UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS-ICEB

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA ATIVIDADE SOCIALMENTE REFLEXIVA ENVOLVENDO A TRANSFORMAÇÃO DERIVADA E SUA INVERSA

Antonio Augusto Ferreira de Assis

Ouro Preto

Janeiro 2013

AGRADECIMENTOS

À minha família e amigos que tantas vezes precisaram compreender minha ausência e me apoiaram na caminhada.

Aos colegas Newton, Wellington e Ivan pelos momentos de apoio, conversas frutíferas e momentos de lazer durante o curso.

Aos colegas de profissão: Danny, Jana, Luiz e Marcos que sempre me ouviram, discutiram questões pertinentes à docência e que se tornaram grandes amigos nos últimos anos.

Aos professores Ana Cristina, Regina e Frederico que tanto me auxiliaram e amparam neste tortuoso percurso.

A meu orientador, professor Dale Bean, que soube dosar a cobrança, a paciência e intervenções necessárias para que o trabalho pudesse ser concluído.

“Quando dois homens trocam pães,

cada um volta pra casa com um pão.

Quando dois homens trocam ideias,

cada um volta pra casa com duas ideias.

(Sidharta Gautama)

Resumo

Esta pesquisa teve sua origem baseada em estudos e inquietações, ocorridos nas experiências discentes e docentes, do pesquisador. Utilizamos algumas partes de nossa iniciação científica, em aplicações da álgebra linear ao cálculo em uma variável real, que oferecem maior potencial pedagógico para o ensino destas disciplinas. Algumas dessas ideias são apresentadas no início da dissertação. Apropriamos da ideia do pensamento reflexivo e as fases da atividade reflexiva de Dewey (1959) para compreender como uma atividade socialmente reflexiva, utilizando-se de conceitos matemáticos, auxilia na mobilização de saberes dos estudantes. Os participantes na pesquisa de campo foram estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. A dinâmica da atividade foi desenvolvida com base em nossas interpretações de investigações matemáticas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006), incentivando os estudantes a assumir uma postura mais ativa dentro da sala de aula, de modo que os mesmos procurassem conjecturar, inquirir, prever e verificar os resultados de forma social. Também utilizamos a teoria RBC (*Recognizing, Building-with and Constructing*) para auxiliar na compreensão das abstrações matemáticas e da parte social de construção de um conhecimento compartilhado ocorridas ao longo da atividade. A atividade foi filmada e foram feitas transcrições do áudio, notando gestos que serviriam como meios de expressão ou comunicação matemática. A análise qualitativa de conteúdos (LUNDMAN; GRANEHEIM, 2004) foi utilizando para a análise dos dados. Os resultados do estudo demonstram que a mobilização de saberes mediados pela atividade socialmente reflexiva pode contribuir para a aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Pensamento reflexivo, Teoria RBC, Álgebra Linear, Cálculo.

Abstract

The origin of this research is based on studies and concerns related to the researcher's experiences as a student and teacher. We use part of our undergraduate research in applications of linear algebra to calculus of one real variable that has shown to have pedagogical potential for teaching of these subjects. Some of the ideas of the undergraduate study are presented in the opening part of this dissertation. We appropriate the idea of reflective thinking and the phases of reflective activity of Dewey (1959) in order to understand how a socially reflexive activity, using mathematical concepts, helps mobilize student knowledge. The field research involved students in the teacher education program at the Federal University of Ouro Preto in a Linear Algebra class. The dynamic of the activity was developed based our interpretations of mathematical investigations (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006), encouraging students to take a more active stance in the classroom in a way that they sought to conjecture, inquire, predict and verify results in a collaborative manner. We utilized the RBC (Recognizing, Building-with and Constructing) theory to help understand the mathematical abstractions and the social construction of shared knowledge that occurred during the activity. The activity was filmed and the audio transcribed, noting corporal gestures that served as means for mathematical expression and communication. Qualitative content analysis (LUNDMAN; GRANEHEIM, 2004) was used for the analysis of the data. The results of the study show that knowledge mobilization mediated by socially reflective activity can contribute to the learning of Mathematics.

Keywords: Reflective thinking, RBC theory, Linear Algebra, Calculus.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apresentaremos, na introdução, as ideias que serviram como base e inspiração para o desenvolvimento da pesquisa à qual essa dissertação se refere. Também aproveitaremos a introdução para fazer minha apresentação e para, sucintamente, apresentar como foi se desenvolvendo a concepção do trabalho e nossas inquietações que conduzirão aos objetivos e à questão da pesquisa.

A concepção da ideia

Me graduei em licenciatura de Matemática pela Universidade Federal de São João Del Rey (UFSJ). Durante minha graduação, entre 2005 e 2008, cursei a disciplina de Álgebra Linear sem maiores problemas e sem grandes aspirações. Apesar do meu interesse por Álgebra de forma geral, devido ao fato de não ter enfrentado dificuldades durante o curso, acabei por passar insensivelmente por vários dos tópicos estudados. Não fui capaz de enxergar, nem sequer, parte das possibilidades de uso de ferramentas que a Álgebra Linear apresentava.

Acabei, por acaso, fazendo minha iniciação científica utilizando a Álgebra Linear. Estava trabalhando sozinho em um problema que envolvia derivação e aproximação polinomial no qual acreditava existir maior potencial. Ao receber o convite para fazer iniciação científica, meu orientador sugeriu que mudássemos de tópico e, entre algumas opções, me apresentou um trabalho de Jack W. Rogers de título: “Algumas aplicações da Álgebra Linear ao Cálculo”. Após duas semanas, eu já estava bastante envolvido com o assunto e, depois de alguns meses, apaixonado pelo tópico.

Durante esse trabalho, precisei executar três tarefas: utilizar conceitos já estudados, aprender novos conceitos como, por exemplo, série de Fourier e até desenvolver alguns novos conceitos como um produto de matrizes não convencional. Nesse processo, percebi que, além de não ter, de fato, aprendido alguns conceitos de Álgebra Linear, não conseguia aplicar alguns outros conceitos também.

Assim surgiram questões sobre o porquê de não ter aproveitado tal disciplina. Mas estava tão envolvido com os resultados da iniciação científica que essa questão ficou em segundo plano, embora sempre voltasse à minha mente. Ao apresentar meu trabalho no Congresso de

Produção Científica da UFSJ, um professor veio me perguntar sobre a possibilidade de usar um dos modelos matriciais, desenvolvidos no trabalho, em uma pesquisa de mestrado que desenvolvia com uma aluna da instituição. Ainda no ano de 2008, fui convidado a apresentar meu trabalho na V Semana da Matemática (V SEMAT) da UFSJ, em forma de mini curso.

Assim que recebi o convite de voltar à instituição, fiquei muito empolgado. Havia me formado há cerca de um mês e ainda não estava lecionando. Então mergulhei em minhas crenças sobre aprendizagem, nos tópicos que mais me envolveram, e comecei a preparar uma apostila para o mini curso com toda energia que possuía naquele momento. Após esse convite, comecei a trabalhar como professor, fato este que diminuiu meu tempo, mas começou a me ajudar a ganhar experiência em lecionar. Esse material ficou um pouco extenso para um mini curso de quatro horas, mas como havia exemplos e explicações de alguns resultados, serviria a todos que se interessassem em continuar seus estudos no tema.

Durante esse minicurso, foram desenvolvidos os tópicos de derivação, integração e equações diferenciais, utilizando os modelos matriciais desenvolvidos na iniciação. Os espaços vetoriais trabalhados foram, principalmente, espaços com as bases:

a) $\{t^n e^{\alpha t}, ..., te^{\alpha t}, e^{\alpha t}\}$,
b) $\{sen(\beta t), cos(\beta t)\}$,
c) $\{e^{at}cos(\beta t), e^{at}sen(\beta t)\}$
d) $\{t^n cos(\beta t), t^n sen(\beta t), ..., tsen(\beta t), tcos(\beta t), sen(\beta t), cos(\beta t)\}$.

Outros tópicos foram apresentados de forma sucinta no final do mini curso, dentre eles a mudança de base para integrações com potências de seno e cosseno e série de Fourier. Percebi não só o envolvimento dos participantes como, também, recebi elogios e os ouvi de muitos que começavam a ver como utilizar Álgebra Linear. Durante esse mini curso, começou a ser gerada a ideia guia que me ajudaria a buscar respostas a algumas questões envolvendo a aprendizagem de Álgebra Linear.

Uma semana após o mini curso, entrei para a especialização em Matemática da UFSJ. E, na disciplina de Ensino de Matemática Superior, voltei a refletir sobre o mini curso e, um ano após, estava entrando no processo seletivo do mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Apresentei esta proposta no meu anteprojeto e passei o primeiro ano do curso para amadurecê-la como um trabalho de mestrado.

Ideia guia

Já no mestrado, desde o começo, foram necessárias várias adaptações deste trabalho para nos adequarmos às necessidades da pesquisa e do pesquisador. Mas nossa ideia guia jamais fora abandonada. Existia nela um conjunto de questões impossíveis de serem todas trabalhadas, mas havia uma enorme vontade de desenvolver uma atividade envolvendo Álgebra Linear e Cálculo que convidasse os alunos a se envolverem, discutirem, inferirem e terem uma atitude de pesquisadores.

Assim, desde o começo, nossos objetivos da atividade já estavam claros:

1. Utilizar das conexões internas da Matemática para provocar discussões sobre conceitos matemáticos diversos e apresentar essa ciência de uma forma mais próxima da qual a mesma é desenvolvida;
2. Desenvolver nos alunos uma maior autonomia sobre seu aprendizado, através de uma atividade que promova a criatividade, a apresentação de conjecturas, a argumentação, formulação de hipóteses e a consolidação dos resultados;
3. Melhorar a compreensão de conceitos como espaço vetorial, base de um espaço e transformações lineares com exemplos mais gerais para que a aprendizagem tenha maior possibilidade de ser consolidada.

Dessa forma, o trabalho nasceu inicialmente com algumas questões, mas com alguns objetivos que nos motivaram a buscar respostas a respeito do tema. Inicialmente, queríamos desenvolver um trabalho em que os estudantes tivessem uma postura de procurar por si mesmos alguns resultados, como em uma iniciação científica, utilizando ferramentas de Cálculo e Álgebra Linear. Assim nossa atividade foi sendo desenvolvida, enquanto buscávamos nossos referenciais teóricos e começávamos a realizar algumas experiências educacionais relativas ao tema ou ao tipo de postura.

O piloto desta pesquisa foi desenvolvido sob a forma de minicurso para alunos do curso de licenciatura em matemática da UFOP, da modalidade à distancia, que estavam cursando a disciplina de Álgebra Linear e se propuseram a participar de quatro encontros no sábado à tarde. Devido a questões de natureza pessoal, como horário de trabalho, compromissos pessoais ou dificuldades de comparecer ao polo de apoio presencial, o número de voluntários que participaram do projeto foi de três alunos, sendo duas alunas e um aluno. Apenas um dos três residia na cidade onde se localizava o referido polo. Esse pequeno grupo possibilitou olhar mais atentamente a demanda dos alunos, uma interação mais consciente de minha parte e um diálogo frequente sobre o caminho que tomava o trabalho.

Eu era tutor da turma desses alunos e já os acompanhava há pouco mais de um ano. Dessa forma, a tarefa de revisar alguns conceitos foi mais rápida devido ao fato de já conhecê-los. A atividade foi elaborada com a expectativa de se realizarem as seguintes tarefas:

> 1º dia: revisão dos conceitos necessários, matriz de diferenciação e de integração em um espaço vetorial específico;
> 2º dia: generalização para derivadas de maior grau e busca por outros espaços nos quais a invertibilidade é possível;
> 3º dia: algumas transformações que conduzam a espaços em que a integral é mais simples;
> 4º dia: equações diferencias.

Infelizmente, devido a uma mudança de datas do curso regular, foi necessário, após o primeiro encontro, retirarmos uma das datas e optamos por retirar a atividade prevista para o terceiro dia. Também durante o segundo encontro, os alunos se envolveram bastante e trouxeram novas questões que, devido às discussões que poderiam proporcionar, tornaram necessário dedicarmos mais tempo a elas no terceiro encontro. O fato acabou por prejudicar a abordagem planejada a respeito dos conteúdos e conceitos de equações diferenciais que demandava um tempo maior devido ao fato de ainda não terem cursado a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. Mas o importante era promover a discussão e privilegiar a construção que eles mesmos conduziriam. O resultado do piloto foi animador e contribuiu para clarear o trabalho que viria a ser realizado em sala de aula na pesquisa de campo. Ao final, todos receberam uma cópia digital da apostila que foi desenvolvida para a V SEMAT da UFSJ.

O piloto contribuiu para melhorar minha capacidade de interagir com os alunos e, também, para entender melhor como eles se comportam para trabalhar com as questões que envolviam disciplinas curriculares distintas. O número reduzido de alunos possibilitou um olhar mais aprofundado sobre suas inquietações e atitudes e me ajudou a elaborar a sondagem inicial que utilizaria na pesquisa.

Posteriormente a essas experiências, tive contato com a obra *Como Pensamos* de Dewey (1959), o que ajudou a lapidar algumas ideias sobre a atividade. De acordo com sua teoria e nossas crenças de que, em âmbito educacional, é muito importante que os estudantes desenvolvam a habilidade de pensar reflexivamente, procuramos elaborar uma atividade reflexiva que não só convidasse, mas estimulasse e contribuísse para uma atitude mais responsável, autônoma e positiva dos estudantes. Assim elaboramos uma atividade com pretensão que ela seja socialmente reflexiva e que pudesse ser aplicada a um grupo de estudantes, que serão incentivados a construir conhecimento de maneira compartilhada no entendimento de Hershkowitz et al (2007) e reflexiva conforme Dewey (1959). Com esta concepção, formulamos a seguinte questão para nortear a pesquisa:

Como uma atividade socialmente reflexiva mobiliza saberes em uma sala de aula de Álgebra Linear?

Diante desta questão, nosso principal objetivo é observar como essa atividade socialmente reflexiva despertará nos estudantes a necessidade de mobilizar saberes. Para isso optamos trabalhar com aplicações da Álgebra Linear ao Cálculo por acreditarmos ser adequado e, também, pela facilidade gerada por meus conhecimentos prévios neste tema.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. O primeiro refere-se aos conteúdos matemáticos que acreditávamos que poderiam ser evocados. O segundo traz nosso referencial teórico. No terceiro, apresentamos o planejamento e um resumo da atividade, descrição do local e os métodos e procedimentos utilizados para a realização deste trabalho. No quarto capítulo, será apresentada nossa interpretação e resultados obtidos assim como nossas considerações.

1- ALGUMAS APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR AO CÁLCULO

Neste capítulo apresentamos o trabalho do professor Rogers (1997) e os resultados de minha iniciação científica com intuito de ilustrar alguns dos possíveis conceitos e questionamentos que possam ser abordadas em uma atividade reflexiva com transformações lineares aplicadas ao cálculo diferencial e integral em uma variável real. Também discutiremos algumas das ideias envolvidas a respeito dos conceitos matemáticos utilizados e apresentaremos uma demonstração para o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que é uma das ideias que pode trazer boas discussões em relação ao nosso trabalho de forma matricial e suas possibilidades para a abordagem pretendida.

1.1 O TRABALHO REALIZADO PELO PROFESSOR ROGERS

Uma das áreas mais profícuas da Matemática é, sem dúvida, a Álgebra Linear, pois possui aplicações em quase todos os ramos do saber. E dentro da Álgebra Linear, o conceito de transformação linear e sua relação com as matrizes, está entre os que mais têm contribuído para esse sucesso.

Uma transformação linear *T* é uma função entre dois espaços vetoriais reais *U* e *V*, denotada por $T: U \to V$, satisfazendo a propriedade de "linearidade" expressa como

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2),$$

para todos os vetores $u_1, u_2 \in U$ e para todos os escalares $\alpha, \beta \in K$, K um corpo qualquer.

Como exemplos de transformações lineares, pode-se citar:

A) Algumas transformações do R^n no R^m, *T:* R^n no R^m, onde por R^n e R^m representa-se os espaços vetoriais euclidianos de dimensão *n* e *m* respectivamente*:*

- $T: R \to R, \quad T(x) = 2x$;
- $T: R^2 \to R^2, \quad T(x,y) = (3x - 2y, 5x + 3y)$;
- $T: R \to R^2, \quad T(x) = (3x, -5x)$;
- $T: R^3 \to R, \quad T(x,y,z) = -2x + 7y + z$;

B) Transformações envolvendo outros espaços vetoriais:

- $T: P_2 \rightarrow R^2, \quad T(p(x)) = \left(\int_0^1 p(x)dx, p(0) \right)$, em que P_2 é o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2;
- A derivação $D: C^1(R) \rightarrow C(R), \quad D(f) = f'$, em que $C(R)$ é o espaço vetorial das funções $f: R \rightarrow R$ contínuas e $C^1(R)$ é o espaço vetorial das funções $f: R \rightarrow R$ continuamente diferenciáveis;
- A integração $I_0: C(R) \rightarrow C(R), \quad I_0(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. $I_0(f)$ é a primitiva h de f satisfazendo $h(0) = 0$.

Pessoas que se iniciam em álgebra linear normalmente lidam com alguma facilidade e, muitas vezes, mecanicamente com transformações lineares como as dos primeiros exemplos citados que envolvem apenas os espaços vetoriais R^k, entretanto amiúde tem-se dificuldade ao se tratar com espaços vetoriais mais abstratos e custa-se a assimilar os conceitos de: base, mudança de base, matriz de uma transformação linear relativa a uma base, e outros mais similares às transformações lineares dos exemplos do bloco B.

