ENSINANDO E APRENDENDO ANÁLISE COMBINATÓRIA COM ÊNFASE NA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Adriana Luziê de Almeida e
Ana Cristina Ferreira

Caro colega ou cara colega,

Após concluir a graduação em Matemática, comecei a lecionar para turmas do Ensino Médio e, no início foi difícil. Além de aprender a lidar com adolescentes foi preciso estudar alguns conteúdos matemáticos que, apesar de constarem dos programas das disciplinas da Faculdade, precisaram ser revistos. A Análise Combinatória foi um destes conteúdos.

Atualmente, já há algum tempo lecionando para o 2° ano do Ensino Médio, conheço os problemas gerados pelo ensino deste conteúdo através da aplicação de fórmulas e defendo a necessidade de buscar métodos alternativos.

Acredito que uma proposta de ensino baseada na valorização do raciocínio combinatório, no incentivo à investigação e na socialização de idéias pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Para mostrar as contribuições e limitações de uma proposta como esta, me propus a realizar um estudo de caso que incentivasse professores como eu a, fazendo as adaptações que julgarem necessárias, utilizá-la em suas salas de aula. Após estudar bastante – lendo pesquisas feitas no Brasil e em outros países – construí uma proposta de ensino para Análise Combinatória e apliquei-a em uma classe de 2° ano do Ensino Médio em uma escola pública da periferia de Itabirito. Fui recolhendo informações ao longo do trabalho para analisar o que acontecia. Os resultados mostraram que a maioria dos alunos participou com interesse da proposta, gradativamente passou a se expressar mais e com maior segurança e propriedade sobre os conceitos estudados e alcançou uma compreensão mais profunda dos mesmos, na medida em que aprendeu a raciocinar combinatoriamente mais que a reproduzir fórmulas.

Sintetizo nesse pequeno livro essa experiência. Gostaria de partilhar com vocês os conhecimentos que adquiri realizando esta pesquisa e espero que este material possa auxiliá-lo em sua prática docente.

Um grande abraço!

Adriana Luziê de Almeida

Sumário

Por que estudar Análise Combinatória?

A Análise Combinatória se constitui ferramenta para diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicações. Além disso, permite a elaboração de situações problemas que podem ser discutidas através da construção de conjecturas e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

Em nosso país, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam, dentre outras coisas, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que nós, professores, devemos ter ao procurar desenvolvê-lo. Segundo esse documento:

> *As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1998, p.257).*

A Análise Combinatória vem sendo estudada por alguns autores que evidenciam sua importância enquanto conteúdo escolar e identificam aspectos que podem influenciar no processo de ensino aprendizagem deste conteúdo como as principais estratégias de resolução, os tipos de problemas e os erros mais frequentes.

O Ensino e a Aprendizagem de Análise Combinatória

Tipos de Problemas

Segundo Dubois (1984 apud BATANERO, 1997), os enunciados dos problemas combinatórios simples[1] podem ser classificados em três tipos diferentes:

a. de partição,

b. de colocação e,

c. de seleção.

[1] Segundo Roa (2000, p 21), os problemas combinatórios simples são definidos tanto por Gáscon (1988) quanto por Navarro-Pelayo (1994) como sendo aqueles que podem ser resolvidos mediante a aplicação de apenas uma operação combinatória, com ou sem repetição.

Os problemas de partição propõem dividir grupos em subgrupos. Por exemplo, *"Maria e Carmen têm quatro cromos numerados de 1 a 4. Decidem repartí-los entre as duas (dois cromos para cada uma). De quantos modos se podem repartir os objetos? Exemplo: Maria pode ficar com os cromos 1 e 2, e Carmem com os 3 e 4."* (BATANERO, GODINO e NAVARRO-PELAYO, 1996, p 39 apud STURM, 1999, p 33).

Possível resolução:

MARIA	CARMEM
1 e 2	3 e 4
1 e 3	2 e 4
1 e 4	2 e 3
2 e 3	1 e 4
2 e 4	1 e 3
3 e 4	1 e 2

Enumerando as possibilidades, verificamos que podemos repartir os objetos de seis formas diferentes.

Observe que, ao distribuir os cromos para Maria, os restantes ficarão com Carmem. Desta forma, para resolver este problema, basta determinar de quantas formas diferentes podemos selecionar os cromos para Maria porque, automaticamente, também estaremos identificando os de Carmem.

Os problemas de colocação trazem situações nas quais *n* elementos, diferentes ou não, devem ocupar m lugares. Ao resolver problemas deste tipo devemos considerar algumas peculiaridades que influenciarão no resultado final, como, por exemplo, se os elementos são iguais ou diferentes, se os lugares possuem uma ordenação, se os elementos serão colocados nestes lugares de acordo com uma determinada ordem e se existe a possibilidade de algum lugar ficar vazio. Um exemplo: *"Dispomos de três cartas iguais. Desejamos colocá-las em quatro envelopes das cores amarelo, branco, creme e dourado. Se cada envelope só pode conter, no máximo, uma carta, de quantas formas é possível colocar as três cartas nos quatro envelopes? Exemplo: Podemos colocar uma carta no envelope amarelo, outra no branco e outra no creme."* (BATANERO, GODINO e NAVARRO-PELAYO, 1996, p 38 apud STURM, 1999, p 33).

