M22	Matemática
33	Homem Aranha	E11	Estatística
34	Mulher Gato	E12	Estatística
35	Papai Noel	E13	Estatística
36	Jojô	M23	Matemática
37	Harry Potter	E14	Estatística
38	Tiradentes	E15	Estatística

Faremos agora a análise do questionário:

A questão 1 refere-se a identificação dos alunos e a 2, à sua faixa etária. Verificamos que a maioria dos alunos está na faixa etária 19 e 32 anos, sendo dois alunos com idade fora desta faixa: um de 41 anos e outro com 45 anos.

A questão 3 pergunta se o aluno é repetente na disciplina de Cálculo 1, oferecida pela Universidade Federal de Ouro Preto no 2º semestre de 2010. Os dados revelam que a maioria não era repetente, cerca de 23 alunos contra 14 que já tinham cursado esta disciplina anteriormente.

4.2.1.1 Análise *a priori e a posteriori*

Apresentamos agora as análises à priori e à posteriori de cada questão. As questões 1, 2 e 3 dispensam análise *a priori* e a *posteriori*.

Questão 4 à priori: Procuramos estabelecer uma sequência que despertasse interesse nos alunos. Esta questão pergunta justamente se eles gostaram da sequência.

Questão 4 à posteriori: O nosso objetivo quando elaboramos a sequência foi atingido, pois, dos 37 alunos entrevistados, 35 classificaram a sequência como boa ou muito boa e apenas 2 acharam que ela era regular ou ruim.

Questão 5 à priori: Nesta questão perguntamos se o aluno utilizaria as atividades propostas caso viesse a lecionar a disciplina de Cálculo 1. Em princípio, não sabíamos que tipo de resposta iríamos obter, uma vez que não conhecendo a turma e sabendo que alguns alunos não cursavam a Licenciatura em Matemática, mas sim o Bacharelado em Estatística, ficamos temerosos de que não houvesse interesse geral pela História da Matemática.

Questão 5 à posteriori: O nosso objetivo foi alcançado, uma vez que 27 alunos dos entrevistados responderam que sim, utilizaria a sequência integralmente; 07 alunos colocaram algumas restrições à sequência, dizendo que a utilizariam em parte ou apenas uma ilustração. Somente 4 dos participantes da atividade foram enfáticos em responder que não utilizariam a sequência.

Ainda que o questionário foi aplicado para 23 alunos do curso de Licenciatura em Matemática e 15 alunos do curso de Bacharelado em Estatística, sendo que estes últimos, supostamente não têm interesse direto pela História da Matemática, ainda assim um número respondeu que utilizariam a sequência total ou eventualmente.

> "... Sim, para que o aluno possa entender melhor o Cálculo no seu fundamento, para que o aprendizado do Cálculo não fique restrito a memorização". (E1)
>
> "... Sim, pois ajuda a compreender o processo da derivada". (M2)
>
> "... Se houvesse tempo suficiente, eu utilizaria. É uma prática que adiciona bastante conhecimento, porém é um pouco demorada". (M3)
>
> "... Entendo que a atividade serviria para implementar a disciplina, pois esta faz com que o aluno perceba a evolução dos cálculos e das fórmulas". (M5)
>
> "... Sim. Pois é uma maneira mais didática para poder trabalhar com os alunos. Dessa maneira o aluno se interessa mais pela disciplina". (E6)
>
> "... Sim. Pois através dela fica clara a metodologia desenvolvida no cálculo das derivadas". (M17)
>
> "... Sim, porque além de fundamentação (algébrica e geométrica) devemos transmitir e possuir fundamentação histórica. Isso

> possibilitará mostrar a aplicabilidade e é claro o quanto a Matemática evoluiu ao longo de sua história. (M12)

Esta última fala, nos remete as idéias defendidas por Polya sobre a evolução intelectual da raça humana:

> Quando se ensina um ramo da Ciência (ou uma teoria, ou um conceito) devemos deixar a criança traçar nele as grandes etapas da evolução intelectual da raça humana. (POLYA apud PRADO, 1990, p.15)

Iremos agora, analisar os questionários dos 4 alunos que alegaram não haver interesse em aplicar a sequência. Percebemos que 3 deles cursavam o bacharelado em Estatística. Alguns justificaram a resposta pela falta de tempo para desenvolver todo o conteúdo, enquanto outros alegaram grande dificuldade com o algebrismo dos métodos.