Com o objetivo de motivar os estudantes de Álgebra Linear a enfrentarem essas dificuldades e expandirem seus conceitos, J. W. Rogers (1997) apresentou algumas aplicações das transformações lineares para resolver problemas conhecidos do cálculo diferencial e integral.

Em seu trabalho, Rogers (1997) começa por desenvolver uma matriz de diferenciação sobre um espaço genérico. Como um exemplo ilustrativo, ele construiu uma matriz *D* que representa a diferenciação em um espaço vetorial *U* com uma base *B = {sen(x), cos(x)}*. Para se construir a matriz, deve-se aplicar a transformação a cada vetor da base, cujos coeficientes entrarão como colunas. Dessa forma dizemos que tais coeficientes são as coordenadas deste vetor na base *B* e representaremos as coordenadas do vetor *u* na base *B* por $[u]_{B.}$

$$[D(sen(x))]_B = [cos(x)]_B = [0\ sen(x) + 1cos(x)]_B = [0, 1]_B$$

$$[D(cos(x))]_B = [-sen(x)]_B = [-1\ sen(x) + 0cos(x)]_B = [-1, 0]_B$$

Então a matriz que representa a derivação nesse espaço em relação à base B será:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_B$$

Logo na sequência, Rogers (1997) apresenta a primeira aplicação relativa à antiderivação. Assim ele argumenta que a matriz *D* admite inversa e exibe-a:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_B$$

E aplica essa matriz ao vetor *sen*(x)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (0, -1)_B$$

O equivalente a afirmar que

$$\int sen(x)dx = -\cos(x)$$

Naturalmente não se encontra a constante de integração que não está definida nesse espaço e que, quando derivada, estará no núcleo da transformação. O próprio Rogers reconhece que nesse espaço o método é pouco vantajoso devido à facilidade de se calcular as integrais de seno e cosseno.

Esta aplicação pode nos levar a boas discussões tanto sobre os conceitos de cálculo como sobre os conceitos de Álgebra Linear. Dentre elas, se sempre é possível se obter a integral de uma função por meio deste processo ou sobre o não aparecimento da constante de integração. Em nossa pesquisa de mestrado esta foi uma das transformações escolhidas para trabalharmos com a turma devido à facilidade e regularidade em se operar diferenciação e integração nesta base.

Então apresenta a integral $\int t^2 e^t dt$ que costuma ser bem trabalhosa para os estudantes. O procedimento natural é aplicar a integração por partes duas vezes e se obter

$$\int t^2 e^t dt = t^2e^t - 2te^t + 2e^t + c$$

Porém pode-se usar a álgebra linear para resolver esse problema. Seja o conjunto B = $\{t^2e^t, te^t, e^t\}$. Pode-se mostrar que ele é linearmente independente, logo é uma base do espaço vetorial por ele gerado que se denotará por U = $[t^2e^t, te^t, e^t]$. O espaço *U* é um subespaço vetorial de dimensão finita (três) do espaço vetorial de dimensão infinita *C(R)*. Para melhor elucidar, há de se pensar na transformação linear de derivação *D* sobre o espaço *U*, ao invés de *C(R)*, e como *D* deixa *U* invariante, ou seja, $D(U) \subset U$, tem-se $D: U \to U$, $D(f) = f' \ \forall f \in U$ e assim ao se optar por *U* diminui-se o grau de dificuldade ao se estudar as propriedades dessa transformação linear, pois é mais simples lidar com espaços de dimensão finita. Assim Rogers encontra a matriz de D relativa à base B, a qual denotará por $[D]_{\mathrm{B}}$. Se $[D(f)]_{\mathrm{B}}$ representa o vetor coluna de coordenadas de $D(f)$ relativo a B, então:

$$[D]_B = [\ [D(t^2e^t)]_B,\ \ [\ [D(te^t)]_B,\ [\ [D(e^t)]_B\ ]$$

e como $D(t^2e^t) = t^2e^t + 2te^t$, $D(te^t) = te^t + e^t$ e $D(e^t) = e^t$, obtêm-se:

$$[D]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e sua inversa } [D^{-1}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim calcula-se a integral feita anteriormente, bastando multiplicar a matriz $[D^{-1}]_B$ pelo vetor coluna $[t^2e^t]_B$ que é $[1, 0, 0]^T$, obtendo-se [1, -2, 2], cujo resultado é uma primitiva para t^2e^t em U.

Como a transformação linear D também é invertível sobre U e a matriz $[D^{-1}]_B$ é a matriz da transformação linear D^{-1} relativa à base B, consequentemente $[D^{-1}]_B$ passa a ser a matriz para a transformação integral sobre U relativa à mesma base B, ou seja, se $f \in U$ é uma função com vetor coluna de coordenadas $[f]_B$ relativo à base B, então $[D^{-1}]_B[f]_B$ será o vetor coluna de coordenadas relativo a B, de uma função em U cuja derivada é f (ou melhor, de uma primitiva ou integral indefinida de f). Desse modo, a transformação D^{-1} coincide com a transformação I restrita a U.

É conveniente notar que, nessa dedução, obtêm-se sucesso porque a matriz $[D]_B$ foi não singular. Cabem, pois, algumas perguntas como: É isso sempre possível? O que fazer se não o for? Como se obtém a base B ? Para que outros espaços essa aplicação é útil? Dentre outras que poderiam surgir influenciados pelas experiências individuais dos alunos.

Posteriormente, Rogers resolve uma equação diferencial linear de segunda ordem que, de modo geral, os alunos resolvem pelo método de variação de parâmetros, por meio da soma de matrizes de diferenciação de grau um e dois. Ou seja, transforma a EDO

$$y'' + y' + y = sen(x),$$

na adição de matrizes

$$D^2 + D + I_d = [sen(x)]_B, \text{ onde } B = \{sen(x), cos(x)\}$$

encontrando a solução particular dessa EDO de forma muito mais fácil e rápida.

Além desse trabalho, ele também utiliza uma mudança de base para resolver algumas integrações de potências trigonométricas e, por fim, apresenta conexões com as séries de Fourier e o polinômio de Chebyshev. Essas aplicações, embora estudadas em iniciação científica, não foram pensadas para este o trabalho devido ao fato de o tempo de execução do trabalho ser limitado para a aplicação de mudança de base e dos tópicos séries de Fourier e polinômio de Chebyshev estarem, ainda, fora do contexto dos alunos de Álgebra Linear I.

1.2 O TRABALHO DESENVOLVIDO NO PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

A proposta inicial do meu trabalho de iniciação científica era, inicialmente, compreender o artigo do professor Rogers e buscar responder algumas questões que foram deixadas. Posteriormente, chegar a alguns resultados a partir do estudo dessas questões e outros tópicos interessantes na mesma direção.

Iniciou-se este trabalho buscando encontrar um modelo para a matriz D^k que representaria a derivada de k-ésima ordem no espaço já citado adotando a base $B_3 = \{t^2e^t, te^t, e^t\}$. A tentativa natural foi buscar por diagonalizar a matriz $[D]_B$, mas concluiu-se, depois de algum trabalho, que essa matriz não era diagonalizável, pois seu polinômio característico possui raízes complexas.

Então procurou-se reconhecer algum padrão nas matrizes D, D^2, D^3, D^4... aplicadas aos espaços com bases de maior cardinalidade como, por exemplo:

a) $B_4 = \{t^3e^t, t^2e^t, te^t, e^t\}$
b) $B_5 = \{t^4e^t, t^3e^t, t^2e^t, te^t, e^t\}$
c) $B_6 = \{t^5e^t, t^4e^t, t^3e^t, t^2e^t, te^t, e^t\}$

onde, com a ajuda do software matemático *Scientific Work Place*, encontrou-se várias potencias da matriz D, ou seja, a matriz de sucessivas reaplicações da derivada, buscando observar algum padrão que pudesse convencer sobre a possibilidade de se conseguir exibir uma matriz que representasse a derivada de k-ésima ordem de um espaço dessa família com base de dimensão $n+1$. Devido à motivação pelo fato de se estar encontrando algum padrão de forma empírica, buscou-se exibir uma regra para D^k e, posteriormente, foi demonstrada sua autenticidade no trabalho.

Em nossa atividade de mestrado esperávamos que os alunos buscassem encontrar padrões e utilizar-se da inferência e empirismo. Assim, precisávamos estar atentos as possibilidades de direções que os estudantes poderiam vir a seguir. Duas destas possibilidades de direção que os estudantes poderiam seguir em nossa atividade eram tentar determinar as derivadas de maior grau sobre B_3 quando discutíssemos derivada segunda ou tentar operar com as bases similares mas com dimensão maior. Isto acabou por não ocorrer neste espaço e sim em outro como discutiremos em momento mais oportuno.

O próximo passo conduziu a encontrar uma forma para a matriz *I* que representaria a integração nesse mesmo espaço mais geral. Ao se conseguir, surge uma nova questão: Como relacionar os coeficientes das matrizes *D* e *I*? Esta questão cria uma busca em que se acaba por precisar do triângulo de pascal envolvendo números inteiros. Nesse tópico, consegue-se expressar as matrizes D^k e *I*, de bases contendo as seguintes famílias de funções:

a) $\{t^n e^{\alpha t}, ..., te^{\alpha t}, e^{\alpha t}\}$
b) $\{sen(\beta t), cos(\beta t)\}$, em que existem várias discussões interessantes sobre: transformações cíclicas, números complexos, conjunto Z_n.
c) $\{t^n cos(t), t^n sen(t), ..., tsen(t), tcos(t), sen(t), cos(t)\}$
d) $\{t^n e^t cos(t), t^n e^t sen(t), ..., te^t sen(t), te^t cos(t), e^t sen(t), e^t cos(t)\}$
e) Soma direta de todas as famílias já citadas.

Para se trabalhar no espaço gerado pela soma direta dos espaços citados anteriormente, foi necessário criar-se uma matriz, cujos elementos são matrizes oriundas desses espaços.

Já na atividade desenvolvida em sala de aula, uma das possibilidades de direção a ser seguida pelos estudantes, era tentar generalizar as matrizes D^k e *I* no espaço gerado pelas funções *sen(x)* e *cos(x)*, o que acabou acontecendo parcialmente, pois não se interessaram por generalizar mas descobriram uma relação para encontrar D^k olhando apenas para os casos onde $k=1, 2, 3, 4$.

Para se trabalhar com soluções particulares ou gerais restritas a um dado espaço vetorial, foi necessário discutir temas como: núcleo de uma transformação linear e a teoria da solubilidade de sistemas para se analisar quais seriam as condições necessárias e suficientes para se obter uma solução geral.

Para o estudo da integração de potências de seno e cosseno, foi necessário estudar algumas identidades trigonometrias, polinômio de Chebyshev e composta de transformações lineares.

Foram realizados estudos sobre a série de Fourier muito mais com o intuito de entendê-la e conseguir integrar, via Álgebra Linear, funções que possuem séries de Fourier finitas.

Nesta pesquisa de iniciação científica, fez-se necessária a busca de conteúdos matemáticos ainda não estudados como, por exemplo, equações diferenciais, séries de Fourier e polinômio de Chebyshev, além de aplicar vários conhecimentos de matemática para obter os resultados. Acredita-se que o ensino pode fazer uso da pesquisa na aprendizagem tanto para motivar quanto para desenvolver uma postura mais inerente aos alunos que serão futuros pesquisadores ou profissionais que precisarão tomar para si a responsabilidade de solucionarem problemas e superarem obstáculos além do fato de, estudantes que cursam uma disciplina de matemática terem a oportunidade de conhecer um pouco mais sobre o fazer Matemática.

1.3 UMA DAS IDEIAS CENTRAIS: O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Uma das ideias centrais, que podem ser evocadas pelos estudantes, está intimamente relacionada ao Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Ele constitui um salto na história da Matemática do ponto de vista de se perceber que o problema de se encontrar tangentes, obtidas atualmente pela derivação, e o problema de se encontrar áreas, foi atualmente resolvido com o uso de integrais[1], eram inversos, ou seja, a derivada é o inverso da integral.

Apesar de não se tratar diretamente do problema geométrico, esse teorema causou profundas mudanças na Matemática, dando abertura a várias novas teorias e, também, a novos campos dentro dessa ciência como, por exemplo: Geometria Diferencial, Análise e Sistemas Dinâmicos. A aplicação do referido teorema sobre espaços vetoriais constitui uma conexão interna da Matemática que, minimamente, chamará a atenção para uma riqueza de possibilidades que as mesmas apresentam. Na atividade que será realizada neste trabalho pretende-se que os estudantes utilizem-se, por exemplo, da conexão entre o Cálculo e a Álgebra Linear, e da ideia contida no TFC de as operações derivada e integral serem inversas, para encontrar a matriz que representa a integral em alguns dos espaços vetoriais já citados. O TFC afirma que:

> *Seja f uma função contínua em [a, b] e seja, também, a função $F:[a,b]\to IR$ definida por: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, então F(x) é derivável no intervalo]a, b[e sua derivada é dada por: $F'(x) = f(x)$.*

[1] Para estudo de tal tema sugerimos o livro Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula, Carl B. Boyer, tradução de Hygino Domingues.

Para demonstrar o TFC, será usada somente a definição de derivada e o Teorema do Valor Médio para integrais que afirma que dada uma função *f* contínua no intervalo fechado *[a, b]* e diferenciável em *(a, b)*, existe um ponto $c\epsilon(a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Prova: Mostrar que uma função é derivável é provar que existe o limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{\mathrm{h}}$$

Simplificando os termos do numerador antes de se substituir na expressão, obtêm-se:

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$$

como

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

A diferença será

$$\mathrm{F(x+h) - F(x)} = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Seja x_1 pertencente ao intervalo [x, x+h]. Aplicando o teorema do valor médio para integrais, tem-se:

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = \mathrm{f}(x_1)(x+h-x)$$

Então o limite será dado por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1)h}{h} = f(x_1)$$

Pela continuidade de *f* e por $h \to 0$, conclui-se que

$$F'(x)=f(x)$$

Como se quis demonstrar.

Apesar da existência desse teorema, em um espaço vetorial de dimensão finita, pode não ser possível encontrar a matriz que representa a antiderivada no espaço. Como exemplo pode-se citar o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois. Adotando-se a base canônica, $B=\{1, x, x^2\}$ obteremos a matriz:

$$[D]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A qual não possui inversa, pois seu determinante é nulo. Se pretendermos escrever uma matriz que represente a integração ela representará uma mudança de base para os polinômios de grau três desprezando o vetor constante, ou seja, $I: P_2 \rightarrow P_3$ pode ser trabalhada utilizando-se que I(1)=x, $I(x)=x^2/2$ e $I(x^2)= x^3/3$. Em nossa pesquisa de campo os estudantes não buscaram esta direção e estas informações foram apenas comentadas por mim.

Baseado nas ideias matemáticas, desenvolvidas neste capítulo, adotamos um aporte teórico que permitisse estudar o ensino e a aprendizagem destas ideias. Com este fim, nos apoiamos em autores e suas concepções no pensamento que entendemos como a principal ferramenta para trabalho em matemática.

2 - REFERENCIAIS

Este capítulo é dedicado à apresentação de nossos principais aportes para o trabalho. Baseados nas ideias de estudiosos em pensamento, investigações matemáticas e abstração, planejamos uma atividade com intuito de que se potencializasse a participação, discussão e reflexão dos alunos.

Em nossa primeira subseção, apresentaremos a obra *Como Pensamos*, de John Dewey, escolhida para nos guiar e orientar tanto na concepção quanto na realização da atividade reflexiva realizada em sala de aula. Dewey, na sua descrição de pensamento reflexivo e maneiras para promovê-lo, destaca cinco fases de pensamento reflexivo: sugestão, intelectualização, hipótese, raciocínio e verificação. Por ser a única obra de Dewey tratada no trabalho, por vezes, omitiremos o ano da obra (1959) visando auxiliar na fluidez da leitura.

Na seção 2.2 a teoria RBC: *Recognizing, Building-with and Constructing*; ou em português: Reconhecendo, Edificando-com e Construindo (tradução própria), sabe-se que essa teoria fundamenta-se em três ações epistêmicas que podem ser inferidas empiricamente e, assim, utilizadas como instrumentos de análise de atividades matemáticas. Os estudiosos que desenvolveram essa teoria utilizam-na para caracterizar a atividades matemáticas em situações de aprendizagem. Utilizaremos essa teoria como ótica para nossa análise, pois não havíamos tido contato com esta teoria até a realização da atividade, das interações em sala de aula de nossa pesquisa com intuito de interpretar de que forma a atividade reflexiva contribui à mobilização de saberes.

Já na seção 2.3, apresentaremos nosso referencial metodológico que nos auxiliou na concepção da atividade, as investigações matemáticas que entendemos proporcionar subsídios complementares às ideias de Dewey para se desenvolver uma atividade reflexiva em uma sala de aula de matemática. Em nosso estudo, utilizaremos de alguns conceitos, procedimentos e interpretações de atividades investigativas (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2006) para nos auxiliar no desenvolvimento de uma atividade que convide à reflexão. Dessa forma, entendemos que nossa atividade não é uma investigação matemática na acepção de João Pedro da Ponte que afirma que dada uma situação aberta os alunos desenvolveram suas próprias questões para investigar.

2.1 O PENSAMENTO REFLEXIVO

O que é pensar? Segundo o dicionário Aurélio, pode-se definir tal palavra como: “Imaginar, julgar, planear, dar penso a, tratar convenientemente, fazer curativo, formar ideias, refletir, raciocinar, ser de parecer, tencionar, ter no pensamento”.