Possível resolução:

<table>
<tr><th>ENVELOPE AMARELO</th><th>ENVELOPE BRANCO</th><th>ENVELOPE CREME</th><th>ENVELOPE DOURADO</th><th>POSSIBILIDADES</th></tr>
<tr><td rowspan="3">carta</td><td rowspan="2">carta</td><td>carta</td><td>vazio</td><td>CCCV</td></tr>
<tr><td>vazio</td><td>carta</td><td>CCVC</td></tr>
<tr><td>vazio</td><td>carta</td><td>carta</td><td>CVCC</td></tr>
<tr><td>vazio</td><td>carta</td><td>carta</td><td>carta</td><td>VCCC</td></tr>
</table>

Existem quatro formas diferentes de colocarmos estas cartas nos envelopes.

Por último, temos os problemas de seleção. Usualmente, no Ensino Médio, utiliza-se principalmente problemas envolvendo o esquema de seleção devido ao maior grau de complexidade que os outros esquemas envolvem.

Os problemas de seleção estão relacionados à ideia de amostras que podem configurar agrupamentos ordenados ou não ordenados, com repetição ou sem repetição de elementos. Por exemplo, *"Se quer eleger um comitê formado por três membros: presidente, tesoureiro e secretário: Para selecioná-lo, dispomos de quatro candidatos: Arturo, Basílio, Carlos e David. Quantos comitês diferentes se podem eleger com os quatro candidatos? Exemplo: Arturo como presidente, Carlos como tesoureiro e David como secretário*" (BATANERO, GODINO e NAVARRO-PELAYO, 1996, p 39 apud STURM, 1999, p 33).

Possível resolução:

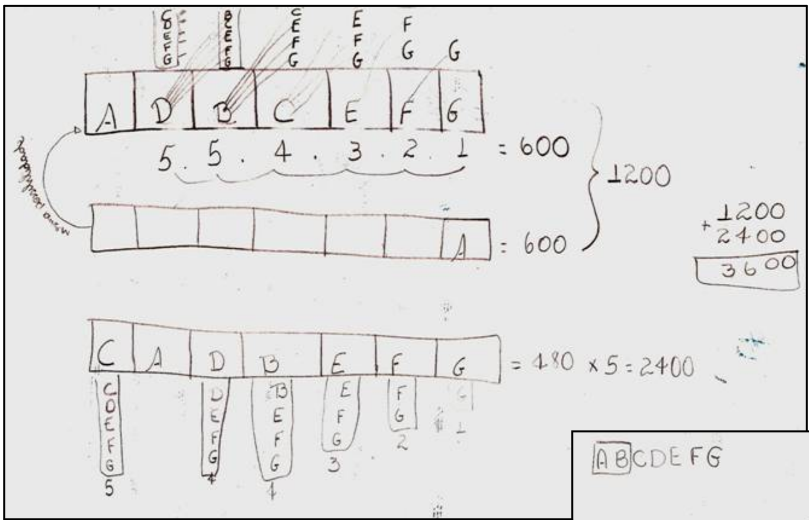
PRESIDENTE	TESOUREIRO	SECRETÁRIO	COMITÊ
A	B	C	ABC
		D	ABD
	C	B	ACB
		D	ACD
	D	B	ADB
		C	ADC
B	A	C	BAC
		D	BAD
	C	A	BCA
		D	BCD
	D	A	BDA
		C	BDC
C	A	B	CAB
		D	CAD
	B	A	CBA
		D	CBD
	D	A	CDA
		B	CDB
D	A	B	DAB
		C	DAC
	B	A	DBA
		C	DBC
	C	A	DCA
		B	DCB

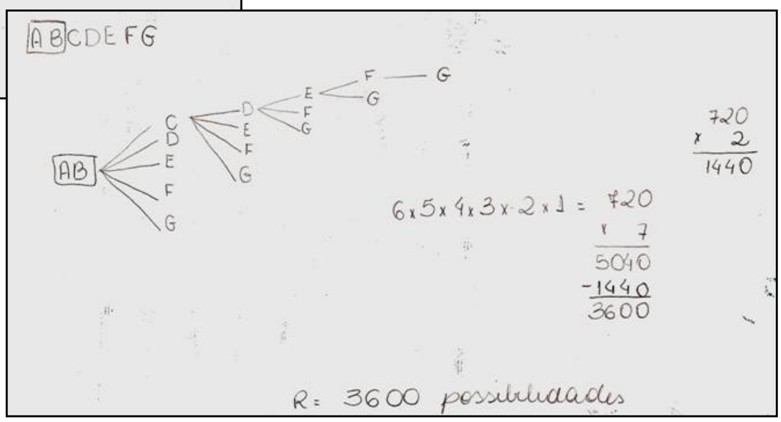
Portanto, podemos formar 24 comitês diferentes.

Existem quatro opções para a escolha de um presidente. Para cada candidato selecionado como presidente dispomos de três opções para tesoureiro visto que o mesmo indivíduo não poderá ocupar dois cargos distintos. Desta forma, temos doze possibilidades de formação de um agrupamento contendo um presidente e um tesoureiro. Seguindo este mesmo raciocínio teremos, para cada agrupamento de presidente e tesoureiro, apenas duas opções para a escolha do secretário. Então, temos vinte e quatro (12 vezes 2) maneiras diferentes de formar o comitê.