> “... Não, a carga horária é pequena e isso aumentaria no cronograma, podendo não dar tempo de terminar a disciplina”. (E14)
>
> “Não, porque estes métodos são mais difíceis”. (M11)

Percebemos também que três destes avaliaram a sequência como boa e que dois deles relataram que os métodos apresentados e o uso da História da Matemática contribuíram para o entendimento do conceito de derivada, sendo assim, apesar de alegar que não usariam em sua prática pedagógica, pelas outras respostas do questionário nota-se que eles assimilaram o conceito de derivada, conforme foi proposto no trabalho.

Questão 6 à priori: Nesta questão perguntamos a opinião do entrevistado quanto à contribuição da História da Matemática no Ensino de Cálculo. Trata-se de uma questão, que de certa forma, complementa a anterior, pois a nosso ver, os que responderam sim quanto à utilização da sequencia no seu magistério naturalmente vão dizer que a História da Matemática contribui para a compreensão do conceito de derivada e aqueles que responderam que utilizariam a sequencia eventualmente, provavelmente responderão que a história da evolução dos conceitos matemáticos é uma mera curiosidade.

Questão 6 à posteriori: Conforme a nossa análise *a priori* esperávamos um número grande de respostas positivas. De fato, a maioria respondeu que a História da

Matemática contribuiu para um bom aproveitamento das aulas de Cálculo; somente 4 alunos responderam que tratava-se de mera curiosidade e nenhum dos participantes achou que a História da Matemática não contribuiu. Mesmo os 4 alunos que disseram não utilizar a sequencia, caso fossem professores de Cálculo, não descartaram a utilização da História, pois dois deles alegaram que ela contribuiu e os outros dois classificaram como mera curiosidade.

Questão 7 à priori: O conteúdo envolvido nesta sequência relaciona-se a alguns métodos utilizados por determinados matemáticos do século XVII para determinar a tangente a uma curva qualquer. Nesta questão nossa expectativa era a de constatar que a opinião dos entrevistados fosse a de que estes métodos históricos contribuíram para o moderno conceito de Derivada de fato. Esperávamos que os alunos percebessem que, embora contivessem algumas imperfeições do ponto de vista da Matemática de hoje, estes métodos contribuíram para a evolução deste conceito.

Questão 7 à posteriori: Efetivamente a nossa opinião a priori prevaleceu já que 33 dos entrevistados alegaram que perceberam contribuição destes métodos para o conceito moderno e apenas 4 alegaram que não viram tal contribuição, pois encararam estes processos como uma mera curiosidade.

Questões de 8 a 10 à priori: As questões de 8 a 10 serviram para examinar se o aluno entrevistado percebeu semelhanças ou diferenças entre os métodos antigo e moderno para o cálculo da derivada e ainda se houve alguma evolução do primeiro para o segundo.

Questão 8 à posteriori: Somente um aluno não percebeu a relação e 7 alegaram que não existe esta relação. A grande maioria, ou seja, 30 dos entrevistados foi enfática em afirmar que esta relação é clara.

> "... Sim, uma vez que mesmo sendo de uma forma muito indireta, um método está ligado ao outro. Porém os que mais assemelham-se ao utilizado atualmente são de Descartes e dos Polinômios..." (M12)
>
> "... Não, as fórmulas não são deduzidas apenas memorizadas". (E1)
>
> "... Existe relação sim, no entanto, os alunos não a conhecem, por isso acredito que esse tipo de atividade deve ser implementada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I". (M5)

Parece-nos nesta última fala que o entrevistado além de perceber a diferença entre os métodos antigos e o método usado nos dias de hoje, aprova a aplicação desta sequência, pois acredita que a mesma contribuiu para seu aprendizado.

Questão 9 à posteriori: Quase todos os entrevistados (exatamente 35) perceberam que existem muitas modificações entre os métodos apresentados e o método atual, o que corresponde às nossas expectativas. Analisando os depoimentos, observamos que o aluno percebeu a evolução dos métodos antigos, relatando também a grande facilidade do método moderno em comparação com os antigos.