Enfim a palavra pensamento leva inferir sobre o ato de pensar. Já Dewey (1959) aponta para pensamento quatro interpretações:

1) Corrente da consciência: “[...] esse curso desordenado de ideias que nos passam pela cabeça, automática e desregradamente” (p. 14). São como os devaneios que, por vezes, se lançam e carregam consigo a imaginação em um fluxo caótico de representações mentais.

2) Representações mentais primárias: “[...] histórias imaginárias contadas por crianças possuem todos os graus de coerência interna[...] Assim, um pensamento ou ideia, é a representação mental de algo não realmente presente; e pensar consiste na sucessão de tais representações” (p. 15). A título de exemplificação: o momento em que se elabora uma pequena história com estrutura lógica para distrair crianças ou divertir uma roda de amigos. Este encadeamento muito se aproxima do pensamento reflexivo.

3) Crença: “abrange todas as matérias de que não temos conhecimento seguro, mas em que confiamos o bastante para nelas basear a nossa ação” (p. 16). As crenças são ideias que não apresentam necessariamente fundamento e tampouco justificativa, são verdades não verificadas que podem conduzir a outros equívocos. Nesse aspecto, tais formas de pensamento são responsáveis pela tradição, instrução e imitação. Perpassam o cotidiano e influenciam as decisões.

4) Pensamento reflexivo: é a forma de pensar que Dewey defende ser a mais eficiente. Essa maneira de pensar “consiste em examinar mentalmente o assunto e dar-lhe consideração séria e consecutiva” (DEWEY, p. 13). Entende-se pensamento como “a operação em virtude da qual os fatos presentes sugerem outros fatos (ou verdades), de tal modo que nos induzam a crer no que é sugerido, com base numa relação real nas próprias coisas, uma relação entre o que sugere e o que é sugerido” (DEWEY, p. 21).

O pensamento reflexivo possui duas fases: a inquietação diante de um obstáculo e a pesquisa mental necessária para esclarecer essa perplexidade. Não ocorrerá a reflexão se "nossa atividade mental passe insensivelmente de um assunto para outro" (DEWEY, p. 23).

Na atividade que será desenvolvida em sala de aula, os alunos serão incentivados, a partir de questões de natureza investigativa, a levantar conjecturas, argumentar e analisar sua validade, enfim serão conduzidos a refletir. Este é um fator central no trabalho de Dewey que afirma:

> A reflexão não é simplesmente uma seqüência, mas uma conseqüência – uma ordem de tal modo consecutiva que cada idéia engendra a seguinte como seu efeito natural e, ao mesmo tempo, apóia-se na antecessora ou a esta se refere. As partes sucessivas de um pensamento reflexivo derivam umas das outras e sustentam-se umas às outras. (DEWEY, 1959, p. 14).

Nessa concepção, a reflexão está baseada nas ideias anteriores. Para que cada ideia possa se sustentar em suas antecessoras, é necessário considerar a função dos significados dessas ideias no contexto. Cada significado permite que se possa avançar sequencialmente à análise sobre o assunto. Por assim dizer, o fator central do ato de pensar é "examinar até que ponto uma coisa pode ser considerada garantia para acreditarmos em outra" (DEWEY, p. 20). Este fato de uma ideia se apoiar em outra é apresentado em nosso outro referencial teórico onde uma abstração matemática sustentará novas abstrações.

É importante desenvolver uma forma de pensar eficiente, pois esse ato "faz-nos capazes de dirigir nossas atividades com previsão e de planejar de acordo com fins em vista ou propósitos de que somos conscientes; de agir deliberada e intencionalmente a fim de atingir futuros objetos ou obter domínio sobre o que está, no momento, distante e ausente" (DEWEY, 1959, p. 26).

Dewey afirma que o ato de pensar amplia o significado das coisas. Assim o princípio de uma ideia levar à outra ganhará uma nova possibilidade. Uma criança pequena observaria gravuras em um livro, um aluno do ensino fundamental leria sua história e, alguém com conhecimento do assunto, faria uma leitura das intenções do autor na construção do texto.

Também há tendências que podem comprometer o ato de pensar. Entre elas, estão as superstições, crenças errôneas e a preguiça. Infelizmente, como ressaltado pelo autor, o ser humano tem a tendência natural a acreditar em qualquer coisa a menos que haja uma evidência da falsidade. Os hábitos são essenciais para se desenvolver um pensamento eficiente, pois “quando a inferência não influi apreciável e diretamente sobre a segurança e conservação da vida, não há qualquer barreira natural para a aceitação de crenças errôneas” (DEWEY, p. 32).

Dewey afirma que se faz necessário desenvolver, principalmente para fins educacionais, boas atitudes. Existe a tendência em acreditar no que nos agradaria. Segundo Dewey, pode-se fracassar em generalizações porque há uma tendência de se formular teses muito abrangentes baseadas em poucos fatos, ou seja, tende-se a radicalizar quando se generaliza sem o devido cuidado. Além disso, o respeito às autoridades e o desejo de estar em harmonia com os outros, embora desejáveis, podem gerar adestramento ou impedimento de reflexão sobre algo. Os pré-conceitos, desejos pessoais e hábitos podem representar uma forte barreira ao desenvolvimento intelectual.

> O que se pode fazer, entretanto, é cultivar as atitudes favoráveis ao uso dos melhores métodos de investigação e verificação. Não basta o conhecimento dos métodos, deve haver o desejo, a vontade de empregá-los. Esse desejo é uma questão de disposição pessoal. Por outro lado, porém, também não basta a disposição. Unida a esta, é preciso que haja compreensão das formas e técnicas, que são os canais por onde aquelas atitudes agem com o maior proveito. (DEWEY, 1959, p. 38).

Para o citado autor, existem três categorias de atitudes cultiváveis favoráveis ao uso dos melhores métodos para investigação e verificação: espírito aberto, de todo coração e responsabilidade. A primeira sugere uma independência intelectual, uma mente liberta de verdades absolutas, partidarismos ou preconceitos; a capacidade de ouvir a várias vozes, de não ir a um debate com seu “prato cheio” e o reconhecimento da probabilidade de erros em crenças. A segunda caracteriza-se pela sincera busca do conhecimento, pela imersão na questão e pelo foco dado ao assunto. Já a terceira é essencial ao desenvolvimento, exige empenho, trabalho e dedicação. Essas atitudes são essenciais para a pesquisa, o aprendizado e o desenvolvimento pessoal.

Educacionalmente, é preciso analisar como se pode auxiliar os alunos a desenvolverem hábitos saudáveis para o pensamento. Para que desenvolvam o pensamento, faz-se necessário ressaltar a importância do exemplo e o incentivo a conjecturar, inquirir e avaliar. A aprendizagem está intimamente ligada ao interesse despertado pelo assunto. Assim, para

Dewey (1959, p. 40), “O professor que desperta tal entusiasmo em seus alunos conseguiu algo que nenhuma soma de métodos sistematizados, por corretos que sejam, poderá obter”. Também o professor deverá fazer com que a questão envolva os alunos para que mantenham seus recursos cognitivos e fiquem focados na solução do problema, pois “Não há inimigo maior do pensamento eficiente que o interesse dividido” (DEWEY, 1959, p .40).

Já a responsabilidade é desenvolvida socialmente, levando a crer que se pode apenas buscar ser justo para valorar o empenho pessoal de cada um. “Ser intelectualmente responsável é examinar as consequências de um passo projetado; significa estar disposto a adotá-las, quando seguem, como de razão, qualquer posição já tomada” (p. 40).

Dewey ainda ressalta que as atitudes cultiváveis são mais importantes para o desenvolvimento do pensamento que o princípio da razão aliado à perícia de manipular processos lógicos, mas também ressalta que um não se opõe ao outro e afirma que: “Devemos apenas lembrar que, com respeito às finalidades da educação, não é possível promover-se uma separação entre os princípios de lógica, impessoais, abstratos, e as qualidades morais de caráter.” (1959, p. 42).

Existem características inatas à natureza humana que podem ser muito úteis ao treino do pensamento. Quem souber como utilizar-se delas para o treino do pensamento, poderá obter bons resultados. São elas: curiosidade, sugestão e ordem.

- Curiosidade: tendência a explorar novos objetos, circunstâncias, forças ou seres para ampliação do círculo de experiência;

Para Dewey, todo ser vivo recebe impressões e estímulos, enquanto age sobre objetos, circunstâncias ou outros seres: “tendências que exploram o que está longe, o que está fora, tendências que saem para estabelecer novos contatos, que buscam novos objetos” (1959, p. 44). Essas tendências ampliam constantemente nossas experiências.

- Sugestão: ideias no sentido primitivo e espontâneo;

Não se pode, em geral, decidir quando há de se ter ideias ou quando não tê-las. Esse fluxo quase contínuo de pensamentos rudimentares e rebeldes são as várias sugestões.

- Ordem: direção e sequência do pensamento.

“O pensar reflexivo subentende consecutividade, continuidade ou ordem das sugestões” (1959, p. 54). Como o pensamento reflexivo possui um objetivo, aspira a se chegar a uma conclusão aceitável, faz-se necessário que a associação de ideias seja controlada a ponto de se tornar uma sequência ordenada rumo a uma conclusão. Mas é preciso tomar cuidado para não ser induzido à ideia de que essa consecutividade ocorra de forma linear. Nesse sentido, entende-se consecutividade como Dewey: “consecutividade significa flexibilidade e variedade de materiais, em conjunto com unidade e certeza de direção” (p. 55).

Uma das funções do educador é fornecer materiais e circunstâncias para “dirigir a curiosidade orgânica, rumo a investigações que possuam um fim e produzam resultados positivos no aumento do conhecimento, bem como para converter a inquirição social em capacidade de descobrir coisas, interrogar livros e pessoas” (DEWEY, p. 47). Então há de se auxiliar os estudantes a associarem as ideias ou agrupar sugestões. Deve-se evitar a perda da curiosidade, a crença em sugestões sem confirmação ou a bagunça formada por sugestões soltas no ar.

Outro grande perigo é o de se prender tanto ao método ao ponto de sufocar a criatividade dos alunos. “Ao professor que estuda inteligentemente as operações mentais individuais e os efeitos das condições escolares sobre estas operações, pode-se confiar inteiramente à escolha de métodos de instrução [...]” (DEWEY, p. 64). Portanto ensinar é gerir de forma equilibrada os meios que deverão incentivar a formulação de hipóteses, a discussão e pesquisa, os testes para sua comprovação em consonância com a ordem do trabalho.

O autor aponta que os estudos nos quais pensamento abstrato é preponderante sobre os conhecimentos adquiridos como, por exemplo a matemática, o principal perigo é o distanciamento da atividade intelectual das coisas da vida comum. “O abstrato tende a remontar-se tão alto e a afastar-se tanto da aplicação, que perde toda a relação com o procedimento prático e moral” (DEWEY, p. 69). Dewey, com essa precaução, defende a importância da abstração. A abstração “encontra-se em toda análise, em toda observação que destaque, imprimindo-lhe clareza, um qualidade, dentre a mancha que se achava absorvida” (p. 198). A abstração é necessária para se avançar onde os sentidos não produzem mais efeito. Assim a obra científica depende fortemente da capacidade de abstrair para as generalizações ou comparação de propriedades. “Através da abstração, o espírito torna-se capaz de mergulhar no que já é conhecido, em busca de alguma qualidade ou relação não conhecida, mas, intelectualmente, muito mais importante, por possibilitar uma inferência mais analítica e mais extensa” (p. 199).

Outra questão levantada pelo autor é o problema de dar-se mais importância ao produto do que ao processo, o que leva muitos professores a valorizarem excessivamente “uma resposta certa". A valorização do processo leva a uma maior ênfase a inferência. Para Dewey, a inferência é o processo de concluir, de uma dada situação presente, outra que não está presente no momento. Dessa forma, a inferência está no cerne da atividade reflexiva. Segundo Dewey, "a inferência ocorre por intermédio, ou através, da sugestão despertada pelo que é visto e lembrado" (p. 101). A lembrança social desempenha um importante papel nesse processo, pois a sugestão dependerá da experiência pessoal e estado geral da cultura na época e local.

Assim depreende-se que se a inferência tem papel essencial no desenvolvimento do pensamento, e a aprendizagem de matemática tem ênfase no raciocínio, não é na resposta e sim na condução das ideias que se encontra o caminho para a aprendizagem. Dewey afirma que, por vezes, isso pode comprometer o processo de aprendizagem a ponto de a educação perder sua função principal: possibilitar o desenvolvimento pessoal dos participantes, estudante e instrutor, do exercício do pensamento, focando-se apenas no produto e, nesse caso, desprezando o mais importante que é o processo.

Se ensinar é gerir situações e mecanismos que possibilitem o desenvolvimento do pensamento, aprender é, resumidamente, aprender a pensar. Dessa forma, a educação intelectual está fortemente ligada ao cultivo da atitude de pensar reflexivamente que são hábitos de pensar despertos, cuidadosos e meticulosos.

Para Dewey (1959), existe uma fase inicial, na qual é apresentado um problema ou surge um estado de dúvida inicial, chamado fase pré-reflexiva. Passada esta etapa, o autor descreve cinco fases da atividade reflexiva:

- Sugestões: ideias primordiais, palpites ou lampejos, primeira intervenção da mente sobre as questões;
- Intelectualização: ato de gerar uma questão diante da situação perturbadora, obtenção de dados, processo pelo qual conhecemos o problema através de sua observação;
- Hipótese: uma suposição formada das sugestões e do exame dos dados. É uma ideia-guia que deverá orientar as verificações posteriores;
- Raciocínio: processo mental pelo qual se analisa, compara-se, verifica-se, atribui-se probabilidades e se encadeiam as várias ideias e objetos. É o momento no qual as ideias iniciais se unem em um todo consistente;

- Verificação da hipótese pela ação: fase na qual busca-se compreender as consequências e a confirmação dos resultados obtidos pela ação exterior de corroboração ou verificação experimental da conjectura.

Logo após a atividade reflexiva, ocorre a fase pós-reflexiva na qual é extinta a dúvida. Dewey ainda afirma que as fases da atividade reflexiva não são lineares, podem fundir-se, serem ampliadas ou reduzidas. Uma das fases que recebe especial atenção do autor é o raciocínio em que a matemática é citada como exemplo:

> A matemática oferece o exemplo típico do ponto até o qual se pode levar a operação de idéias relacionadas uma à outra, independentemente das observações dos sentidos. Em geometria começamos com uns poucos conceitos simples: linha, ângulo, paralelo, superfícies formadas por linhas que se encontram, etc, e um poucos princípios a respeito das igualdades. [...] Continuando a traçar as conseqüências dos teoremas já demonstrados, fica, afinal, elaborada toda a matéria relativa às figuras plana. (DEWEY, 1959, p.117).

Assim o autor utiliza-se da matemática, entre outros exemplos, de como o pensamento reflexivo pode levar a conclusões baseadas em novos significados de objetos já conhecidos e criar novos objetos que receberão novos significados e assim continuar a produzir novas conclusões e conhecimentos. Outro exemplo matemático que também pode ser citado é a respeito dos estudos em que combateram a crença sobre o quinto postulado de Euclides e, através da negação desse postulado, criaram a Geometria Moderna.

Continuando sobre o poder do raciocínio em matemática, Dewey afirma que “Quando a hipótese [...] pode ser expressa em forma matemática, é quase infinita a sua possibilidade de transformação, até que assuma uma forma em que o problema possa ser tratado o mais rápido e eficazmente possível” (p. 117).

Na próxima seção, apresentaremos o RBC que terá um papel fundamental para observarmos, registrarmos e analisarmos as interações dos alunos e professor trabalhando em situações matemáticas.

2.2 RECOGNIZING, BUILDING-WITH AND CONSTRUCTING

Três ações epistêmicas observáveis: *Recognizing, Building-with and Constructing* (RBC) ou em português: Reconhecendo/reconhecer, Edificando-com/edificar-com e Construindo/construir (tradução própria) fundamenta o modelo teórico RBC que foi desenvolvido para se observar e compreender a abstração em situações de aprendizagem de matemática. Em nossa pesquisa, optaremos por utilizar os substantivos reconhecimento, edificação-com e construção, por entender que esses termos significam tanto os processos de reconhecer, edificar-com e construir quanto os resultados destes processos. De acordo com a teoria RBC, o uso destes substantivos terá o significado de ação, similar ao gerúndio. Caso referirmos ao resultado de uma ação epistêmica, deixaremos isso claro no contexto da redação.

A teoria RBC, que concebe um encaixamento dinâmico dessas ações epistêmicas em processos de abstração, está sendo desenvolvida por um grupo de pesquisadores (Rina Hershkowitz, Baruch B. Schwarz, Tommy Dreyfus e outros) a partir de atividades empíricas sendo desenvolvidos em projetos relacionados ao desenvolvimento de currículo. A teoria se fundamenta em concepções da Educação Matemática Realista (Realistic Mathematics Education – RME), o conceito de abstração que remete aos trabalhos de Davydov (1990) e Ohlsson e Lehtinen (1997) e a Teoria de Atividade. Os pesquisadores do modelo RBC buscam entender o processo de abstração na construção de novas estruturas matemáticas pelos alunos em contexto ou ambientes educacionais (HERSHKOWITZ; SCHWARZ; DREYFUS, 2001, p. 195). Os autores enfatizam uma ótica sociocultural para a análise de abstração, mais do que a cognitivista, por acentuar as tarefas, ferramentas e experiências dos alunos e professores e a interação social no processo de abstração.