Aos poucos, os próprios alunos, cada um a seu tempo, começam a substituir a construção de tabelas, completamente ou parcialmente, por uma resolução aritmética. Entretanto, é importante ressaltar que esta substituição deve partir do próprio discente. A construção de uma representação visual da situação descrita, como por exemplo, uma tabela ou um diagrama de possibilidades, permite que o aluno compreenda o princípio multiplicativo atribuindo significado ao produto que fornece o total de opções. Ele não repete modelos. Ele os cria com a orientação do seu professor.

Observe como dois grupos que participaram de nossa pesquisa resolveram a questão: *'Num grupo de sete alunos, dois deles não se toleram e não desejam sair lado a lado em uma fotografia. A foto será deles sentados em fila. De quantos modos eles poderão sentar, respeitando essa incompatibilidade?'*





Levando-se em conta o tipo de agrupamentos: se a ordem de seleção é ou não importante na formação de cada grupo e se os elementos podem se repetir podemos subdividir os problemas de seleção. Por exemplo, no problema a seguir, a ordem se seleção é importante e os elementos podem se repetir. Problemas desse tipo são chamados de problemas que envolvem seleção ordenada com reposição.

"Quantos numerais de três algarismos podemos formar com os dígitos 2, 5, 6 e 7?"

Possível resolução:

<table>
<tr><th>Algarismo das centenas</th><th>Algarismo das dezenas</th><th>Algarismos das unidades</th><th>NUMERAL</th></tr>
<tr><td rowspan="16">2</td><td rowspan="4">2</td><td>2</td><td>222</td></tr>
<tr><td>5</td><td>225</td></tr>
<tr><td>6</td><td>226</td></tr>
<tr><td>7</td><td>227</td></tr>
<tr><td rowspan="4">5</td><td>2</td><td>252</td></tr>
<tr><td>5</td><td>255</td></tr>
<tr><td>6</td><td>256</td></tr>
<tr><td>7</td><td>257</td></tr>
<tr><td rowspan="4">6</td><td>2</td><td>262</td></tr>
<tr><td>5</td><td>265</td></tr>
<tr><td>6</td><td>266</td></tr>
<tr><td>7</td><td>267</td></tr>
<tr><td rowspan="4">7</td><td>2</td><td>272</td></tr>
<tr><td>5</td><td>275</td></tr>
<tr><td>6</td><td>276</td></tr>
<tr><td>7</td><td>277</td></tr>
</table>

Começando com o dígito 2 são 16 numerais. Seguindo o mesmo padrão, temos 16 numerais começando com 5, 16 com 6 e 16 com 7, logo: são 16 . 4 = 64 numerais no total.

Já no exemplo a seguir, a ordem é importante, mas não pode haver repetição de elementos. Esse tipo de problema trata de seleção ordenada sem reposição.

"Quantos numerais de três algarismos **distintos** podemos formar com os dígitos 2, 5, 6 e 7?"

Possível resolução:

<table>
<tr><th>Algarismo das centenas</th><th>Algarismo das dezenas</th><th>Algarismos das unidades</th><th>NUMERAL</th></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td rowspan="2">5</td><td>6</td><td>256</td></tr>
<tr><td>7</td><td>257</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td>5</td><td>265</td></tr>
<tr><td>7</td><td>267</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7</td><td>5</td><td>275</td></tr>
<tr><td>6</td><td>276</td></tr>
</table>

Começando com o dígito 2 são 6 numerais. Seguindo o mesmo padrão, temos 6 numerais começando com 5, 6 com 6 e 6 com 7, logo: são 6 . 4 = 24 numerais no total.

Se a ordem de seleção dos componentes não é importante na formação do agrupamento e a repetição destes elementos é permitida, temos um problema que envolve a seleção não-ordenada com repetição.

Por exemplo, "Com 10, 11, 13, 14 e 15, quantos produtos, envolvendo três destes numerais, podem ser formados?"

Enumerando as possibilidades, sistematicamente, podemos observar padrões. Veja:

10 . 10. 10				
10 . 10 . 11	10 . 11 . 11			
10 . 10. 13	10 . 11 . 13	10 . 13 . 13		
10 . 10 . 14	10 . 11 . 14	10 . 13 . 14	10 . 14 . 14	
10 . 10 . 15	10 . 11 . 15	10 . 13 . 15	10 . 14 . 15	10 . 15 . 15

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15

11 . 11 . 11			
11 . 11 . 13	11 . 13 . 13		
11 . 11 . 14	11 . 13 . 14	11 . 14 . 14	
11 . 11 . 15	11 . 13 . 15	11 . 14 . 15	11 . 15 . 15

4 + 3 + 2 + 1 = 10

13 . 13 . 13		
13 . 13 . 14	13 . 14 . 14	
13 . 13 . 15	13 . 14 . 15	13 . 15 . 15

3 + 2 + 1 = 6

14 . 14 . 14	
14 . 14 . 15	14 . 15 . 15

2 + 1 = 3

15 . 15 . 15

1

Total: 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35

Portanto, podemos formar 35 produtos diferentes.

Nos problemas em que a ordem dos elementos não interfere na formação dos agrupamentos e não é permitida a repetição de elementos, a seleção envolvida é não-ordenada e sem repetição.