> “... Sim. Hoje em dia, os métodos são mais simples, pois com o passar dos anos, os métodos foram aperfeiçoados e simplificados”. (E2)

Entre os questionários respondidos um apresentou uma resposta pouco precisa: a questão 9 pergunta se houve alguma mudança nos métodos aprendidos com os do cálculo moderno e o entrevistado M19 respondeu que “...não, apenas algumas generalizações”.

Questão 10 à posteriori: Complementando a resposta anterior verifica-se que a maioria percebeu a evolução do conceito.

> “... A facilidade de resolver nos dias de hoje é através de uma decoreba, no método antigo dá para entender o processo”. (M23)

Esta resposta nos remete às considerações de Meyer (2003):

> Tenho observado que muitos de nossos alunos, após cursarem a disciplina de Cálculo I, são capazes de determinar a função derivada de diversas funções, utilizando-se de regras e procedimentos algébricos, ou mesmo, de reproduzir a definição formal de derivada de uma função. Mas, freqüentemente, produzem significados para este conceito que não são compartilhados pela comunidade matemática e, portanto, não correspondendo aos significados pretendidos pelo sistema educacional. (MEYER, 2003, p. 4)

Neste trabalho procuramos justamente enfatizar o entendimento do conceito, e acreditamos que este objetivo tenha sido alcançado.

Questão 11 à priori: Nesta questão pretendemos comparar as facilidades do método moderno para o cálculo da derivada com as dificuldades encontradas por Fermat, Barrow, Newton ou Descartes no cálculo das tangentes, no século XVII. Sendo assim, pergunta-se qual dos métodos é mais fácil o moderno ou o antigo. Esperamos que os alunos respondam que o método moderno é mais fácil, dado que não se tinha na época a metodologia que se tem hoje, mesmo sabendo que foram os métodos antigos os precursores do método moderno.

Questão 11 à posteriori: A grande maioria (para ser mais exato, 34 entrevistados) acharam o método moderno mais fácil; somente 3 responderam que o método de Fermat é mais simples. Vale a pena reproduzir as observações destes alunos.

> "Não, o método moderno exige novos conhecimentos". (M1)
>
> "Não, mas precisamos aprender bastante álgebra". (M8)
>
> "O método de Fermat é mais fácil, pois você consegue entender melhor as ferramentas usadas". (M16)

Esta última fala nos remete a fala de Descartes que mesmo a contra gosto afirmou que o método de Fermat era mais fácil.

Questão 12 à priori: Esta questão procura verificar se o entrevistado enxerga alguma eficiência maior em um dos métodos apresentados, em comparação com os demais.

Questão 12 à posteriori: Houve um certo equilíbrio entre as respostas. Somente o método de Descartes não agradou devido ao seu grau de dificuldade. Apenas um entrevistado percebeu eficiência neste processo.

> "... todos são bons, mas os métodos de Newton, Descartes e do polinômio se aproximam mais do Cálculo de hoje. (M15)".

Um grupo de 15 alunos percebeu eficiência em todos os métodos.

Questão 13 à priori: Esta questão exige mais conhecimentos do aluno do que seja uma *diferencial*. Espera-se que o aluno perceba que as grandezas desprezíveis mencionadas por Fermat *(E),* Barrow *(A,B)* e por Newton (*o*) em seus métodos estão diretamente relacionadas ao conceito moderno das diferenciais (frequentemente denotadas por *dx*, *dy*, *dt* etc).

Questão 13 à posteriori: Nesta questão obtivemos 13 respostas afirmativas, e 23 negativas. Conforme já dissemos na análise à priori, existe uma certa dificuldade em perceber as diferenças teóricas apontadas nesta questão, e isto pôde ser percebido de acordo com as respostas dadas pelos alunos a seguir:

> “... Através das constantes, que somem na derivação”. (M3)
>
> “...Creio que são abordadas como sendo as constantes que ao derivar, tem valor zero”. (M4)
>
> “... Sim é o número infinitesimal que hoje é visto como limite de x $\to a$”. (M5)

Percebemos que uma entrevistada não entendeu bem a pergunta, pois a mesma respondeu que as quantidades desprezíveis mencionadas por Fermat, Barrow e Newton eram eliminadas quando se resolvia o produto notável na substituição de x por x + a (a é uma constante).