Da corrente filosófica de Educação Matemática Realista, criada por Hans Freudenthal, o modelo teórico RBC apropria-se dos conceitos de matematização vertical e horizontal como explicitada por Treffers e Goffree (1985 apud DREYFUS, 2012, p. 2). De acordo com Dreyfus (2012), Treffers desenvolveu os conceitos de matematização vertical e horizontal. Na matematização horizontal, pessoas trabalham com problemas relacionados à vida e aplicação da matemática, desenvolvendo uma compreensão de uma variedade de usos da matemática que eles conhecem enquanto que, na matematização vertical, existe um processo de reorganização e extensão de conhecimento matemático dentro da própria matemática, ou seja, uma abstração na qual as pessoas encontram atalhos e conexões para utilizá-los de forma semelhante ao trabalho dos matemáticos.

As raízes das ações epistêmicas de reconhecimento, edificação-com e construção encontram-se no modelo RBC na Educação Matemática Realista. O reconhecimento é a tomada de consciência de que uma estrutura matemática possa ser utilizada para a edificação-com ou construção. A edificação-com é o uso de abstrações e estruturas para elaborar uma solução a um problema – seja matemática ou na aplicação da matemática. A construção é essencialmente a matematização vertical, ou seja, a construção de uma nova abstração ou estrutura matemática a partir estruturas que a pessoa já possui.

Em termos de construção ou abstração, de acordo Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus (2001, p. 200), Davydov a concebe como um processo que, por meio do pensamento teórico, uma entidade ou um objeto pouco elaborado, e não necessariamente consistente internamente ou externamente, está transformado em uma entidade elaborada e consistente. Isto é, a abstração envolve o estabelecimento de elos entre a construção, ou seja, a transformação e a totalidade que leva em consideração possíveis contradições e a integração (DAVYDOV, 1972 apud HERSHKOWITZ; SCHWARZ; DREYFUS, 2001, p. 200). Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus (2001), além de se apropriar as ideias de Davydov enquanto abstração concernente de uma única entidade (estrutura interna com elos externos), também assumem a concepção de Ohlsson e Lehtinen (1997) que informa que a abstração inclui a organização de várias entidades abstratas em uma nova estrutura mais complexa. Nesse caso, a nova estrutura está abstraída por fazer elos externos entre duas ou mais entidades abstratas. Dessa forma, a abstração, segundo Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus (2001, p. 195, tradução nossa), "é o processo no qual os alunos reorganizam verticalmente a matemática já construída em uma nova estrutura matemática". É um processo de reorganização que se baseia na concepção de matematização vertical dos teóricos da Educação Matemática Realista.

Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus (2001) no desenvolvimento do modelo RBC se fundamentam no conceito de atividade conforme a Teoria da Atividade para enfatizar que a abstração é um processo que se realiza em um contexto sociocultural. Essa teoria tem suas raízes nos trabalhos de Vygotsky e incorpora ideias e conceituações de pensadores como Leontiev e Davydov. A Teoria da Atividade entende que a atividade de um sujeito é mediada por ferramentas que se desenvolve com um objeto em visto e os motivos que mobilizam o sujeito em um contexto sociocultural na direção do objeto. A relação entre este o sujeito e o objeto é a desencadeadora dos resultados. Para a Teoria da Atividade, o contexto e as interações entre pessoas envolvidas em situações-problema é a unidade de análise em oposição a ações do indivíduo em isolação ou em desconsideração do contexto da situação e seu outro semelhante.

> [...] Vygotsky made clear that the learner does not imitate isolated actions modeled by a more capable peer but participates in activities that are meaningful for him. In activity theory, Leont'ev (1981) articulated Vygotsky's implicit view on context. According to this theory, context can be defined as the interconnected collection of factors that frame the structure and meaning of human actions. The activity rather than the individual human action is the unit of analysis because it is "the minimal meaningful context for understanding individual actions. (KUUTTI, 1996 apud HERSHKOWITZ; SCHWARZ; DREYFUS, 2001, p. 198).

Na análise da atividade da pesquisa de campo, encontraram-se indícios da abstração na direção de reconhecimento e edificação-com. Observou-se que a reflexão gerada sobre o reconhecimento de abstrações matemáticas já existentes nos estudantes produziram, por meio do encadeamento de ideias, casos de edificação-com. Para isso foi importante conhecer um pouco melhor os alunos e seu contexto.

O contexto em que ocorre o processo de abstração influencia a atividade, pois os alunos conseguirão tirar proveito das ferramentas e artefatos utilizados se os contextos histórico (conhecimentos já adquiridos), social (oportunidades, interação com colegas, professores, familiares) e físico (recursos acessíveis como computadores, jogos ou outros artefatos) os permitirem. Coerente com Dewey que afirma que a aprendizagem é influenciada pelo social e conhecimento cultural da época.

Com vistas a essa condição sociocultural, Hershkowitz et al. (2007) descrevem duas maneiras não dissociadas de construir o conhecimento que tem um reflexo na concepção de Vygotsky dos papéis do social e do individual no desenvolvimento e aprendizagem:

i) em conjunto;

ii) individualmente.

Em sala de aula, esse conjunto pode conter de dois elementos até toda a classe, sendo o professor participante ou não desses grupos. Voigt (1985 apud HERSHKOWITZ et al, 2007, p. 42), entende que "através de suas discussões, alunos e professores constroem uma explicação que talvez nem produzissem individualmente. Eles chegaram ao conhecimento tomado como compartilhado". Assim Hershkowitz et al (2007) entendem que a interação promove a mediação entre processos psicológicos e sociais: a cognição individual e social são construções promovidas através da mediação de significado. Aqui o significado possui o sentido de uma edificação-com utilizando abstrações ou a construção de uma nova estrutura, ou seja, abstração.

Na atividade desenvolvida nesta pesquisa, entendemos que a aprendizagem ocorre de forma individual e também em conjunto. Por essa atividade ser socialmente reflexiva, precisamos nos aproveitar de conhecimentos individuais e ajudar a turma a produzir o conhecimento compartilhado.

Outro conceito importante para a compreensão do modelo RBC é a concepção de pensamento teórico e pensamento empírico de Davydov. De acordo com Davydov (apud HERSHKOWITZ, SCHWARZ e DREYFUS, 2001), o pensamento teórico é um processo de reprodução que possibilitará, com o treino, a realização de experimentos mentais através da reflexão. Já o pensamento empírico orienta o estudante no conhecimento geral já acumulado sobre o exterior e particularidades de objetos isolados da natureza ou de seu contexto. Sendo o segundo útil para a realização de tarefas rotineiras e o primeiro para a aprendizagem e a ciência.

O quadro 2, na próxima página, apresenta as diferenças entre o saber empírico e o saber teórico além de mostrar que, no teórico, as construções e edificações ocorrerão pela transformação de objetos, suas relações e propriedades além de sua generalização. Dessa forma mostra-se, também, muito aplicável a matemática que é uma ciência baseada na experimentação e generalização.

Quadro 1 - Comparação entre conhecimento empírico e conhecimento teórico

Características	**Saber empírico**	**Saber teórico**
Elaboração	Comparação dos objetos às suas representações, valorizando-se as propriedades comuns dos objetos.	Análise do papel e da função de certa relação entre as coisas no interior de um sistema.
Tipo de generalização	Generalização formal das propriedades dos objetos que permite situar os objetos específicos no interior de uma dada classe formal.	Forma universal que caracteriza simultaneamente um representante de uma classe e um objeto particular.
Fundamentação	Observação dos objetos.	Transformação dos objetos.
Tipo de generalização	Representações concretas do objeto.	Relação entre as propriedades do objeto e as suas ligações internas.
Relações	A propriedade formal comum é análoga às propriedades dos objetos.	Ligação entre o geral e o particular.
Concretização	Seleção de exemplos relativos à certa classe formal.	Transformação do saber em uma teoria desenvolvida por meio de uma dedução e explicação.
Forma da expressão	Um termo.	Diferentes sistemas semióticos.

Fonte: Adaptação de Rubstov (1996) realizada por Cedro, Moraes e Rosa (2010, p. 431).

De acordo com Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus (2001), Davydov reconhece que o pensamento empírico pode ser utilizado como um aporte ao pensamento teórico. Davydov defende a prevalência do pensamento teórico, que trabalha com a utilização dos conceitos, está de acordo com o trabalho científico e abrange toda a forma criativa, sobre o pensamento empírico que é mais imediato e ligado a questões práticas.

Excetuando-se os termos usados, a teoria RBC é compatível com a forma que Dewey defende para o pensamento, pois Dewey trata teórico no sentido mais comum da palavra e Davydov a entende como formadora de teorias. Hershkowitz et al (2007) entendem que as ações de reconhecimento, edificação-com e construção requerem pensamento altamente teórico, entretanto reafirmam que o pensamento empírico não pode e não deve ser excluído, pois a inquirição pode ter tanto valor para uma prova, quanto para uma demonstração rigorosa.

A seguir estão os cinco princípios epistemológicos que Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus (2001, p. 202, tradução nossa) utilizam para fundamentar sua concepção de abstração:

- A abstração é uma atividade (no sentido da Teoria da Atividade), uma cadeia de ações empreendidas por um indivíduo ou um grupo e dirigida por um motivo que é específico a um contexto;

- O contexto é uma construção pessoal e social que inclui o aluno e o social, histórias pessoais, concepções, artefatos e interação social;

- Abstração requer pensamento teórico, no sentido de Davydov, que pode também incluir elementos do pensamento empírico;

- Um processo de abstração leva de entidades iniciais abstratas não refinadas para uma nova estrutura;

- A nova estrutura passa a existir através da reorganização do resumo de identidades abstratas e através do estabelecimento de novas ligações internas dentro das entidades iniciais e ligações externas entre elas.

Baseados em uma perspectiva teórica e em seus dados experimentais, Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus (2001) entendem abstração como uma atividade de reorganização vertical de matemáticas previamente construídas em uma nova estrutura matemática.

Reorganizar em uma nova estrutura implica o estabelecimento de conexões matemáticas que ocorrem durante a construção e edificação-com e inclui ações matemáticas como apontadas por Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus (2001, p. 202):

a) fazer uma nova hipótese ou conjectura.

b) inventar ou reinventar uma generalização matemática, uma prova, ou uma nova estratégia para resolver um problema.

Fazer uma nova hipótese, muitas vezes, não é uma tarefa simples. Assim como buscar novas estratégias pode se apresentar como uma tarefa árdua. Esse é um processo que envolve a inferência e Dewey (p. 101) afirma que a inferência ocorre através da sugestão despertada, pelo que é observado ou lembrado e isso dependerá da experiência pessoal e do estado geral da cultura da época. Dewey afirma que as sugestões dependerão da experiência pessoal, interesses ou mesmo do estado emotivo da pessoa. Assim para que a inferência ocorra, precisará ocorrer o reconhecimento de algo que é apresentado ou observado em um contexto sociocultural.

Mas analisar eventos que ocorrem de forma interna a um indivíduo, como abstrações ou pensamentos, traz grandes dificuldades. Dessa forma, o modelo RBC, aliado às situações que são desenvolvidas para potencializar sua eficácia, busca evidenciar as abstrações através de comportamentos a serem analisados, pois enquanto abstrações são não observáveis, as ações epistêmicas podem ser observadas durante as atividades. Como exemplo: os professores não têm acesso direto aos pensamentos dos alunos, mas podem, por vezes, observar um comentário ou posicionamento de reconhecimento com elementos já conhecidos diante de uma situação problemática.

Em suas pesquisas, Hershkowitz et al (2007) evidenciaram que as três ações epistêmicas observáveis que caracterizam a abstração e fundamentam o modelo RBC: reconhecimento, edificação-com e construção baseiam-se nas abstrações anteriores e o contexto em que ocorrem favorece a caracterização dos componentes do modelo, que é o resultado do trabalho destes e permite estudar empiricamente o processo de abstração.

Assim o modelo RBC, de acordo com Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus (2001, p. 196), é constituído de três ações epistêmicas não lineares e encaixadas ao aportar um problema:

i) Reconhecimento: etapa na qual analisa-se quais dos conceitos, abstrações ou conhecimentos específicos anteriores poderão ser úteis para a resolução do problema;

ii) Edificação-com: momento em que busca-se estruturar o que foi reconhecido como útil por meio dos conhecimentos anteriores. Na fase de edificação-com, pode-se atingir uma meta, dada ou não, por meio de abstrações que já possui a fim de alcançar um objetivo, realização de uma estratégia ou justificar uma solução;

iii) Construção: fase na qual existe a necessidade de uma nova construção ou criação de uma nova abstração matemática para o individuo realizar seus objetivos. Nessa fase, se produz uma nova abstração ou estrutura matemática.

Os objetivos citados devem ser entendidos como metas matemáticas como, por exemplo, resolver um problema, justificar uma solução ou fazer uma hipótese.

Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus (2001, p. 216) evidenciam o fato de serem encaixadas e não lineares:

> Afirmamos, muitas vezes, que a construção inclui ações de edificar e de reconhecer. Em outras palavras, a construção é uma combinação das três ações epistêmicas, na qual a ação de reconhecimento é encaixada nas outras duas, e a ação de edificação-com é encaixada na ação de construção. (Tradução nossa)

Essas ações epistêmicas são idiossincráticas, pois dependem da história individual e do conhecimento cultural. Enquanto um indivíduo está reconhecendo uma estrutura já construída, para outro esta estrutura pode, ainda, precisar ser construída. Outro fato que os autores ressaltam é que, muitas vezes, é difícil a separação das ações epistêmicas, pois podem ocorrer simultaneamente.

A ação de reconhecimento irá ocorrer quando se perceber uma estrutura já construída anteriormente. Esse reconhecimento de estruturas matemáticas anteriores possibilitará começar a explorar o problema e inferir sobre ele. Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus (2001, p. 213, tradução nossa) afirmam que “reconhecer ocorre geralmente, embora nem sempre ao nível do pensamento empírico”, mas deriva de uma construção anterior que só pode ocorrer com pensamento teórico. Por exemplo, neste trabalho, esperava-se que os alunos recorressem ao Teorema Fundamental de Cálculo para entender que a matriz relativa à transformação integral é a inversa da matriz que representava a transformação derivada.

Na edificação-com, usam-se os conhecimentos estruturais disponíveis para elaborar uma solução viável para o problema em questão. Edificar tem conotação de aplicação e, de acordo com Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus (2001, p. 215, tradução nossa), edificar é “mais provável de ocorrer quando os estudantes estão empenhados em alcançar um objetivo como resolver um problema, entender e explicar uma situação, ou refletir sobre um processo”. Para atingir seus objetivos, os alunos usam as estruturas anteriormente construídas, que podem ter vindo a ser reconhecidas com o resultado da atividade de outros participantes, como artefatos para ações futuras.

A ação epistêmica de construção ocorre quando da necessidade de gerar uma nova abstração. Segundo Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus (2001, p. 221, tradução nossa), “aprender uma construção significa observar não apenas a partir do que ela surgiu e que os artefatos estão sendo utilizados, mas também como as novas estruturas são usadas como artefatos em outras atividades”. Em matemática, ela será produzida quando os conhecimentos anteriores não forem mais suficientes para solucionarem os problemas com os quais os alunos estejam envolvidos. De modo geral, irá ocorrer uma matematização vertical, processo que consiste na reorganização de construções matemáticas anteriores, dentro da matemática, e por meios matemáticos, de entrelaçar construções anteriores que levarão a uma nova abstração A construção desta nova abstração é obtida por meio de reflexão sobre hipóteses e do raciocínio aplicados ao problema, quando os significados existentes não forem suficientes para solucionar o problema.

Em matemática, trabalha-se com um elevado nível de abstração e, mesmo que inconscientemente, busca-se despertar no aluno o processo de reconhecimento, pois sempre que se precisa, lançam-se novas situações, exposições por meio de conhecimentos que ao menos se espera que os alunos já possuam. Também, no contexto matemático, nem sempre o processo deverá terminar na construção, pois, muitas vezes, na ação de edificação-com, pode-se criar adaptações ou simplificações que possibilitarão a solução da questão sem a necessidade de produzir uma nova estrutura matemática.

Um exemplo prático e esclarecedor de como Hershkowitz, Baruch e Dreyfus (2001, p. 215-216) entendem o RBC é dado no artigo em que uma aluna da 8ª série, em um experimento, precisa resolver alguns problemas relativos às populações de zebras, leões e águias de um zoológico a partir de dados fornecidos. Foi feito um estudo com essa aluna no final do ano letivo. Em um dos problemas propostos pede-se para que ela desenvolva um novo zoológico e projete um ponto no qual as populações dos três animais fossem iguais, podendo mudar apenas o planejamento sobre a população de leões.

Tendo em mãos os dados que informam que após quatro anos a população de águias e zebras seria igual, essa aluna percebe que essa igualdade, entre a população das três espécies, precisa ocorrer no ponto (4, 320), na qual a primeira coordenada representa anos e a segunda a população da dada espécie, pois era o ponto de interseção entre águias e zebras e precisaria projetar para que os leões fossem um total de 320 após quatro anos. Nesse momento, ocorre o reconhecimento profundo da estrutura lógica do problema. Além disso, ela invoca e combina vários elementos estruturais relacionados à questão.

Sabendo que a única espécie em que o comportamento pode ser alterado são os leões, ela supõe que devem ser modelados pela equação $y = mx$, pois no momento inicial, a população é nula. Também percebe a relação entre o coeficiente angular m e a taxa de variação, determinando, assim, que seu valor deveria ser 80. Nessa etapa, ocorreu uma edificação-com, pois ela utilizou-se das estruturas disponíveis como: funções do primeiro grau, inclinação da reta, taxa de variação constante e função nula na origem para elaborar uma solução viável ao problema.