Por exemplo, "Uma comissão de 4 médicos deverá ser formada em uma clínica. Sabendo-se que o quadro clínico desta instituição conta com 6 destes profissionais, determine de quantas formas diferentes esta comissão poderá ser estabelecida."

Nomeando os médicos pelas letras A, B, C, D, E e F, podemos enumerar, de forma sistemática, cíclica e completa, as possíveis comissões:

ABCD	ABDE	ABEF
ABCE	ABDF	
ABCF		

3 + 2 + 1 = 6

ACDE	ACEF
ACDF	

2 + 1 = 2

ADEF

1

Total parcial: 6 + 2 + 1 = 10

BCDE	BCEF
BCDF	

BDEF

2 + 1 = 3 1 **Total parcial: 3 + 1 = 4**

CDEF

1 **Total parcial: 1**

Total: 10 + 4 + 1 = 15 comissões diferentes.

Outra estratégia interessante a ser trabalhada na resolução de problemas similares ao anterior é a comparação entre a quantidade de agrupamentos ordenados com a quantidade de não-ordenados.

Descrevemos a seguir uma situação que ocorreu durante nossa pesquisa e que pode exemplificar o exposto no parágrafo anterior.

Os alunos resolveram, em grupos de três ou quatro alunos, a seguinte questão:

Cada time de futebol de salão é formado por 5 jogadores (4 na linha e 1 no gol). O Saci-Pererê Futebol Clube ainda conta com 5 jogadores na reserva. Em um determinado jogo todos os atletas do clube compareceram. Destes atletas, três serão selecionados para fazer o exame anti-doping. Existem várias possibilidades de formação deste grupo. Identifique quantas são, mostrando como vocês chegaram a este resultado.

O conceito de agrupamento não-ordenado começou a ser discutido quando alguns componentes dos grupos questionavam a enumeração das possibilidades e percebiam que alguns grupos já haviam sido registrados e, portanto não precisavam ser escritos novamente.

As resoluções apresentadas forma variadas. Alguns fizeram a enumeração completa das possibilidades; outros registraram apenas parte da enumeração e a partir dos padrões observados chegaram ao resultado esperado. Um grupo resolveu a questão usando somente operações.

As resoluções de cada grupo foram por apresentadas para o restante da turma. A próxima figura mostra uma estratégia adotada e exposta por um dos grupos. Este registro gerou discussões entre os estudantes.

$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ 6 grupos. irão repetir.

$720 \div 6 = 120$

Acompanhe o diálogo a seguir. Nele podemos observar como Paula defendeu a validade da estratégia adotada por seu grupo.

Paula: São dez atletas que podem ser chamados primeiro. Depois são nove e por último oito. Aí a gente multiplicou.

P: por que?

Paula: Ah! Porque nos numerais a gente multiplicou.

(Ela se referia a outra questão em que aplicaram o princípio multiplicativo para encontrar o total de possibilidades de formarmos numerais distintos a partir de um conjunto de algarismos)

P: E por que você acha que esta questão é parecida com a questão em que você formou numerais?

Paula: Ah! Porque deu certo, uai!

(José que não fazia parte do grupo que estava apresentando a resolução, questionou:)

José: Por que você está sempre perguntando "por que"?

(Todos riram.)

P: Porque gosto de aprender e acho que para aprender precisamos saber o porquê das coisas. Você não acha?

José: Eu não acho nada!

(Todos riram novamente.)

P: E por que vocês dividiram este produto por seis?

Paula: Porque cada um vai repetir seis vezes, olha só...

(Ela mostra um esquema como o registrado a seguir.)

ABC	ABD	ABE
ACB	ADB	AEB
BAC	BAD	BAE
BCA	BDA	BEA
CAB	DAB	EAB
CBA	DBA	EBA

Dessa forma, o número total de agrupamentos não-ordenados pode ser encontrado através da operação aritmética:

Quantidade de agrupamentos ordenados

Quantidade de agrupamentos não-ordenados.

$$\frac{10.9.8}{3.2.1} = \frac{720}{6} = 120$$

Quantidade de misturas possíveis em cada agrupamento ordenado, ou seja, quantidade de agrupamentos que representam o mesmo grupo quando a ordem de apresentação dos elementos não deve ser considerada.

Do cruzamento das subdivisões dos problemas de seleção estabeleceram-se os quatro modelos comumente denominados, no Ensino Médio, respectivamente, como: Arranjo simples; Arranjo com repetição; Combinação simples e Combinação com repetição. Também no Ensino Médio é trabalhada a Permutação que nada mais é que um caso especial de Arranjo. Na figura a seguir, procuramos ilustrar essa ideia.