Questões de 14 a 16 à priori: As questões de 14 a 16 procuram verificar se os alunos perceberam detalhes mais específicos na evolução do conceito de Derivada. Não esperamos que os alunos percebam todos estes detalhes com tanta sutileza. Mais especificamente estas questões servem para nos dizer se o aluno compreendeu bem o conceito de tangente a uma curva, da relação deste conceito com o de derivada e se soube distinguir/relacionar a abordagem deste conceito dada no século XVII com o conceito abordado nos dia de hoje.

Questão 14 à posteriori: a maioria (33 entrevistados) respondeu corretamente que sim, existe coincidência as justificativas são interessantes e mencionamos algumas a seguir:

> “... Sim, mas Fermat não tinha a noção de limite que possuímos hoje”. (E1)
>
> “...Sim, porque mesmo sem saber (pois ainda não existia) o conceito de limite, que é princípio para a Derivada”. (M12)

Três alunos afirmaram que não existe coincidência e um deles justificou a sua resposta de modo curioso:

> “Não, ele fazia divisão por zero”. (M15)

Questão 15 à posteriori: No método de Barrow a dificuldade está em considerar a tangente como um “limite” de secantes, sem ter o conceito de Limite. Daí o equilíbrio daqueles que responderam sim (15 alunos) com os que responderam não (19 alunos).

> “Não, pois a reta utilizada é secante no ponto”. (M3)
>
> “Não, porque a reta é secante”. (M4)

Questão 17 à priori: Nesta questão espera-se que o aluno perceba que Barrow (assim como também Fermat), em seu método, introduz o conceito de reta tangente como limite de retas secantes, sem se dar conta de que estava colaborando com a criação de um dos conceitos mais fundamentais do cálculo que é o de diferencial (naquela época nem mesmo ainda existia o conceito de limite), o que faz de seu método ser fundamentalmente diferente do de Descartes já que esse último não faz uso desses conceitos, mas apenas resolve o problema usando-se apenas de conhecimentos puramente geométricos: Descartes aproveitava o conceito já conhecido de tangente à uma circunferência e a partir dele criava a tangente a uma curva qualquer.

Questões 16 e 17 à posteriori: O método de Descartes está enfocado nas questões 16 e 17. Pretendíamos verificar se o entrevistado consegue perceber que Descartes contornou de modo altamente inteligente a falta do conceito de Limite o que não ocorreu com os outros métodos. Trata-se de uma diferença sutil, mas felizmente um dos entrevistados percebeu o detalhe.

> “... O método de Descartes é o que mais se aproxima, pois ele não descarta o número infinitesimal”. (M5)

Questão 18 à priori: Consideramos esta questão como a mais difícil do questionário, pois o aluno precisa de um conhecimento mais elaborado sobre *diferenciais* do cálculo moderno para respondê-la. Ela pergunta qual era a quantidade desprezada no método de Fermat quando ele considerava T ’ tanto como ponto da reta tangente em T, como ponto da curva. Sendo assim, era necessário que os alunos fizessem alguns cálculos para encontrar na notação moderna qual era esta quantidade desprezada.