Já para que ocorra o momento da construção precisa haver a meta de resolver um problema ou levantar uma hipótese que dependa de uma nova estrutura matemática. Deve-se estar envolvido na solução de um problema não-padrão, encontrar um fenômeno novo, refletir sobre sua estrutura interna ou sobre as relações externas desse problema com as coisas que já conhece. Para o exemplo do zoológico, a construção ocorreu em uma nova questão, segundo Hershkowitz, Baruch e Dreyfus (2001, p. 218). Foi pedido à aluna para comparar a taxa de variação de duas populações do zoológico e ela se perdeu, pois em cada momento uma população era maior. Percebendo essa insuficiência, ela elabora uma tabela com as taxas de variações ao longo de anos sucessivos. Nesse momento, ela se aproveitou de reconhecimentos e edificações para começar a formular uma nova construção: uma taxa de variação variável.

A seguir a tabela 3 compara as duas teorias, RBC e pensamento reflexivo, que mostra que essas teorias partem de premissas similares ou equivalentes. Dessa forma, entendemos que o modelo RBC serva para a análise da atividade reflexiva que é desenvolvida neste trabalho.

Quadro 2 - Resumo comparativo das ideias do modelo RBC em relação à teoria de Dewey

Modelo RBC	**Pensamento Reflexivo**
A atividade influencia a forma de pensar.	Acredita no treino do pensamento.
A necessidade de uma nova construção surge de uma necessidade matemática para o aluno.	Precisa haver inquietação e vontade para se responder as questões.
Aplica-se ao pensamento matemático em várias áreas.	Aplica-se ao pensamento em sua forma mais geral.
Utiliza-se de conhecimentos anteriores para que haja as ações de reconhecimento e edificação.	Acredita na necessidade de conhecimentos prévios para se atingir um objetivo.
Pessoas envolvidas em atividades estão cientes de seus motivos e utilizam-se de ferramentas para atingirem seus objetivos.	Pessoas utilizam-se de seus artefatos e ferramentas na busca de seus objetivos.
Tem a experimentação e a argumentação como formas principais para desenvolver uma atividade.	Traz a inferência como a ferramenta que vai da intelectualização até a verificação dos resultados.
Defende que o conhecimento se desenvolve pela necessidade.	Defende que o conhecimento se desenvolve pela necessidade.

Fonte: do autor

Para o problema de se desenvolver uma atividade socialmente reflexiva, em sala de aula, procuramos criar um ambiente dinâmico no qual os alunos tenham voz. Para construir este ambiente, foram adaptadas algumas ideias das investigações matemáticas de João Pedro da Ponte, que defende uma sala de aula dinâmica, com atividades que estimulem o aluno a "fazer matemática", a pensar e a ser mais participante na construção de seu conhecimento.

2.3 INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Essa subseção trata-se de um aporte metodológico para a elaboração e execução da atividade. Adaptamos algumas das ideias de João Pedro da Ponte coerentes com nossa proposta de elaborar uma atividade reflexiva de Dewey (1959), de uma possibilidade para a aula de matemática com o intuito de motivar e envolver os estudantes.

Para isso, é necessário entender como os pesquisadores ligados às investigações matemáticas entendem uma investigação matemática. Ponte, Brocardo, Oliveira (2006, p. 13) afirmam que "para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades". Ainda sobre a natureza das investigações matemáticas, os mesmos autores citados (2006, p. 16) afirmam que "uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode-se mesmo dizer que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver". Dewey também enfatiza a necessidade de identificar o problema a ser resolvido, pois, dessa forma, quando se sabe exatamente qual é o problema, já se está, na verdade, começando a entender e intelectualizando sobre tal problema.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 16) ressaltam os benefícios de se trabalhar com investigações já que "quando trabalhamos um problema, o nosso objetivo é [...] resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original". Dewey (1959) afirma que é necessário foco e direção para a resolução da situação problema; caso se encontre algo mais importante, sugere que se redirecione a atividade mental à nova questão.

Em relação ao ensino e aprendizagem de Matemática, deve-se entender que:

> investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos esta resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2006, p. 9).

Segundo Ponte, Brocardo, Oliveira, (2006, p.20), a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais:

1. Exploração e formulação das questões

Na exploração e formulação das questões, a pessoa busca reconhecer e explorar uma situação problemática e formular questões. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 30), é durante a fase de exploração que os estudantes "vão se embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa". Na nomenclatura utilizada por Dewey seria algo equivalente à observação, às primeiras sugestões e o início da fase de intelectualização da atividade reflexiva.

A respeito de exploração, Dewey afirma que o pensamento reflexivo que nasce de uma inquietação é mais bem treinado em uma questão em aberto. Segundo Dewey (p. 18), "o pensamento reflexivo faz um ativo, prolongado e cuidadoso exame de toda a crença ou espécie hipotética de conhecimento, exame efetuado à luz dos argumentos que a apoiam e das conclusões a que chega".

2. Conjecturas

A formulação de conjecturas inclui a organização dos dados. Conjecturar está intimamente ligado à aprendizagem de matemática. Para Brocardo (2006, p. 110), conjecturar é "aprofundar a compreensão da situação que se explora e conseguir imaginar uma generalização a partir de exemplos significativos".

As conjecturas podem surgir de diversas formas: observação direta ou manipulação dos dados, analogia a outras conjecturas etc. Como esse trabalho é mental, os autores defendem a importância de se fazer um registro escrito, pois poderá surgir a necessidade de explicitarem e comprovarem suas ideias. Como já apontado por Dewey, tem-se a tendência natural a se acreditar em algo desde que não haja evidências do contrário. Sobre isso Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 33) alertam sobre a "tendência dos alunos para aceitarem as conjecturas depois de as terem verificado apenas num número reduzido de casos". Cabe, ao professor, “estar atento a todo esse processo de formulação e teste de conjecturas, para garantir que os alunos vão evoluindo na realização de investigações” (2006, p.36). Assim o professor deve estimulá-los com questões que os conduzam a refletir e analisar em várias direções.

É na fase de conjecturas que se começa a perceber relações e formular hipóteses, que são conjecturas que se tornaram mais sólidas e refinadas no processo.

3. Testes e formulação

No momento de testes e refino das conjecturas, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) sugerem que se deva transmitir ao aluno a natureza provisória das conjecturas. Além de afirmarem que “à medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 38).

4. Justificação e avaliação

Justificar uma conjectura e avaliar uma solução significa realizar uma verificação que a valide como sendo uma proposição verdadeira. Assim, após os testes, justifica-se e avalia-se se chegou à uma conclusão aceitável acerca da questão.

Os quatro momentos de investigações segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) são coerentes com as fases da atividade reflexiva. Tanto na tese de Brocardo (2001) quanto no livro de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), entende-se que as investigações se iniciam por uma exploração de uma situação problemática que seria similar ao que Dewey se refere a uma situação indeterminada. De certa forma, a situação indeterminada é, em parte, a situação problemática que faz com que os alunos busquem explorar a situação para resolvê-la.

As atividades investigativas são coerentes com as ideias de Dewey, pois são não lineares e conduzem a explorações que produzirão as sugestões (conjecturas) e apontam para a necessidade inicial de se compreender realmente qual é o problema. Como a natureza da exploração e dos testes serem mentais ou conduzidos por atividades genuinamente mentais, com ou sem a utilização de ferramentas, entende-se que os testes das hipóteses estão incluídos na verificação e no raciocínio, segundo a atividade reflexiva.

Em uma investigação, Pirie (1987 apud BROCARDO, 2001, p. 98) defende que pretende-se que os estudantes “explorem possibilidades, formulem conjecturas, e se convençam a si próprios e aos outros da validade das suas descobertas”. Se em uma investigação os caminhos são múltiplos e as interações podem intervir na direção que a aula seguirá, é necessário propiciar circunstâncias que favoreçam o desenvolvimento do pensamento reflexivo. E essas circunstâncias estão intimamente ligadas a como se elabora o trabalho no sentido de fazer com que busquem conjecturar, inquirir, formular hipóteses e testá-las, pois se aprender é aprender a pensar, essa é uma forma de se treinar o raciocínio matemático dos alunos. O que é coerente com a proposta de Dewey que defende intelectualizar, formular hipóteses, inquirir e avaliar a solução.

De acordo com Brocardo (2001), deve-se começar pela clarificação do problema através de conjecturas iniciais e, sobre a importância de formular as conjecturas e dinâmica da investigação, ela afirma em sua tese:

> Este processo pode conduzir a recolha de mais dados, ao abandono de conjectura se à formulação de novas conjecturas. Torna-se então pertinente procurar estabelecer argumentos ou provas que possam validar ou rejeitar as conjecturas resultantes do processo anterior. Finalmente, uma outra característica deste processo resulta de ele poder gerar novas questões a investigar. (p. 99)

No capítulo seguinte apresentaremos a concepção de nossa atividade, desenvolvimento e descreveremos o local, turma e a atividade.

3 - MÉTODOS E PROCEDIMENTOS

Neste capítulo, apresentaremos o planejamento da atividade, os instrumentos de coleta de dados, o local, a turma e descreveremos resumidamente a atividade realizada.

3.1 O PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE

Nossa atividade sofreu diversas alterações desde sua concepção até sua efetiva realização. Ocorreram mudanças no público alvo, nos conteúdos matemáticos e até na duração da atividade. Isso ocorreu pela necessidade de readequação devido à análise do piloto, mudança da instituição onde seria aplicada a atividade, problemas de ordem burocrática e falta de espaço no calendário acadêmico. Entretanto conseguimos manter a essência da ideia desenvolvida na V SEMAT e as principais ideias do pensamento reflexivo e das investigações matemáticas que servem como base para fundamentar as crenças nas possibilidades educacionais desta atividade.

3.1.1 A ideia inicial

Nossa ideia inicial era desenvolver, com os alunos da disciplina de Cálculo Integral, uma atividade aplicando a Álgebra Linear ao Cálculo. Para isso, foram pensadas atividades que poderiam se utilizar dos conceitos de Álgebra Linear já estudados para trabalhar com alunos que começariam a estudar a integração por partes.

Como não era viável[2] desenvolver tal atividade na cidade de São João Del Rey, ela foi reformulada para que o trabalho fosse desenvolvido em uma disciplina de tópicos especiais que viria a tratar de aplicações gerais da Álgebra Linear, mas a disciplina de Tópicos acabou por não ser oferecida.

Após algumas conversas, decidimos realizar a atividade com alunos do curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, matriculados na disciplina de Álgebra Linear I que, em sua maioria, deveriam ter cursado o curso de Cálculo I[3]. Também existia um desejo de realizar um pós-teste quando iniciassem a disciplina de Álgebra Linear II (uma disciplina da

[2] No curso de Licenciatura em Matemática da UFSJ o curso de Álgebra Linear I antecede o curso de Cálculo Integral I.
[3] O que corresponde a limite, derivada e a introdução a integração em uma variável real.

modalidade Bacharelado), o que também foi considerado inviável, pois nem todos os alunos fariam essa disciplina na sequencia.

3.1.2 O Piloto da pesquisa

Durante quase todo o mestrado, eu fui tutor presencial do curso à distância de Matemática da UFOP em minha cidade, o que facilitou a realização do minicurso com alguns dos alunos do curso. Até este momento, meu principal embasamento teórico-metodológico havia sido na linha de João Pedro da Ponte a respeito de investigações matemáticas.

Assim busquei desenvolver uma atividade desafiadora, contextualizada e que pudesse fazer com que os alunos se utilizassem não só de conceitos estudados, mas de criatividade, debatessem ideias, formulassem hipóteses, refutassem desenvolvendo uma atividade matemática na concepção dos autores desta linha.

Foram convidados todos os alunos do terceiro período para participarem de um minicurso (similar à pesquisa de campo), pois estavam em um momento semelhante aos dos alunos que no semestre seguinte cursariam a disciplina de Álgebra Linear presencialmente onde realizamos a pesquisa de campo. Essa escolha facilitou bastante o trabalho, pois eu já conhecia a turma há mais de um ano e, dessa forma, pudemos ir direto para a atividade sem a necessidade de encontros para desenvolver laços ou testes para saber por onde começar. Esta atividade foi aplicada presencialmente, no sábado à tarde, o que acabou por limitar o número de alunos a três, mas que dava aos alunos que moravam fora a oportunidade de participarem da atividade.

Inicialmente, definimos uma transformação linear e foi dado um exemplo. Refizemos o exemplo na representação matricial desconhecida até então. Levantamos a questão se a derivada seria uma transformação linear e os auxiliamos a descobrirem que sim. Então levantamos a questão da integração e procuramos conduzir a atividade em cima de sugestões, ideias e discussões que ocorressem, pois, segundo Brocardo (2001, p.99), “é importante começar a formular e testar as primeiras conjecturas. Este processo pode conduzir a recolha de mais dados, ao abandono de conjecturas e à formulação de novas conjecturas”.

Nos dois encontros seguintes, fomos procurando resolver a questões dos alunos que foram aparecendo; sempre gerenciando as discussões que surgissem e os ajudando-os a trabalhar as dificuldades que aparecessem. Somente no último encontro, introduzi um tópico novo. Optei por falar das equações diferenciais, que viriam a estudar após um ano, e que poderiam ser tratadas de forma matricial naquele momento. Ao final, discutimos sobre a atividade com os participantes, recebemos sugestões e passei a eles um arquivo com parte do meu trabalho de iniciação científica.

Após a realização do minicurso, percebemos uma maior necessidade de valorizar um referencial que defendesse uma investigação mais focada em um objetivo a atingir. A busca por um pensador que defendesse essa ideia conduziu o trabalho a John Dewey. Também notamos algumas vantagens na utilização da filmadora com a qual gravávamos as atividades desses estudantes para serem enviadas aos professores da UFOP.

3.1.3 Instrumentos de coleta de dados, características da pesquisa e métodos da análise

Como procuramos entender a forma como uma atividade socialmente reflexiva faria com que os estudantes mobilizassem seus saberes, principalmente de Álgebra Linear e Cálculo, e de acordo com nossos referenciais apontados no capítulo anterior, adotarmos métodos e procedimentos de análise qualitativa. E, ao assistir a gravação do piloto, pude perceber alguns detalhes como, por exemplo, momentos de linguagem corporal expressos pelos alunos que poderiam ser utilizados para auxiliar nos debates, e assim, em nossa análise. Por isso, consideramos que a filmagem que, embora pudesse inibir alguns alunos, nos possibilitaria prestar maior atenção às discussões que conduziriam o nosso trabalho. Desta forma, na pesquisa de campo, optamos por utilizar a filmadora, bem como o caderno de campo do pesquisador e trabalhos escritos dos estudantes para a coleta de dados.

Como nossa atividade seria realizada com um grupo de alunos dos quais possuíamos pouca ou nenhuma informação, era necessário desenvolver uma relação de confiança como, também, determinar um ponto de partida baseado em seus conhecimentos matemáticos.

Para a questão da relação pessoal, entendemos que o momento em que acompanharíamos as aulas da turma poderia servir como uma apresentação e que uma postura que convidasse os estudantes a participar de forma mais ativa da aula também ajudaria neste processo. Sobre este aspecto, continuaremos a falar posteriormente. Já sobre a questão da matemática, era necessário aplicar um instrumento de sondagem e desenvolver um momento inicial para apresentação dos tópicos.

Sem tal sondagem, poderíamos criar situações de modo que os tópicos que viriam a ser discutidos não tivessem significado para os alunos e, assim, poderiam passar insensivelmente pelo tema, não existindo dúvidas que desencadeassem o processo de reflexão, pois, para

Dewey (p. 24) “a necessidade de solução de uma dúvida é o fator básico e orientador em todo o mecanismo da reflexão”. Ele também defende que os conhecimentos prévios, ou experiências passadas, são necessários para que ocorram sugestões ou ideias que possam vir a ser úteis na solução dos problemas e, dessa forma, era necessário conhecermos também sobre os conhecimentos dos alunos.

Já para a apresentação dos tópicos, optamos por uma postura que fosse similar à ideia de exploração de Ponte, Brocardo, Oliveira (2006). Durante essa apresentação, também buscamos incentivar a participação dos estudantes de forma a deixa-los mais à vontade para intervir, opinar e discordar tanto dos caminhos ou sugestões para solução das atividades em sala de aula como de minhas opções na condução da atividade.

Dessa forma, decidimos, no primeiro momento, que a atividade da pesquisa do campo se desenvolveria em seis encontros de cinquenta minutos que deveriam se prestar a sondagem inicial, introdução ao tema, mais dois encontros sobre as transformações derivada e integral, composta de transformações e, por fim, das equações diferenciais. Mas para não comprometer a carga horária do curso, pois os encontros aconteceriam nas aulas da disciplina de Álgebra Linear, houve uma reelaboração do cronograma de atividades da pesquisa do campo. No lugar dos seis encontros, de cinquenta minutos, ocorreram somente três encontros de duração equivalente.

Já para realizar a análise dos dados desta pesquisa adotamos o método de análise de conteúdo qualitativa (GRANEHEIM; LUNDMAN, 2004), no qual interpretamos as transcrições da filmagem com base em unidades de sentido, por exemplo, timidez ou insegurança. Em um segundo momento, agrupamos unidades de sentido em categorias, algumas *a priori* e outras emergentes; a ser explicitas no capítulo 4.