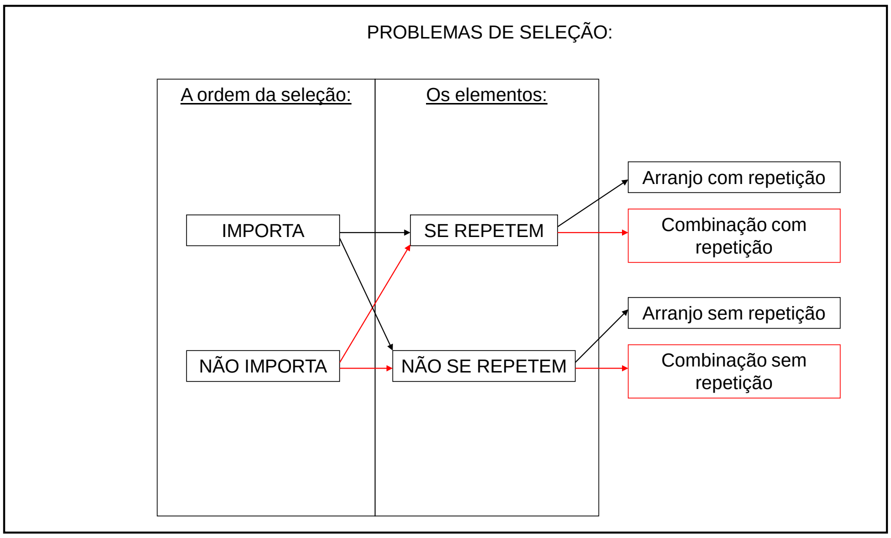


Figura 1: Problemas de seleção

Estes modelos geram as operações combinatórias básicas cujos modelos matemáticos podem ser observados na tabela a seguir.

Modelos combinatórios de seleção	Modelos matemáticos[2]
Arranjo simples	$A_{n,r} = n\,(n-1)\,...(n-r+1)$
Arranjo com repetição	$AR_{n,r} = n^r$
Combinação simples	$C_{n,r} = A_{n,r} : P_r$
Combinação com repetição	$CR_{n,r} = C_{n+r-1,r}$

Tabela 2: Modelos combinatórios de seleção e modelos matemáticos correspondentes.

A permutação (P_r) é um arranjo onde n = r, daí: $P_r = A_{r,r}$.

Estes modelos matemáticos podem e devem ser conhecidos por nós, professores. Entretanto, para os estudantes da Educação Básica, entendemos que a ênfase deve ser dada na resolução de problemas combinatórios através de métodos como o diagrama de possibilidades e a observação de padrões, o que, possivelmente, levará à generalização destes modelos. A linguagem utilizada não precisa ser simbólica, pode apenas descrever o modelo.

[2] Nos modelos descritos, n representa a quantidade de elementos disponíveis para a seleção e r, o número de elementos de cada agrupamento.

Estratégias de Resolução

Em sua pesquisa, Fernandes e Correia (2007), identificaram quatro tipos de estratégias utilizadas pelos alunos, de forma isolada ou concomitantemente, para resolver os problemas de combinatória:

a. a enumeração,

b. o diagrama de árvore,

c. o uso de fórmulas e,

d. a operação numérica.

A enumeração, como o próprio nome indica, consiste em listar todas ou algumas possibilidades. Um exemplo pode ser observado na descrição, feita pelo aluno Arlindo, de uma das atividades de nossa proposta de ensino.

Durante a aula a professora selecionou 05 alunos para ir até a frente. E pediu a todos que fizessem o seguinte: Ela deu nomes fictícios a todos para que pudesse ser mais organizado, ficando assim:

Adriano
Bruno
Carlos
Daniel
Euler, dentre estes 05 alunos seriam distribuídos 05 presentes iguais, foi escolhido primeiramente 03 alunos, e pedido a toda a classe que calculassem as possibilidades de escolha para entrega dos presentes na seqüência. Seu assistente Pedro então entregou os 3 primeiros presentes. sendo...

ABC ACD ADE BCE CDE DEB BCD
ABD ACE
ABE

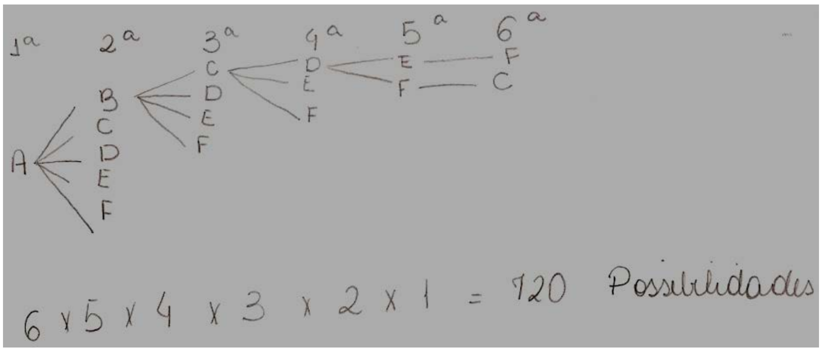
(Escolhas dos 3 primeiros que recebiam presentes iguais portanto a seqüência não importava).

O diagrama de árvore ou diagrama de possibilidades é a representação dos agrupamentos possíveis através de um esquema que, em geral, lembra galhos de árvore.

A seguir apresentamos dois exemplos que foram extraídos da pesquisa que gerou este livreto. Neles, os alunos utilizaram a árvore de possibilidades para validar suas respostas.