Na verdade, quando Fermat considera

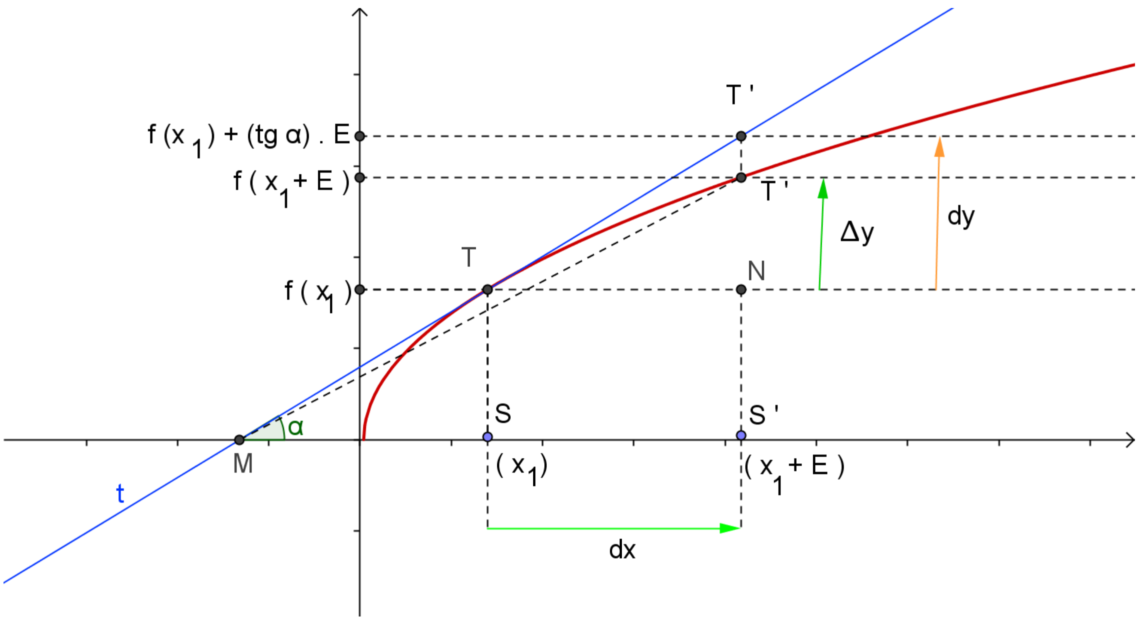
$$T'(x_1 + E, f(x_1 + E))$$

ponto da curva, não há nada de errado com tal afirmação, pois em notação moderna, sabemos que a quantidade *E* trata-se, na verdade, de um pequeno incremento na variável *x*, denotada por *dx*. O “problema” ocorre a partir do momento em que Fermat considera *T’* como sendo também ponto da reta tangente. Ao fazer isso, Fermat negligencia o pequeno segmento que “separa” a reta tangente da curva e que esta contido na reta vertical passando por *T’*. Hoje sabemos que este segmento nada mais é do que a diferença (veja figura abaixo)

$$|f(x_1 + E) - f(x_1) - (tg\ \alpha)\cdot E\,|.$$

Na notação moderna a diferença acima é representada por:

$$\left|\Delta y - \frac{dy}{dx}\cdot dx\right| = |\Delta y - dy|$$



Questão 18 à posteriori:

Conforme nossa análise à priori percebemos que metade dos entrevistados deixou esta questão em branco e a outra metade acabou se confundindo ao responder "que a quantidade desprezível era o próprio limite ou constantes". Somente um entrevistado respondeu de forma meio vaga a esta questão:

> "... uma quantidade muito pequena, quase zero". (E5)
> "... são constantes". (M3)
> "... o limite que na época Fermat não possuía esta noção". (E1)

Faremos no seguinte capítulo deste trabalho as nossas considerações finais e apontaremos sugestões para pesquisas futuras que a nosso ver merecem um destaque importante.

CAPÍTULO 5 – Considerações Finais

À guisa de conclusão, tentaremos identificar algumas respostas à questão de investigação que serviu de guia norteador para a nossa análise:

Como o conceito de derivada pode ser explorado a partir do uso da História da Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral?

Acreditávamos que o uso dos métodos desenvolvidos por Fermat, Barrow, Newton e Descartes, se utilizados para reforçar a idéia moderna de derivada, poderiam contribuir de forma significativa para um bom aprendizado.