3.2 DESCRIÇÃO DO LOCAL

Durante o segundo ano de mestrado, aconteceu meu primeiro contato com a turma e com o professor da disciplina. Nos primeiros dias, a turma tinha em torno de trinta e poucos alunos e era dispersa. A mobília da sala era antiga e a acústica não muito boa. Os corredores estavam quase sempre movimentados e o barulho externo a sala chegava a incomodar nos minutos iniciais e finais da aula. O professor era sério, sempre definia claramente os tópicos e buscava trazer a turma ao debate. Ficou acordado que o pesquisador acompanharia as aulas da turma no início do semestre em antecedência à realização da pesquisa de campo e faria observações que considerasse pertinentes ao tópico matemático ou à aprendizagem dos alunos.

Após o primeiro mês, o número de alunos que frequentavam a referida disciplina já era um pouco menor. Os alunos começaram a participar mais ativamente das aulas, embora o professor desse total liberdade a eles para intervirem no processo, os discentes ainda atribuíam a ele o papel de lhes dizer quando e como participar. Também havia algumas atividades extras aos sábados para discutir alguns tópicos ou para se tirar dúvidas de exercícios.

3.2.1 Os estudantes participantes da pesquisa

Do total de alunos que concluiu o curso, doze participaram da nossa pesquisa; quatro homens e oito mulheres dos quais apenas um homem e três mulheres participaram dos três encontros. Aqui faço uma breve descrição de cada um deles com o intuito de observar sua evolução no decorrer do projeto.

a) Aluna 01: esforçada, estudiosa e de comportamento introspectivo. Preocupou-se bastante em não passar vergonha na sondagem, ficou grande parte do tempo tensa e ansiosa. Tinha extrema preocupação em escrever a resposta certa. Era tímida, fazia poucas perguntas e era insegura para fazer afirmações nas aulas. Participou de todos os encontros e, no último, sentou-se na parte de trás da turma e participou um pouco mais.
b) Aluna 02: era atenta e compenetrada nas aulas. Durante o primeiro encontro, não se manifestou em nenhum momento, embora parecesse envolvida e concentrada nas aulas. No segundo encontro, se manifestou por duas vezes, mas se ocultou da câmera durante todo o tempo. Já no terceiro encontro, participou mais efetivamente, inclusive em debates com os colegas e colaborou com a turma nos avanços. Mostrou uma postura mais madura diante dos problemas, embora sua inibição possa ter sido um impedimento para uma participação mais ativa.
c) Aluna 03: Não era muito participativa nas aulas regulares. Parece ser tímida e ficar pouco à vontade em ter que tomar a iniciativa. Foi mudando gradativamente para uma postura mais ativa durante o decorrer da atividade. Compareceu a todos os encontros.
d) Aluna 04: era mais extrovertida, mas não muito participativa nas aulas. Já na sondagem, não se sentiu à vontade quando evocamos alguns dos conceitos de cálculo. Ficou mais bloqueada depois que falamos de derivada e se mostrou bastante perplexa

nos momentos seguintes. Também se preocupava muito com os erros na sondagem que evidenciariam dificuldades. Ainda não estava cursando Cálculo II, momento em que estudaria integral. Apesar de suas dificuldades, ficou bastante concentrada e também compareceu ao segundo encontro.

e) Alunas 05 e 06: eram muito ligadas, discutiam algumas coisas entre si durante as aulas. No primeiro encontro, tentaram fazer as atividades, prestavam atenção nas discussões ou explicações e sempre brincavam para tentarem se descontrair.

f) Aluna 07: foi uma aluna de postura mais introspectiva e pouco participativa. Compareceu ao segundo encontro, fez anotações e tentou resolver algumas questões. Discutiu apenas algumas vezes com o aluno 04. Parece não ter se sentido à vontade com a proposta de trabalho.

g) Aluna 08: Era participativa e dedicada nas aulas. Participou dos dois últimos encontros e acabou por incendiar a turma, tendo atuado de forma muito efetiva, mas, por vezes, dificultando os colegas a refletirem. Buscou, algumas vezes, raciocínios quase dicotômicos que não se aplicam a questões abertas dessa natureza.

h) Aluno 01: muito focado e participante nas aulas. Em nosso trabalho, manteve uma postura predominantemente reflexiva e aderiu rapidamente à ideia. Mostrava uma maior maturidade diante de problemas matemáticos e acabou por chamar a atenção por sua capacidade de reconhecer padrões. Participou de todos os encontros. Estava cursando seu último semestre, cursando a disciplina que “perdeu”.

i) Aluno 02: parecia um pouco disperso nas aulas e preferia debater com colegas. Em nosso trabalho, foi se soltando aos poucos, mas, por vezes, parecia até estar se ocupando de outras coisas. Algumas vezes se envolveu e colaborou com o desenvolvimento do grupo. Participou dos dois últimos encontros.

j) Aluno 03: parecia estudioso, mas não muito participativo. Não se envolveu no projeto e participou apenas do segundo encontro.

k) Aluno 04: foi se tornando mais participativo nas aulas e também no projeto. Gostava de discutir com colegas e possuía uma linguagem um tanto corporal e alguma dificuldade para verbalizar. Participou dos dois últimos encontros e se envolveu demonstrando interessar-se pelos debates.

3.3 A DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

A atividade foi desenvolvida em três encontros de aproximadamente cinquenta minutos, no final do semestre letivo, nos dias 10/06 (sexta-feira) e 17/06(sexta-feira), ocupando a segunda metade da aula de 19h50min às 20h40min , e dia 18/06 (sábado), de 14h30min às 15h10min , após uma aula de exercícios no sábado que se iniciou às 13 horas.

O professor da disciplina permaneceu na sala de aula durante todo o tempo da atividade. Permaneceu sentado na primeira carteira da fila mais à esquerda da classe e, embora se envolvesse com a atividade demonstrando felicidade com os progressos obtidos pelos alunos, não interveio de forma direta e sua posição não permitia que percebessem suas reações observadas apenas por mim, principalmente ao assistir à filmagem.

Embora eu já houvesse acompanhado algumas aulas da turma na sexta-feira, comecei a conhecê-los, de fato, durante a execução da pesquisa. E, embora o professor da disciplina desse espaço ao debate, eles se acanharam bastante comigo e com a câmera no primeiro encontro.

Participaram do primeiro encontro um aluno que chamaremos de aluno 01 e mais seis alunas que chamaremos de aluna 01 a aluna 06. O encontro foi dividido em dois momentos: Sondagem Inicial, na qual buscaríamos perceber os conhecimentos matemáticos que a turma já possuía e, em um segundo momento, uma exploração na qual abordamos alguns tópicos que poderiam ser úteis para que pudessem desenvolver bem as atividades e, simultaneamente, aproveitar esse momento para um nivelamento.

As questões da Sondagem Inicial foram elaboradas com foco nos conhecimentos prévios e futuros necessários ao trabalho. As questões seguem abaixo:

1. *O que é um Espaço Vetorial?*

Essa questão foi escolhida para sabermos se os alunos tinham uma boa noção do que viria a ser um espaço vetorial.

2. *O que é a base de um Espaço vetorial?*

Outro conceito fundamental para trabalharmos com transformações lineares é o conceito de base de um espaço vetorial.

3. *Qual a derivada de h em relação a t, onde* $h(t) = t^2e^t$*?*

Essa questão foi colocada devido ao fato de nossa atividade inicial partir da construção de uma transformação derivada, o que faria necessário saber se a turma já tinha conhecimento sobre derivadas. Esta função foi escolhida devido ao fato de pertencer a uma das bases que será utilizada, como exemplo, em nossa pesquisa. O espaço gerado por esta base será fechado para a integração e derivação.

4. *Qual a integral de g(t), onde g(t) =te^t?*

Essa questão foi escolhida porque uma opção interessante seria trabalhar com a transformação inversa da transformação derivada. Também escolhida por pertencer a mesma base da questão acima e, de utilizar o método de integração por partes, que também poderá ser um dos caminhos adotados para resolver alguns problemas que serão adotados na pesquisa de campo.

5. *A transformação derivada é uma transformação linear?*

Essa questão é a mais importante, pois nosso trabalho era focalizado na representação matricial de transformações lineares.

6. *O conjunto E=[u(x), v(x)], u(x)=sen(x) e v(x)=cos(x), é LI ou LD?*

Para podermos trabalhar com o espaço de funções, acreditamos ser necessária a expansão da ideia de dependência linear nesse espaço, pois será necessário aplicar o conceito de dependência linear para todo o domínio das funções em questão, e tal questão nos pareceu promissora para se promover e observar as discussões que poderiam ocorrer entre os estudantes.

Estas questões foram apresentadas, uma de cada vez na lousa, e aguardamos um tempo que consideramos hábil para o desenvolvimento de cada uma, sem deixar de observar se o tempo estava sendo suficiente. Ao final da sondagem, recolhi a folha na qual os estudantes responderam a sondagem, e comecei a explorar alguns temas para ajudar no próximo encontro. Deste momento em diante, procuramos incentivar os alunos a serem mais participativos e a apresentarem algumas conjecturas. Procurei mantê-los despertos e focados para poderem tirar melhor proveito dos tópicos discutidos neste encontro. As edificações são mais prováveis quando o empenho está voltado a um objetivo. É neste momento que o professor pode fazer sugestões e os estudantes formularem algumas conjecturas ou hipóteses. Iniciei discutindo a questão sobre transformação linear, exemplificando a transformação

$$T(x, y) = (2x, 2y)$$

e fiz alguns exemplos numéricos para uma melhor exploração do tema e discuti sobre a construção da matriz que representava essa transformação.

Depois discuti a aplicação da transformação derivada sobre os vetores da base

$$B = \{e^t, te^t , t^2e^t\}$$

que gerava um espaço de dimensão três. Também revisamos algumas propriedades de derivação e construímos a matriz que representa a transformação derivada em relação à essa base.

Ao segundo encontro, compareceram mais três alunos e duas alunas e, não compareceram: aluna 05 e aluna 06. Procurando trabalhar com todos resolvi começar revisando e explorando alguns temas do encontro anterior.

Voltei a falar das duas transformações do primeiro encontro e da construção das matrizes que as representam. Posteriormente questionei se seria possível pelo processo matricial derivar um exemplo derivado anteriormente e logo perceberam se tratar da derivada segunda. Então o trabalho se voltou para a construção da derivada de segunda ordem e os alunos a desenvolveram de maneiras distintas.

Logo na sequencia os questionei sobre a integral ser uma transformação linear. E o trabalho foi conduzido para que conseguissem não só construir a matriz de integração como comprovar sua eficácia.

Ao terceiro encontro, compareceram os alunos 01, 02 e 04 e as alunas 01, 02, 03 e 08. E também compareceu o professor Dale que, posteriormente, tornou-se o orientador desta pesquisa e manteve, durante este encontro, uma postura de observador. Infelizmente já era possível notar algum cansaço nos alunos, pois a maioria também cursava Cálculo II que também teria aula extra pela manhã.

Comecei por recordá-los da questão 06 sobre o conjunto gerador

$$[\text{sen}(x), \cos(x)]$$

Ser ou não LI. Tal discussão foi muito longa e cheia de reviravoltas.

Então conversamos sobre a derivação nesse espaço e operamos com alguns exemplos matricialmente. Também foi sugerido aos estudantes que fizessem a representação geométrica do vetor derivada. Posteriormente, eles realizaram um trabalho de encontrar derivadas sucessivas e observar sua relação geométrica. Por fim foi discutido sobre a integração nesse espaço e sobre as relações algébrica e geométrica das matrizes de derivadas sucessivas e de integração neste espaço já citado.

No próximo capítulo, apresentaremos nossos resultados da análise e faremos algumas considerações sobre a pesquisa. A análise foi realizada utilizando, principalmente, os vídeos gravados durante as atividades e as transcrições das mesmas, embora também tenhamos utilizado algumas anotações feitas após cada encontro. Optamos por trazer alguns recortes que exemplificam as categorias encontradas e discutiremos como nos apoiamos em nossos aportes e como estes nos auxiliaram em nossa análise.

4 - ANÁLISE E CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo, apresentaremos os resultados de nossa análise dos dados. Optamos por apresentar cada uma das categorias como subseções e, *a priori*, admitimos a existência de seis categorias: sugestão, formulação de hipótese, verificação, reconhecimento, edificação-com e construção. Mas, logo, apareceram duas categorias emergentes que chamamos de: embaraço social devido aos momentos de timidez e insegurança da turma, e recordando conteúdos que acreditamos ser importantes para a realização do trabalho e para incentivar os estudantes ao debate. Não encontramos indícios suficientes de construção em nossa pesquisa.

Apresentaremos, a seguir, as categorias, sua descrição e nossas interpretações sobre os diálogos que nelas estão inseridos. Como optamos por separar o texto por categorias e não de uma forma cronológica para facilitar a apresentação da análise das categorias, aos que tiverem a intenção de realizar uma leitura cronológica, basta seguir a sequencia dos excertos: 01 ao 06; 12, 7 ao 10; 27, 23, 28, 13, 18, 14 ao 17; 11, 19 ao 21; 26, 29, 24, 25 e 22. Também para os que preferirem observar os excertos que geram o encadeamento de ideias, sugerimos a leitura destes excertos:

- 9 e 10: tratam da representação matricial de uma transformação linear;

- 14 ao 17: tratam da discussão sobre a dependência linear do conjunto $A = \{sen(x), cos(x)\}$;

- 19 ao 21: tratam da construção da matriz que representa a derivada segunda em relação ao espaço gerado pelo conjunto A;

- 26, 24 e 25: Tratam de uma busca de generalização para derivadas de ordem superior a 2 no espaço gerado pelo conjunto A;

- 28 e 29: tratam da integração no espaço gerado pelo conjunto A.

Algumas vezes, usaremos o símbolo [...] para justificarmos haver outras falas que não apresentamos em nosso recorte por julgarmos que não têm relevância para a análise. Também utilizamos professor xx por não termos pedido sua autorização para a divulgação de seu nome; e aluno xx quando não for possível identificar o autor da fala. Devido à opção de apresentar as categorias como subseções, os recortes não necessariamente aparecerão de forma cronológica.

4.1 EMBARAÇO SOCIAL

Tratamos, como timidez ou insegurança, os momentos em que os estudantes se sentem inseguros para tomar as rédeas da atividade, quando buscam no professor a confirmação para poderem seguir ou quando demonstram-se embaraçados com suas dificuldades em relação ao conteúdo ou à necessidade de se exprimirem. Estas atitudes podem, segundo Dewey, atrapalhar a curiosidade e a inquirição social.

Já no primeiro encontro, as alunas presentes formaram uma fila única à frente da filmadora, que precisou ser trocada de posição para possibilitar o registro dos estudantes. Para que não ficassem mais incomodados, brinquei sobre a situação antes de mudar a câmera de posição. Essa já foi uma primeira mostra de timidez dos estudantes.

Já em uma conversa, na primeira questão da sondagem, a aluna 01 mostrou-se incomodada quando disse:

Excerto 1

Aluna 01:	Bom é se não tivesse nome.

Ela já demonstrava embaraço sobre o que eu poderia pensar sobre ela após analisar o que em sua mente parecia-se com um teste.

Outro representante autêntico dessa categoria revelou-se numa expressão facial e não em uma fala. Tal expressão ocorreu durante a apresentação da terceira questão da Sondagem Inicial que referia-se à derivada de uma função. Foi marcante a mudança de expressão da aluna 04 logo após eu citar a palavra derivada.

Excerto 2

Aluna 04:	Imediatamente após eu falar derivada, a aluna 04, deu um sorriso misto de espanto e constrangimento e sua feição ficou triste.

Foi marcante sua mudança de expressão no momento em que pronunciei a palavra derivada, o que chamou profundamente minha atenção durante a realização da atividade. Sua expressão sofreu uma mudança tão abrupta que chegou a me desconcentrar por um instante.

Já na apresentação da quarta questão, a mesma aluna mostrava-se embaraçada por não ter cursado Cálculo integral no momento em que foi pedido para que resolvessem a integral:

$$\int te^t\,dt$$

Excerto 3

Aluna 04:	E pra quem não fez?

Percebendo seu desconforto, disse para que escrevesse que não cursara a disciplina. Ela demonstrou alguma agitação em seu semblante. Disse para a turma que quem não conseguisse calcular, mas que soubesse o procedimento, que deveria citá-lo.

Ela pareceu perdida e insegura. Na terceira questão, ela havia escrito não se lembrar e nessa ela verbalmente afirmava não ter cursado.

A aluna, aparentemente ainda insegura, buscava que eu aprovasse até respostas simples. E ela, buscando que eu confirmasse sua questão, perguntou em seguida:

Excerto 4

Aluna 04:	Vai ficar igual à terceira?

O fato de buscar meu aval até em questões corriqueiras mostrava que ela estava um pouco incomodada e embaraçada.

Logo após terem sido questionados se a operação derivada era uma transformação linear, a aluna 04 novamente procurou uma forma de respaldar sua resposta, mas com uma lembrança da aula do professor da disciplina.

Excerto 5

Aluna 04:	Eu posso falar que sim por que o professor xx falou que é?

Ela pôde ter influenciado outra aluna que deu resposta similar na parte escrita. A aluna se mostrou constantemente insegura e desconfortável durante quase todo o primeiro encontro. Procurei conversar com ela sempre que possível para ajudá-la a romper essa barreira.

Logo após eu confirmar para a aluna 04 que poderia responder que sim porque o professor havia dito que era, fui surpreendido por uma fala da aluna 03:

Excerto 6

Aluna 03:	Você vai achar que nós somos burros.