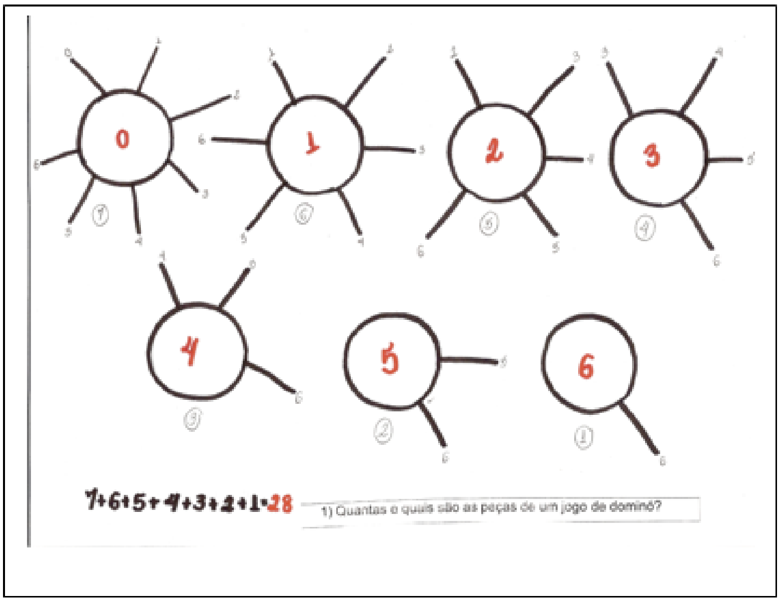
Exemplo 1:

“De quantas formas diferentes 6 pessoas podem formar uma fila?”



Nesta resolução, apresentada por um grupo de estudantes, apenas parte da árvore de possibilidades foi construída. Os alunos verificaram que se o primeiro lugar for ocupado pela pessoa A, existem cinco opções de escolha para o segundo lugar, quatro para o terceiro e assim sucessivamente. Dessa forma, inferiram que o mesmo ocorre quando a primeira pessoa escolhida é B ou C ou D ou E ou F.

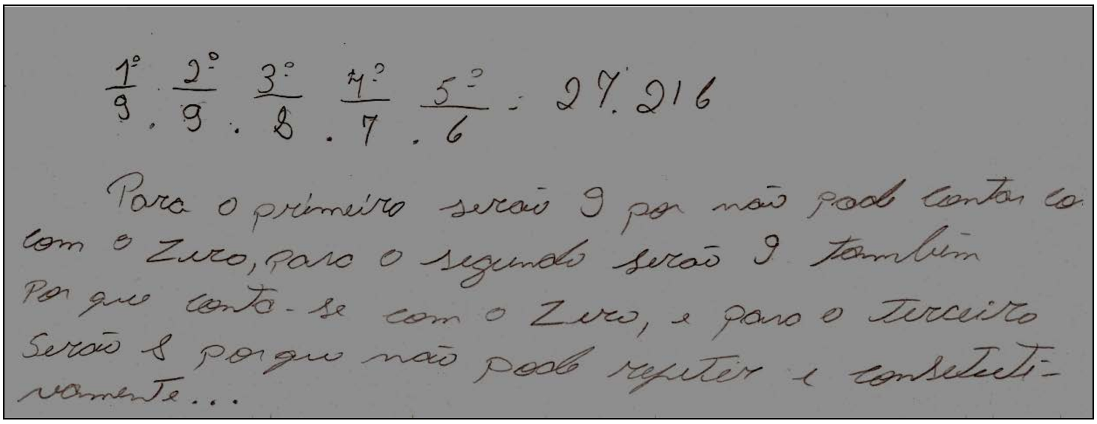
Exemplo 2:



Nesta resolução, podemos observar um diagrama de árvore diferente daquele usualmente utilizado. A construção deste esquema por um grupo de alunas que participaram da pesquisa geradora deste livreto contribuiu para que observassem padrões importantes e os utilizassem na resolução de outros problemas.

A enumeração sistemática e o uso do diagrama de possibilidades são métodos que auxiliam na compreensão da Análise Combinatória. Entretanto, após algum tempo utilizando estes métodos, é comum que os alunos os substituam pelas operações.

Em nossa proposta de ensino começamos incentivando a utilização da enumeração e da árvore de possibilidades. No decorrer do trabalho, vários alunos, observando os padrões, foram capazes de, atribuindo significado a ação realizada, resolver os problemas utilizando operações. Observe este exemplo, onde o aluno Thiago resolve a questão: *"O sistema de numeração na base 10 utiliza, normalmente, os dígitos de 0 a 9 para representar os números naturais, sendo que o zero não é aceito como o primeiro algarismo da esquerda. Pergunta-se: Quantos são os números naturais de cinco algarismos formados por cinco dígitos diferentes?"*



$\frac{1^\circ}{9} \cdot \frac{2^\circ}{9} \cdot \frac{3^\circ}{8} \cdot \frac{4^\circ}{7} \cdot \frac{5^\circ}{6} = 27.216$

Para o primeiro serão 9 por não pode contar co com o Zero, para o segundo serão 9 também Por que conta-se com o Zero, e para o terceiro Serão 8 porque não pode repetir e consecutivamente...