Após a realização de nossa pesquisa percebemos que a sequência apresentada se mostrou como um produto de aceitação entre os entrevistados, pois 36 alegaram que ela era muito boa ou boa e que o uso da História da Matemática e dos métodos antigos contribuíram para o entendimento do conceito de derivada o que justifica a fala de Mendes:

> Podemos considerar... que o uso da história como recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensino-aprendizagem da matemática que permita uma ressignificação do conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos. Com essa prática, acreditamos ser possível imprimir maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula durante nossa ação docente, pois esperamos que esse modo de encarar o ensino da matemática possa se constituir em um dos agentes provocadores de ruptura na prática tradicional educativa vivida até hoje nas aulas de matemática. (MENDES, 2006, p.84)

Cabe esclarecer que o método moderno trata o conceito de derivada de modo claro e objetivo; e as aplicações, se bem trabalhadas, ajudam a melhorar a assimilação do conceito. Geralmente os alunos não entendem a definição de derivada, apenas decoram as regras de derivação em atividades de fixação do conceito. No entanto, a análise do questionário mostrou que os alunos ficaram mais motivados ao tomarem conhecimento dos métodos históricos que acabaram facilitando a compreensão da forma moderna de se aprender derivada.

Para confirmar esta alegação vale a pena transcrever as opiniões de alguns participantes, principalmente pelo procedimento mecânico que eles reconhecem no modo tradicional de apresentar o conceito de derivada. Segundo esses alunos esta sequência foge da memorização de técnicas, sendo assim, contribui para aprendizado:

> "... eu utilizaria para que o aluno não fique restrito a memorização" (E1);
>
> "... A facilidade de resolver nos dias de hoje é através de uma decoreba, no método antigo dá para entender o processo". (M23)

Relembrando os objetivos deste trabalho:

- Contribuir para a discussão sobre o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral a partir de seus fundamentos epistemológicos relacionados ao conceito de derivada;
- Apresentar uma sequência de ensino que permita ao aluno explorar o conceito de derivada dentro de uma perspectiva histórica.

Podemos perceber que as opiniões dos alunos vêem de encontro a estes objetivos e também reforçam das idéias de Meyer que alega terem os alunos grande facilidade em encontrar a função derivada, mas acabam ficando sem entender o conceito. Neste trabalho procuramos justamente reforçar o entendimento do conceito de derivada e parece-nos que este objetivo foi alcançado.

Por outro lado, estas respostas também nos fazem lembrar do uso de algoritmos e regras a serem seguidas pelos estudantes, para alcançarem os objetivos desejados, não só são decorados, como também em curto intervalo de tempo acabam sendo esquecidos e além disso, existe uma grande dificuldade dos professores em justificar tais regras e algoritmos. Com o uso da História da Matemática, podemos amenizar um pouco esta questão:

> É comum também o professor ter dificuldades para justificar tais regras. Muitos professores, buscando dar condições de melhor compreensão a seus alunos, ao justificarem os algoritmos o fazem mostrando somente o que está por trás desses procedimentos. De modo, tem-se a impressão de que os algoritmos permaneceram imutáveis ao longo do tempo. Um conhecimento da História daria ao professor uma visão de como esses algoritmos foram sendo desenvolvidos e modificados com o passar do tempo até chegarem a sua apresentação atual. (PRADO, 1990, p. 30)

Para finalizar destacaremos alguns pontos positivos e negativos que percebemos no trabalho.

Como pontos positivos destacamos que foi válida a aplicação desta sequência de ensino, pois acreditamos que ela forneceu dados relevantes sobre o uso da História da Matemática na Educação Matemática, dentre eles podemos destacar as inúmeras razões destacas por Fauvel apud Mendes (1991):

- A história aumenta a motivação e a aprendizagem da matemática.
- Humaniza a matemática.
- Mostra o seu desenvolvimento histórico através da ordenação e apresentação de tópicos do currículo.
- Os alunos compreendem como os conceitos se desenvolveram.
- Contribui para as mudanças de percepções dos alunos com relação à matemática.
- A comparação entre o antigo e o moderno estabelece os valores das técnicas modernas a partir do conhecimento desenvolvido ao longo da história da sociedade.
- Pode apontar possíveis aspectos conceituais históricos da matemática que dificultam a aprendizagem dos estudantes.
- Ajuda a explicar o papel da matemática na sociedade.
- Faz da matemática um conhecimento menos assustador para os estudantes e para comunidade em geral. (FAUVEL apud MENDES, 2006, p.86)

Como pontos negativos devemos considerar primeiramente o fato da sequência ter sido aplicada em um único dia, pois realmente concordamos com os alunos que é muita informação e muito detalhe para prazo tão reduzido. Isto inclusive gerou uma certa frustação ao percebermos que a questão 18, uma das mais importantes do trabalho, foi pouco compreendida pelos alunos, levando muitos deles a deixá-la em branco. Em segundo lugar lembramos que esta atividade foi aplicada no final do semestre letivo e que os alunos estavam também preocupados com as provas finais, o que pode ter influenciado na dedicação, principalmente em responder a última atividade (método do polinômio) e o questionário final.