Esta é outra fala que reforçava a necessidade dessa categoria e mostrava que alguns estudantes ficam bastante incomodados no primeiro encontro. Então procurei mostrar a eles que outras dificuldades foram vencidas e que já haviam superado vários problemas com outros conteúdos, ou seja, procurei deixar claro que a aprendizagem é um processo. Nesse primeiro encontro, em que ocorreram a sondagem e uma revisão, a turma se mostrou bastante acanhada.

Já no segundo encontro, enquanto eram revisados os tópicos discutidos no encontro anterior, questionei sobre como montar a matriz que representava a transformação derivada de forma matricial. A aluna 02 que praticamente não havia se manifestado no primeiro encontro e que passara a maior parte do tempo se ocultando da câmera atrás do aluno 02, mostrou alguma dificuldade em se expressar quando disse algo que não consegui ouvir, então pedi para que repetisse o que havia dito. Como ela demorou a se manifestar, a aluna 03, transmitiu sua ideia por ela.

Excerto 7

Aluna 03:	Ela disse que aplica a transformação nos vetores da base.

Neste momento, ela respondera em voz baixa como construir uma matriz que representava uma transformação. Quando pedi que respondesse, ela nada respondeu e foi apoiada pela colega. Ficou explícito seu embaraço tanto por falar baixo e não repetir como por sua postura de se ocultar.

Percebendo que eu não me posicionei sobre a fala, as alunas 01, 02 e 03 e o aluno 02, iniciaram um pequeno debate e a aluna 01 se mostrou incomodada.

Excerto 8

Aluna 01:	E se estiver errado?

Naquele momento, optei pelo silêncio para procurar mantê-los discutindo. Em seguida, o aluno 02 confirmou estar certo e, por parecer que a maioria dos colegas concordava com ele, segui com a atividade.

O embaraço social mostrou-se presente especialmente nos dois primeiros encontros. Deve ser encarado com naturalidade e cuidado, mas deve ser trabalhado, de forma sutil, o processo de sua eliminação para não comprometer a atividade.

4.2 EXPLORANDO CONTEÚDOS

Algumas vezes optei por revisar, de uma forma mais exploratória, alguns conteúdos para ajudar os alunos a recordar/reorganizar seus conhecimentos objetivando que a turma trabalhasse de forma mais homogênea. Tal trabalho foi necessário tanto no sentido de recordar conteúdos como para que os estudantes assumissem uma postura mais ativa e reorganizassem o conhecimento de forma mais compatível com as aplicações que eram pretendidas na atividade. Também para a realização da atividade, era necessário conhecer a turma, ter uma noção de seus conhecimentos prévios e produzir um nivelamento. Apresentamos algumas passagens em que os alunos estavam confusos e foi necessário o apoio do pesquisador-mediador para estruturação de alguns conceitos. Esse trabalho de exploração foi desenvolvido de acordo com as ideias de observação e inquirição social de Dewey.

Na interação/discussão sobre como se realiza o produto de uma matriz que representa uma transformação linear e um vetor ao qual ela seria aplicada apareceram algumas dúvidas:

Excerto 9

PE:	É que eu preciso saber se vocês estão falando na horizontal ou na vertical pra eu poder escrever a matriz.
Axx:	Vertical.
Axx:	Horizontal.
Axx:	Vertical.
Axx:	Vertical.
PE:	Vertical ou horizontal?
Aluno 01:	Vertical.
PE:	Por quê?
Aluno 01:	Transposto.

Esta passagem mostra que começaram a interagir e como ninguém assumiu a defesa da posição horizontal, encerrou-se a discussão. Como a discussão ocorreu em um momento de exploração, ela demonstrava o crescimento da interação e que alguns alunos possuíam dúvidas sobre conceitos fundamentais para o estudo da Álgebra Linear.

Na sequencia, continuando a exploração, começamos a ter um debate sobre como aplicar a matriz T de uma transformação a um vetor u, onde:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \textit{ e } u = (-3, 5)$$

Excerto 10

Aluno 01:	Vai ficar uma matriz *(-3, 5)*^{T}, [aqui ele sinalizou com a mão a posição transposta, multiplicando por T].
PE:	Você está dizendo que vai ficar uma matriz *(-3, 5)*^{T} e depois T?
Aluno 01:	Não, T vezes...
Aluna 08:	Não, [falou interrompendo o colega].
PE:	Então é *T* vezes *u*?
Aluno 01:	É a matriz da transformação *[2, 0/ 0, 2]* vezes o vetor...
Aluna 08:	*(-3, 5).*
PE:	Pessoal, façam aí rapidinho e, vejam se este produto vai dar isto aqui [o vetor (-6, 10)] pra nós.
Aluno 02:	Dá, [falou imediatamente].

Nesse ponto, observava-se uma pequena confusão do aluno 01 que percebeu imediatamente o equívoco, após a fala da colega. Acreditamos que alguns dos outros alunos poderiam ter apresentado dúvidas também sobre esse tema, pois, na filmagem, observamos que após a confirmação do aluno 02, alguns ainda faziam registro escrito.

Quando tentamos derivar uma função do espaço gerado pelo conjunto gerador:

E = [sen(x), cos(x)],

surgiu outro equívoco, novamente ligado à ordenação da base resultado do produto da matriz D pelo vetor f, onde:

$$D= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \textit{ e } f = (3, -1)$$

Excerto 11

PE:	E agora este produto? (*Df*)
Aluno 01:	Dá (1, 3).
	[... enquanto eu fazia as contas do produto...]
Aluno 01:	Vai dar errado também. A hora que você...
Aluna 08:	Tinha que ser menos seno.
Aluno 01:	Você vai analisar com a verdadeira derivada...
[O Aluno 04 sinalizou negativamente com a cabeça e voltou a ficar pensativo].	
Aluna 08:	*Tá certo.*
[Tirando proveito do equivoco em prol do debate, questionei sobre a diferença das derivadas]	
PE:	*Aqui vai ser diferente dali?*
Aluna 08:	*Vai ser 1 seno e 3 cosseno, tá certo ué.*
Instantaneamente o aluno 01 sinaliza com a cabeça positivamente.	
Aluno 04:	Tá certo. A primeira entrada é seno e a segunda é cosseno. Tá certo.

Esses debates mostravam como os estudantes se confundiam em conceitos tidos, muitas vezes, como fundamentais e a importância de dar voz aos mesmos para que pudéssemos conhecer melhor os alunos e tentar contornar tais problemas que poderiam comprometer a aprendizagem. A opção de fazer uma exploração é coerente com as ideias de Dewey, pois auxilia na intelectualização por meio da obtenção de dados e observação do problema.

4.3 RECONHECIMENTO

Selecionamos partes do trabalho em que os alunos perceberam quais conhecimentos matemáticos podem ser utilizados para edificação-com ou construção.

Durante a exploração da aplicação de uma transformação linear, especificamente na transformação T escrita na lousa

$$T(x,y) = (2x, 2y)$$

o aluno 01 reconheceu as propriedades do produto por escalar e logo respondeu sobre o efeito da transformação aplicada ao vetor.

Excerto 12

Alunos:	Dobra os vetores.
PE:	Por quê?
Aluno 01:	Porque é um produto escalar... Tira o 2 pra fora e fica duas vezes o próprio xy não é?
	[O Aluno 01 quis dizer produto por escalar nesta fala].

Embora estivesse exposto na lousa como uma transformação linear, ele percebeu que poderia ser tratado como um produto por escalar e prontamente justificou a visão dos colegas. Podem ter ocorrido outras interpretações dos colegas nessa passagem, mas o único a verbalizar sua ideia quando questionado foi o aluno 01.

Ou, em outro momento, quando a aluna 08 reconheceu que as operações de integração e de derivação compartilham das mesmas propriedades, provavelmente lembrando que ambas as operações preservam o produto por escalar e a soma. Logo após eu me equivocar sobre o que ela realmente havia dito, procurei entender como ela pensou, então perguntei a ela que respondeu:

Excerto 13

Aluna 08:	Eu pensei assim que a integral é uma antiderivada [...]. Então se a gente conseguiu fazer uma coisa com a derivada... E a antiderivada tem as mesmas propriedades então dá pra fazer também.

Ela reconheceu que com as propriedades da derivada e da integral, poderiam solucionar a questão de ser possível exibir uma matriz que representasse a integral, pois assim como a derivada preserva o produto por escalar e a soma a integral também preserva. Então, essa aluna, baseou-se no fato de a integral também ser uma transformação linear para sustentar sua crença da possibilidade de exibir uma matriz que representasse a integração no espaço gerado pela base $B=\{e^t, t\, e^t, t^2\, e^t\}$.

Já no terceiro encontro, quando questionados como proceder para verificar se o conjunto gerador $A= [sen(x), cos(x)]$ seria LI, eles ficaram um pouco confusos, pois conversaram entre si e tentaram várias ideias desconectadas, mesmo após terem feito um exemplo numérico. Acredito que isso se deva ao fato de possuírem pouca experiência sobre o espaço de funções.

Mas conseguiram realizar boas discussões dentre eles e começaram a ocorrer alguns reconhecimentos, como por exemplo:

Excerto 14

Aluna 08:	a sen(x) + b cos(x) = 0
PE:	E?
Aluna 08	Para ser, a e b tem que ser 0.

A aluna 08 aplicou o conceito de ser LI a esse conjunto. Ela parece ter sido a primeira a perceber que o conceito a ser aplicado ao espaço de funções era o mesmo.

Na sequencia, questionei sobre como resolver a equação e novamente alguns ficaram confusos, começaram a ocorrer pequenos debates, pois pareciam não acreditar nas ideias que lhe surgiam. O aluno 02 chegou a começar uma frase e depois falou para a aluna 03 que não sabia. Todos estavam envolvidos, mas não sugeriram para mim nenhuma ação, então escrevi a equação na lousa:

$$a\ sen(x) + b\ cos(x) = 0$$

e o aluno 04 sugeriu:

Excerto 15

Aluno 04:	Dividiria tudo por sen(x).
	[...]
PE:	Vamos tentar. Vai ficar *a + b cos(x)/ sen(x)*, cos(x) sobre sen(x) é o que mesmo?
Aluno 04:	Cotg(x) vai ser este valor (-a/b)

Assim que o aluno 04 deu sua sugestão, optei por escrever na lousa:

$$a + b\,\frac{cos(x)}{sen(x)} = 0$$

Embora soubesse que precisariam mudar o foco para o ângulo, procurei privilegiar sua fala e logo escrevi também a simplificação:

$$cot(x) = -\frac{a}{b}$$

Ele reconheceu que poderia utilizar-se de simplificações trigonométricas para resolver o problema. Mas o que ele conseguiu de fato foi simplificar o problema e auxiliar os colegas na sua solução, como veremos na próxima categoria.

Essa etapa de reconhecimento é essencial para que ocorram a edificação ou a construção. Também deve ser aproveitada para se observar os conhecimentos prévios dos alunos e incentivar a construção do conhecimento compartilhado.

4.4 EDIFICAÇÃO

A edificação caracteriza-se pelo uso de abstrações existentes e ocorre sem a necessidade de se gerar um novo conhecimento matemático. Para que elas ocorram, é necessário que ocorra também o reconhecimento. Nesta categoria, apresentaremos as edificações ocorridas de forma individual ou socialmente, conforme já tratados por Hershkowitz et al (2007).

Diante de algumas sugestões, o diálogo iniciado antes do excerto 14 até agora, acabam por oportunizar discussões, nas quais os estudantes conseguem chegar a uma edificação-com obtida de forma bem socializada. Dessa vez, foi necessária minha intervenção para evitar que se perdessem. Dando continuidade à questão de LI para o conjunto E da última seção, perguntei:

Excerto 16

PE:	Se isto acontecesse seria LI?
Aluno 04-Aluna 08:	Não [respondem simultaneamente os dois alunos].
Aluno 01:	Se isto acontecesse você não poderia ter nem o b ali igual à zero. E isto traria outro problema.

Minha opção por realizar alguns registros escritos e algumas ideias expressas, principalmente pelo aluno 04 e pela aluna 08 nos excertos anteriores, acabaram por auxiliar o aluno 01 a perceber a impossibilidade de b ser 0. Dessa forma, ele realizou uma edificação-com com propriedades da divisão, funções trigonométricas e com a definição de um conjunto ser LI. E com sua fala, aluno 01, auxilia os demais alunos a perceberem a impossibilidade de se resolver a questão na direção que os estudantes optaram por seguir, circunstância pouco comum em sala de aula. A turma estava bem envolvida com a questão. Todos estavam debatendo ou escrevendo naquele momento. Percebo que o estado de dúvida descrito por Dewey pareceu ter tomado conta do ambiente e então procurei auxiliá-los na direção que deveriam seguir. Perguntei se o cosseno é igual a um número de vezes o seno (cos(x) = k sen(x)). Então o debate começou a se focar no ângulo e, durante alguns instantes, ficou difícil entender a argumentação dos estudantes que defendiam muitas respostas falando todos quase simultaneamente. A aluna 08 começou a encontrar valores para cada ângulo, acreditando que seria LD e acabou convencendo alguns colegas. Então lembrei a ela que deveria exibir um valor para *a* e outro para *b*. A turma continuou debatendo entre si até que um grupo de hipóteses auxiliou na solução dessa questão. A aluna 08 começou a tentar se justificar, inclusive buscando que eu confirmasse sua opção, perguntando se o caminho estava errado, mas não me posicionei. Então o aluno 01 disse:

Excerto 17

Aluno 01:	Não. Se for 90 graus, por exemplo, vai dar 1 que é igual a k vezes zero.
PE:	Se x = 90^0 vai obter o quê?
	[...]
Aluno 01	k*0 = 1, aí como que você vai fazer este k virar zero? Um dividido por k não pode ser zero. [Em outras palavras, ele afirmou que não existia um número que multiplicado por zero tenha como resposta 1].
	[...]
Aluno 01	Sinal que é LI. Porque não tem como escrever uma combinação linear para todos os ângulos.

Foi fechada a questão através de uma cadeia de ideias que começaram no excerto 13 e seguiram até o excerto 16. Realizou-se um dos principais debates ocorridos durante nossa pesquisa e um bom exemplo de uma edificação-com obtida através do conhecimento compartilhado em que aparecem: combinação linear, dependência linear, propriedades da divisão, simplificações trigonométricas, tentativas de solução local (ângulos específicos), impossibilidade de o conjunto ser LD.

Em outra discussão, sobre a possibilidade de se construir uma matriz que represente a transformação integral em relação à base $B=\{e^t, t\, e^t, t^2\, e^t\}$, os estudantes foram incentivados a apresentar essa transformação tendo como base apenas o exemplo realizado com a transformação derivada. A aluna 04 conversou com o aluno 02:

Excerto 18

Aluna 04:	Você vai pegar os vetores da base e integrar. Vai achar os mesmos números. [Aqui pareceu que ela quis dizer que também encontraria os coeficientes em relação à base e não que seriam os mesmos valores da transformação derivada].
Aluno 02:	Não vão ser os mesmos.
Aluna 04:	Tá, aí você vai construir a matriz. Aí você vai montar a transformação. Você pode testar com um exemplo...

A aluna 04 manifestou um grande embaraço no excerto 01 quando eu pronunciei a palavra derivada e que no excerto 02 afirmou não ter cursado cálculo integral ainda. Entretanto a afirmação dela a respeito da matriz de transformação indicou que ela conseguiu realizar parcialmente a operação. Para isso, ela edificou-com a transformação derivada, operação inversa e do processo de representação matricial.

Em outro momento, quando questionados sobre a derivada segunda da função genérica

$$f(x) = a\, sen(x) + b\, cos(x)$$

alguns alunos começaram a fazer a atividade enquanto outros a discutir entre si. Então o aluno 01 disse:

Excerto 19

Aluno 01:	Ela disse o seguinte, [e fez um sinal indicando que foi a aluna 08], multiplicando-se duas vezes os vetores, você acha a derivada segunda. Então eu estou dizendo, mas não tenho certeza, estou tentando fazer aqui uma forma de você achar uma matriz que você já consiga ir direto para a derivada segunda.
	[...]
Aluno 01:	Não, mas eu quero mesmo é achar outra matriz. E o que eu falei é que a gente calculando a segunda vez o resultado da diagonal, não, da matriz derivada ia dar derivada segunda.
	[Percebendo que alunos discutiam individualmente, emprestavam cadernos, decido intervir para fazer um registro na lousa, mas o aluno 01 me interrompeu logo no começo dizendo] - A matriz aqui, não sei se está correto, mas seria [-1, 0/ 0, -1].
PE:	Como é que você chegou a esta conclusão? O que você fez para chegar lá?
Aluno 01:	Eu peguei o sen(x) e derivei duas vezes, e achei conforme você achou ali, (0, 1) na primeira derivada e (-1, 0) e pro cos(x) achei (0, -1), quando você achou (-1, 0) ali. Aí eu montei.

Nessa passagem o aluno 01 fez questão de deixar claro que optava por encontrar a derivada segunda através de outro caminho. Minha intervenção seria no sentido de discutir os processos por eles utilizados. Ele realizou uma edificação-com utilizando-se da representação matricial de uma transformação, de transformações lineares e da derivada segunda para determinar uma matriz que represente de forma direta a derivada segunda.

Dewey defende que a necessidade de avaliar processos é muito importante para o desenvolvimento do pensamento. Então tentei aproveitar o fato de os estudantes terem seguido caminhos distintos e pedi que explicassem o método utilizado tanto para gerar reflexão quanto para que avaliassem o método que fizeram em relação aos outros colegas. Perguntei a eles como fizeram para encontrar a derivada segunda.

E a aluna 08 informou o que havia feito:

Excerto 20

Aluna 08:	Eu multipliquei a matriz derivada, pelo resultado do produto da derivada primeira.