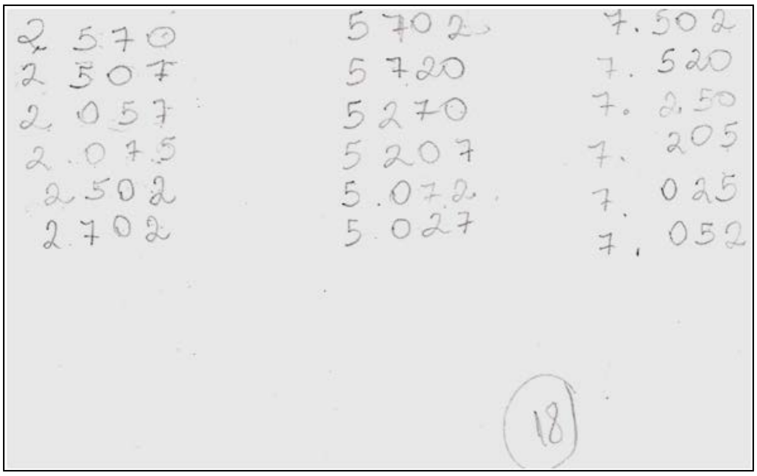
Nossa experiência docente, contato com outros professores e leituras realizadas nos levam a supor que a estratégia mais adotada em nosso país seja a utilização de fórmulas.

Não somos contra este método, entretanto, acreditamos que o ensino de Análise Combinatória exclusivamente através de fórmulas dificulta a compreensão deste conteúdo e restringe o universo de problemas envolvendo raciocínio combinatório a somente alguns poucos cujos modelos são apresentados pelo professor. Acreditamos que o processo de construção é muito relevante para a compreensão do conteúdo e, consequentemente, para o processo de ensino e aprendizagem. Neste sentido, em nossa pesquisa, incentivamos a utilização de todas as estratégias descritas anteriormente, exceto, a aplicação de fórmulas.

Roa (2000, p 15) resumiu as diversas estratégias intuitivas de enumeração caracterizadas nas obras de diversos autores (MAURY, 1986; MENDELSHON, 1981; SCARDAMALIA, 1977) em cinco tópicos: a) Seleção aleatória dos elementos; b) tentativa de enumerar todos os agrupamentos sem utilizar elementos que já foram utilizados em outros agrupamentos; c) tentativa de encontrar através de um processo sistemático todos os agrupamentos possíveis (ex. seleção aleatória de elementos e permutação cíclica entre eles para determinar outros agrupamentos); d) uso de um elemento constante que servirá como referencial para a formação dos agrupamentos e, por último, e) a estratégia algorítmica completa que se caracteriza pela aplicação do elemento de referência e de um modo cíclico sistemático e completo.

De todas as formas apresentadas, a última parece-nos ser a mais adequada para quem deseja encontrar todos os agrupamentos. Nesta estratégia, o uso de um elemento de referência facilita o processo de generalização e ao enumerar de forma sistemática e cíclica, aumentamos a chance de descrever todas as possibilidades.

A utilização desta estratégia pode ser exemplificada pela resolução apresentada pela aluna Cla[3] para a questão *'Quantos numerais de quatro algarismos distintos, ou seja, diferentes, podemos formar com os algarismos 0, 2, 5 e 7?'*

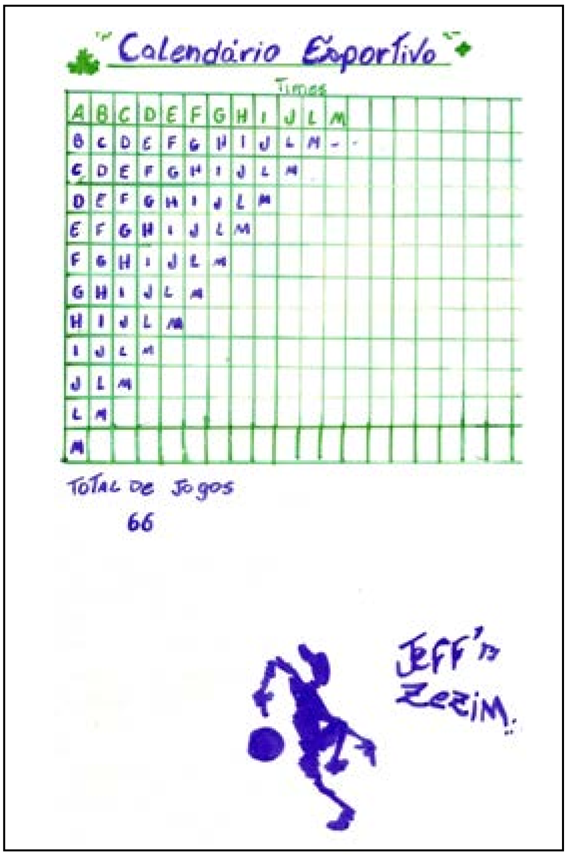


Inicialmente ela fixou os dois primeiros dígitos e variou a ordem dos dois últimos enquanto encontrava todos os numerais possíveis que começavam com o mesmo algarismo. Desta forma ela enumerou todas as possibilidades de forma cíclica e sistemática. Entretanto, podemos observar que ela cometeu um erro ao escrever os numerais dispostos nas duas últimas linhas da primeira coluna.

[3] Pseudônimo escolhido por uma das alunas que participou da pesquisa.

Inferimos que este fato ocorreu por falta de atenção da aluna, visto que no restante da questão ela enumerou corretamente.