Sugerimos aos professores que irão adotar esta sequência, que divida ao longo das aulas os métodos utilizados, pois os achamos ricos em informação para o entendimento do conceito de derivadas.

Por fim, acreditamos que este trabalho tenha se revelado como motivador para a continuidade de nossa pesquisa relacionada ao Ensino de Cálculo, o que pretendemos fazer em futuros estudos, agora com o conceito de Integração.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo, **Várias Faces da Matemática; Tópicos para a Licenciatura e leitura geral**, Ed. Blucher, São Paulo, 2002, 182p.

ÁVILA, Geraldo, **Análise Matemática para a Licenciatura**, 3ª edição, Ed. Blucher, São Paulo, 2006, 246p.

BORBA, Marcelo C. e ARAÚJO, Jussara L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Autêntica Editora, Belo Horizonte 2006, 118p.

BARON, Margaret E. e BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Ed. Universidade de Brasília, Brasília 1985, vols. 3 e 5, 74p e 50p.

BOYER, Carl B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**, Ed. Atual, São Paulo, 1992, 93p.

BOYER, Carl B., **História da Matemática**, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1974, 488p.

BRAGA, Theodoro, **Desenho Linear Geométrico**, Icone editora, São Paulo, 1997, 229p.

CASSOL, Armindo. **Os significados possíveis para o Conceito de Derivada**. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 1998.

DALL'ANESE, Cláudio. **Conceito de Derivada: Uma Proposta para seu Ensino e Aprendizagem.** 2000. Dissertação de Mestrado, PUC- SP, São Paulo, 2000.

EVES, Howard, **Introdução à História da Matemática**, Ed. Unicamp, Campinas, 2002, 843p.

EUCLIDES, tradução e introdução: Irineu Bicudo. **Os Elementos**, Editora Unesp, São Paulo, 2009, 600p.

FLICK, Uwe. **Introdução à Pesquisa Qualitativa**, 3ª edição. Artmed Editora, Porto Alegre, 2009, 405p.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**, Editora livraria da Física, São Paulo, 2006, 346p.

IEZZI, Gelson, **Fundamentos de Matemática Elementar 7: Geometria Analítica**, 5ª edição, Atual, São Paulo, 2005, 282p.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A. e VALDÉS, Juan E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática. –** Porto Alegre: Sulina, 2006. 182 p.

MENDES, M. **Dificuldades no Ensino de Cálculo**. Dissertação de Mestrado. UFRN. Natal, 1994.

MEYER, Cristina. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual.** 137 p. Tese de Mestrado em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2003.

MIGUEL, Antonio e MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Autêntica Editora, Belo Horizonte, 2004, 200p.

LEGOFF, Jaques, **Por amor às Cidades**, Ed. USP. São Paulo, 1988,160p.

POSKITT, de Kjartan. **Mortos de Fama. Isaac Newton E Sua Maçã**. São Paulo: CIA. das Letras, 2001, 192p.

PRADO, Elma Luiza Beraldo. **História da Matemática: Um estudo de seus significados na Educação Matemática**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista. UNESP, Rio Claro, 1990, 77p.

REIS, Frederico S. **A tensão entre rigor e intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação – Universidade de Campinas. UNICAMP, 2001.

RICIERI, Aguinaldo Prandini, ***Assim* nasceu o Cálculo; origens de Derivadas e Integrais**, Ed. Prandiano, São José dos Campos, 1993, 112p.

RICIERI, Aguinaldo Prandini, **Matemático e Louco; Todos somos um pouco**, Ed. Prandiano, São José dos Campos, 1989, 227p.