A aluna 08 fez o produto de *D* vezes *Dv*. Ela realizou uma edificação utilizando-se dos conceitos da representação derivada de um vetor e das propriedades do produto matricial para simplificar seus cálculos. E, embora possuísse um raciocínio rápido e fosse participativa, ela mesma se confundia com suas falas às vezes.

Excerto 21

Aluna 08:	- Então, Dv. Então peguei Dv vezes D e achei a derivada segunda.
	[...]
Aluno 01:	- É o contrário. É *D* vezes *Dv*.
Aluna 08:	- É, eu multipliquei a matriz pelo resultado, então é *D* vezes *Dv*.

Em outro momento, quando buscávamos encontrar a matriz que representava a transformação integral no espaço vetorial de base *B* = *{sen(x), cos(x)}*, os alunos obtiveram suas matrizes também por caminhos distintos.

Por exemplo, a aluna 08 e o aluno 01 resolveram a questão calculando a inversa da matriz *D*. Eles estavam edificando-com a inversa de uma transformação e representação da transformação derivada. Já os alunos 02 e 04 integraram os vetores da base e representaram a matriz I. Estes dois alunos realizaram uma edificação utilizando-se da integração e representação matricial de uma transformação linear.

Foi solicitado a eles que representassem no plano cartesiano os vetores derivada (da função a sen(x) + b cos(x)) das ordens que trabalhassem. Após, pedi que encontrassem uma relação entre o vetor derivada e o vetor integral, a aluna 08 começou a argumentar e logo dá a ideia.

Excerto 22

Aluna 08:	Eu só falei dos vetores. Que o vetor da derivada é o contrário do...
PE:	O que é contrário?
Aluna 08:	Se tivesse um eixo de simetria...

Nesse ponto, ocorreu uma falha no áudio, mas ela praticamente disse que os vetores possuíam a mesma direção e sentidos opostos. Ela , enquanto explicava , movia sua caneta em sentidos opostos, tentando explicar aquilo. Assim ela realizou uma edificação-com representação gráfica, rotação e com os vetores genéricos resultantes da aplicação das transformações derivada e integral.

A edificação reorganiza os conhecimentos prévios para solucionar problemas em os estudantes estejam envolvidos. Em nosso trabalho, foi responsável por grande parte dos avanços dos estudantes. Outro fator importante a se destacar é que o reconhecimento é facilitado pelo trabalho coletivo. Dessa forma, a aluna 08 contribuiu bastante para o desenvolvimento do trabalho. Ela apresentou suas ideias quase imediatamente após surgirem, sendo responsável por reconhecimentos, edificações-com e me ajudou involuntariamente a diminuir a timidez dos colegas. Devido à atuação dessa aluna, foi mais fácil observar a próxima categoria.

4.5 SUGESTÃO

Outra categoria a priori é a sugestão. Adotaremos por sugestões as ideias que surgem ainda de forma mais primitiva, mas optaremos por agrupar as que mais contribuíram com o andamento da atividade ou com o encadeamento de ideias, pois, neste trabalho, o conjunto de sugestões é grande como, por exemplo, no excerto 9 em que ocorreram a alguns alunos sugestões distintas.

Nesta categoria, destacou-se a aluna 08 que expressou-se sem muito receio durante os dois encontros de que participou. Logo quando questionei a turma sobre a possibilidade de construírem uma matriz que representasse a integração no espaço de base, a aluna 08 respondeu:

Excerto 23

Aluna 08:	A integral não é uma anti-derivada?

Nesse momento, eu me precipitei e entendi a fala da aluna como se fosse uma construção ou edificação-com que, em seguida, ficou claro não ser esse o caso e, embora esta passagem tivesse potencial para atingir construção ou edificação-com, minha confusão ou expectativa acabaram atrapalhando. Mas essa sugestão acabou gerando na turma mais envolvimento e discussões entre os estudantes.

Já no terceiro encontro, com o auxílio das representações cartesianas dos vetores, conforme citadas no fim da última seção, quando foi perguntado à turma sobre quem seria D^4, matriz que representava a derivada de quarta ordem no espaço gerado por sen(x) e cos(x), ela rapidamente respondeu:

Excerto 24

Aluna 08:	[1, 0/ 0, 1].
[Ao pedir que testassem a solução, ela logo justificou.]	
Aluna 08:	A gente foi só rodando os quadrantes, tem que estar certo.

Pôde-se perceber, em alguns momentos no vídeo, que alguns alunos apresentavam ideias ou sugestões para seus colegas. Acreditamos que tenham ocorrido sugestões que não tivemos como analisar por não verbalizarem ou por comentarem em tom mais baixo apenas com alguns colegas. Ao contrário, a aluna 08 serviu para incentivar a turma a se expressar e, manteve-se atuante durante quase todo o tempo, por exemplo, quando perguntados sobre a derivada quinta, ela logo respondeu:

Excerto 25

Aluna 08:	D^5é igual D.
PE:	Por quê?
Aluna 08:	Porque já acabou o plano cartesiano todo, ué, [respondeu girando a caneta]. A gente já varreu todos os quadrantes.

Todos pareceram ter concordado com a aluna 08 após a sua representação do movimento dos vetores, girando a caneta, a cada transformação. Ela recorreu a um pensamento geométrico que facilitou a busca por novas relações.

As sugestões são muito importantes para o desenvolvimento do pensamento. São essenciais para o desenvolvimento e aparecimento de novas ideias mais elaboradas. Algumas sugestões já mais elaboradas serão apresentadas na categoria seguinte.

4.6 FORMULANDO HIPÓTESES

Nesta categoria, apareceram informações agrupadas de forma a serem mais abrangentes e elaboradas. São ideias guia que, em geral, deveriam ser verificadas para confirmar sua veracidade. Dewey afirma que ensinar é gerir de forma equilibrada os meios que incentivem a formulação de hipóteses, a pesquisa e a verificação dessas hipóteses que serão tema para a próxima categoria.

Após a realização de algumas derivações do vetor genérico

$$f(x) = a\ sen(x) + b\ cos(x)$$

e da representação geométrica desses vetores, o aluno 01 formulou a hipótese:

Excerto 26

Aluno 01:	A cada derivada você parece que desloca 90^0.

Esta fala influenciou a aluna 08 que acabou por exteriorizar várias sugestões baseada nessa hipótese como, por exemplo, no excerto 25 em que ela conclui que a matriz D é igual a matriz D^5.

A formulação de hipóteses é uma etapa essencial para se desenvolver o pensamento, para se trabalhar com matemática e para a aprendizagem desta ciência. Algumas hipóteses se tornaram mais famosas que vários resultados. Deve-se apenas avaliar quando da necessidade de os estudantes analisarem suas consequências, testarem ou demonstrarem sua veracidade.

4.7 VERIFICAÇÃO

Algumas sugestões e hipóteses fizeram necessária sua verificação. Nesta fase, buscou-se compreender as consequências dessas hipóteses e verificar seu resultado. Esse processo é importante para a atividade reflexiva de Dewey e para o “fazer matemática” defendido por Ponte.

Em uma discussão sobre como derivar um vetor que já havia sido derivado, $f'(t) = 5te^t + 3e^t$, acabei por desistir de realizar a operação, utilizando apenas técnicas de cálculo, mas a aluna 02 praticamente exigiu a validação do método:

Excerto 27

PE:	Eu tenho um vetor *f*, [... e apontei para o resultado de uma derivada já feita...]. Derivem pra mim.
Aluna 02:	f, deixe eu ver...
Aluno 01:	*(-2, 5, 0)*? [Ele perguntou se referindo ao vetor f]. Faz a mesma coisa?
PE:	Não, tem ele aqui e aqui. Como é que a gente faz?
Aluna 04:	Derivada segunda?
Aluno 01:	Pega as coordenadas dele, pega o D e multiplica pelas coordenadas.
PE:	É, eu posso derivar pelo método tradicional aqui ou fazer o que você está falando. [...]. Se o que falamos aqui tiver consistência matemática, isto tem que dar certo. Senão a gente só perdeu tempo. E pode ser que não funcione...
Aluno 02:	Derivar isto? [Perguntou o aluno 02 se referindo ao vetor f'].
PE:	Sim, derivar isto. Já que o aluno 01 sugeriu, eu queria que vocês derivassem [... por meio de matrizes...].
Aluna 02:	Tem que fazer pelos dois pra poder conferi. [Disse ela, pela primeira vez me olhando de frente, para que se verifique pelos dois métodos].

Optei por atender a aluna 02 tanto para que ela se soltasse mais como para que os colegas não desprezassem a necessidade de verificar os resultados obtidos.

Já quando questionados sobre a eficácia da matriz de integração, o aluno 01 sugeriu pegar um vetor que já estaria derivado para testar.

Excerto 28

Aluno 01:	Se pegar o exemplo [mesmo f' do excerto anterior] que já está derivado aí, e integrar, a gente já sai direto.

O aluno 01 não só realizou sua verificação como sugere reduziu o trabalho, integrando um vetor que havia sido derivado. Sua fala mostrou sua vontade de agilizar o trabalho e simplificar a tarefa e sua compreensão do sentido de verificação.

Já no terceiro encontro, o aluno 01 buscou confirmar a matriz integral no espaço gerado pelas funções seno e cosseno. Ele afirmou:

Excerto 29

Aluno 01:	Não, o *v* [vetor (a, b)] e... comparei.
PE:	Comparou com o quê?
Aluno 01:	Integrei na mão [usou esta expressão para dizer que utilizou-se de técnicas de cálculo].

Dessa vez, ele comparou o resultado da integral da função

$$f(x) = a\ sen(x) + b\ cos(x)$$

obtendo:

$$\int \left(a\ sen(x) + b\ cos(x)\right) dx = \text{a cos(x) – b sen(x) + c}$$

escrito em relação à base

$$B = \{sen(x), cos(x)\},$$

$$(-b, a)_B$$

Com o resultado do produto da matriz *I* pelo vetor *(a, b)* em relação à mesma base:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (-b, a)$$

Assim ele conseguiu verificar a eficácia da matriz I.

Embora a verificação não seja necessariamente uma demonstração, é essencial desenvolver nos estudantes a necessidade de justificarem e analisarem os resultados obtidos. A presença dessa prática em nossos resultados ajuda a confirmar que os mesmos se envolveram na pesquisa e que isso pode ser um indício do desenvolvimento do pensamento.

4.8 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Consideramos nossa atividade socialmente reflexiva por contemplar as ideias de John Dewey (1959) em incentivar o debate, a busca por soluções, sempre valorizando as ideias e os processos envolvidos e, dessa maneira, incentivar os estudantes a refletirem, procurarem intelectualizar as questões, formularem hipóteses e testá-las. Nossa atividade também tem forte apelo ao social devido às perspectivas de construção do conhecimento compartilhado, apresentada por Hershkowitz et al (2007), devido ao fato de incentivar os estudantes ao debate, à elaboração e refutação coletiva de conjecturas pelo princípio de socializar os resultados obtidos.

Ao concluir nosso trabalho, voltamos a destacar as ideias de Dewey (1959) no sentido da importância do pensar reflexivamente, tanto na aprendizagem como em outras situações da vida. Pensar reflexivamente enriquece o significado das questões e, para a nossa pesquisa, acreditamos ser essencial para a compreensão dos conceitos matemáticos. Também ressaltamos a necessidade da observação e exploração da situação problema estudada no sentido de se compreender realmente qual é o problema. Os experimentos mentais envolvidos nessa fase de observação também muito contribuem para o treino da arte de pensar.

Em nossa análise, percebemos como as ideias de Dewey auxiliaram nosso trabalho. Sua teoria influenciou diretamente cinco das sete categorias, além da valoração para o encadeamento das ideias tão importante para o entendimento de conceitos e atividades matemáticas.

A dinâmica, desenvolvida em nossa atividade de sala de aula, promoveu entre os estudantes um ambiente onde interagiram, mesmo que alguns se limitassem a pequenos grupos, de forma a tornar a aula mais envolvente e com abertura para as questões que exigiam uma participação mais ativa dos estudantes.

A teoria RBC nos forneceu uma ótica para compreender a forma como ocorre a apropriação de conteúdos matemáticos e como esses conceitos influenciam a aprendizagem de novos conceitos, podendo ou não, ser necessária a criação de novas “estruturas mentais” (abstrações) para o entendimento dos mesmos.

A respeito de nossa questão:

Como uma atividade socialmente reflexiva mobiliza saberes em uma sala de aula de Álgebra Linear?

Ela nos conduziu ao objetivo de **compreender como esta atividade socialmente reflexiva despertará nos estudantes a necessidade de mobilizar saberes**. Para que a atividade atendesse às expectativas de ser socialmente reflexiva e de mobilizar saberes, ela precisaria atender aos objetivos:

1. **Utilizar das conexões internas da Matemática para provocar discussões sobre conceitos matemáticos diversos, apresentar essa ciência de uma forma mais próxima da qual a mesma é desenvolvida;**

A própria natureza da atividade envolvendo conexões entre a Álgebra Linear e o Cálculo já serviu para que tivessem uma noção de como se utilizar dessas conexões, além de nos auxiliar na tentativa de provocar discussões sobre os conceitos abordados. Acreditamos que conseguimos, de forma parcial, apresentar a Matemática de maneira mais próxima de como a mesma é desenvolvida e acreditamos que os excertos deste capítulo dão indícios de que alguns alunos conseguiram se aproximar parcialmente desse processo.

2. **Desenvolver nos alunos uma maior autonomia sobre seu aprendizado através de uma atividade que promova a criatividade, a apresentação de conjecturas, a argumentação, a formulação de hipóteses e a consolidação dos resultados;**

Acreditamos que a característica principal do trabalho foi a forma que os alunos interagiram comigo, com a atividade e entre si. Apenas um dos doze alunos envolvidos na pesquisa não apresentou uma postura de trabalhar de forma coletiva. Infelizmente, nem todos os alunos interagiram comigo como com seus colegas. Talvez por algum traço de autoridade ainda presente ou por se encabularem diante da filmadora.

Do segundo encontro em diante, os estudantes se organizaram em grupos e alguns acabaram assumindo o papel de “protagonistas” da discussão. Não apareceram muitos indícios de criatividade talvez pelo conteúdo ser recente ou ainda não assimilado. Já sobre a apresentação de conjecturas, muitas foram enunciadas, o que talvez possa ter sido o ponto baixo dessa apresentação, foi o fato de alguns palpites que não se baseavam em nenhuma ideia ou, em outras palavras, “chutes”. Já a consolidação dos resultados ocorreu prioritariamente por testes empíricos.

3. Melhorar a compreensão de conceitos como espaço vetorial, base de um espaço e transformações lineares com exemplos mais gerais para que a aprendizagem tenha maior possibilidade de ser consolidada.

Acreditamos que nossa atividade contribuiu de forma moderada para a compreensão desses conceitos. Os estudantes foram levados a trabalhar com situações um tanto mais gerais que podem ter melhorado a compreensão de alguns deles sobre os conceitos. Por causas diversas, especialmente por trabalharmos no final do semestre letivo, não foi possível a aplicação de um instrumento para a verificação da melhoria da compreensão dos conceitos.

Através desta visão geral, dos objetivos da atividade e dos resultados apresentados em nossa análise, podemos concluir que encontramos indícios de mobilização de saberes no desencadeamento de ideias para resolver os problemas apresentados em nossa atividade.

Acreditamos que esta pesquisa possa servir como um apoio para novas pesquisas nesta direção. Entendemos que há espaço para um trabalho, mais amplo, baseado nessas ideias ao longo do semestre letivo para um melhor acompanhamento e compreensão do fenômeno.

REFERÊNCIAS

BROCARDO, J. **As investigações na sala de aula de matemática**: um projecto curricular no 8º ano. 558f. Tese (Doutor em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001.

CEDRO, W. L.; MORAES, S. P. G.; ROSA, J. E. A atividade de ensino e o desenvolvimento do pensamento teórico em matemática. **Ciência & Educação**, v. 16, n. 2, p. 427-445, 2010.

DEWEY, J. **Como pensamos**: Como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo: uma reexposição. Tradução de Haydée de Camargo Campos. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959. Título original: HOW WE THINK: restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.

DICIONÁRIO MICHAELIS. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=investigar>. Acesso em: 05 ago. 2012.

DREYFUS, T. Constructing abstract mathematical knowledge in context. In: International Congress on Mathematical Education, 12º, 2012, Seul. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_XXIII_SIEM_ATAS_Nov2012_50acf58f39318.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2012.

HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B. B; DREYFUS, T. Abstraction in context: Epistemic actions. **Journal for Research in Mathematics Education,** vol. 32, No. 2, pp. 195- 222, mar/2001.

HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B. B; DREYFUS, T. HADAS, N. Abstracting Processes, from Individuals'Constructing of Knowledge to a Group's "Shared Knowledge". **Mathematics Education Research Journal**, v. 19, n. 2, 41–68, 2007.

LUNDMAN, B.; GRANEHEIM, U.H. Qualitative content analysis in nursing research: concepts, procedures and measures to achieve trustworthiness. **Nurse Education Today**, Elsevier, v. 24, p. 105-112, 2004. Disponível em: <http://intraserver.nurse.cmu.ac.th/mis/download/course/lec_566823_Graneheim%20-%20Jan%2025.pdf>. Acesso em: 08 mar. 2013.

PONTE J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ROGERS, J. W., Jr. Applications of Linear Algebra in Calculus, **The American Mathematical Monthly**, Vol. 104, No. 1., pp. 20-26, Jan/1997.