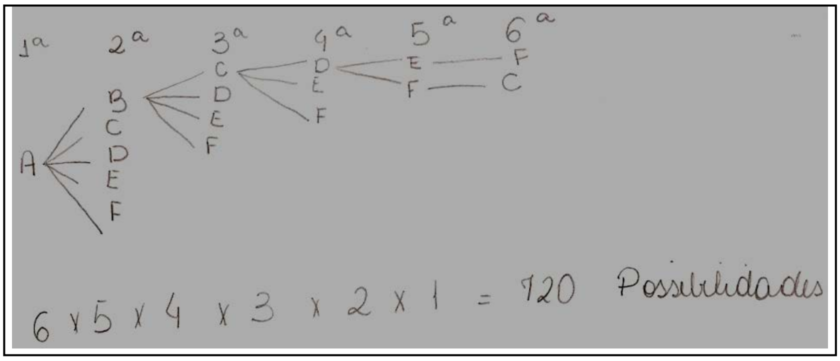
Dando liberdade aos alunos para resolverem os problemas da forma que lhes parecesse mais adequada, encontramos grupos que, além das estratégias de enumeração, diagrama de árvores e operações numéricas, utilizaram tabelas para organizar a enumeração de possibilidades. Um exemplo é a resolução de Zezin[4] para a questão *'O Saci-Pererê Futebol Clube já está no campeonato regional juntamente com outros 11 times. Segundo o regulamento da competição, na primeira fase, cada time deve jogar com todos os outros adversários. Fui eleita como organizadora do calendário esportivo do evento e preciso determinar quantos jogos serão ao todo nesta primeira fase. Prepare um "esquema" para apresentá-lo a fim de explicar como posso determinar o total de jogos.'*



Para organizar os agrupamentos ele fixou um elemento (letras de cor verde) e variou o outro (letras de cor azul). Resoluções como esta podem ser muito aproveitadas pelo professor. Ao socializá-la com o restante do grupo, podemos incentivá-los a observar o tipo de agrupamento (ordenado ou não-ordenado) e a existência de padrões como, por exemplo, neste caso, o decrescimento do número de agrupamentos a partir da utilização de um elemento de referência.

[4] Pseudônimo escolhido por um dos alunos que participou da pesquisa.

Um exemplo da estratégia árvore de possibilidades (ou diagrama de possibilidades), utilizada, concomitantemente, com operações, pode ser observada no exemplo a seguir, onde um grupo de alunos resolveu a questão *'De quantas formas diferentes 6 pessoas podem formar uma fila?'*.



Podemos observar que apenas parte da árvore precisou ser construída. A partir da fixação da primeira pessoa da fila e da utilização da árvore de possibilidades, os estudantes descobriram que poderiam utilizar o princípio multiplicativo para determinar o número total de maneiras diferentes que podemos colocar seis pessoas em fila.

Os Principais Erros

É sempre possível encontrar um aluno do 2º ano do Ensino Médio interrogando seu professor de Matemática acerca do tipo de agrupamento envolvido em uma situação, ou mesmo, sendo capaz de resolver um problema combinatório através da enumeração quando a questão envolve um número pequeno de agrupamentos, mas com dificuldade de estabelecer padrões ou generalizar soluções para quantidades maiores.

Em nossas leituras verificamos que diversos autores (Roa, 2000; Batanero, 1997; Hadar e Hadass, 1981; Roa e Navarro-Pelayo, 2001; Fernandes e Correia, 2007) enumeraram os principais erros apresentados pelos alunos ao resolver questões envolvendo raciocínio combinatório.

- Interpretação incorreta do enunciado;
- Cálculo aritmético incorreto;
- Utilização incorreta da estratégia escolhida;
- Escolha de uma estratégia pouco eficaz ou ineficaz;
- Deixar de considerar alguns agrupamentos possíveis;
- Não ser capaz de observar padrões e generalizar soluções.

É preciso conhecer e entender como se processam os erros mais freqüentes apresentados pelos alunos ao resolver problemas combinatórios a fim de buscar estratégias para tentar evitá-los ou ainda minimizá-los.

Alternativas para o ensino de Análise Combinatória

Batanero (1997) afirma que para ensinar Análise Combinatória deveríamos levar em conta o raciocínio recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração no lugar de centrarmos nossos esforços em aspectos algorítmicos e em definições combinatórias.

Para que o aluno não apenas memorize e depois de algum tempo esqueça, se faz necessário que o aprendizado aconteça de forma gradativa, com a compreensão do aluno. Para que ele chegue ao conhecimento por si só, construindo sentido para o que está aprendendo. Ele deve refletir a respeito do problema e analisar uma estratégia para resolvê-lo.

A literatura que nos apoiou na construção de nossa proposta de ensino sugere algumas alternativas para o ensino de Análise Combinatória:

- Utilização de materiais manipulativos.
- Atividades que tragam questões envolvendo situações com as quais o aluno está familiarizado.
- Valorização das diferentes estratégias e formas de registros.
- Formação de um ambiente propício a construção de conjecturas.
- Dinâmica de aula que favoreça a Comunicação Matemática.

A utilização de situações problema pode contribuir para a aprendizagem de diversos conteúdos, inclusive, da Análise Combinatória. Mas, somente aprender a resolver os problemas construindo suas próprias estratégias não é o suficiente para tornar esta aprendizagem eficaz. Através da discussão em pequenos grupos e da troca de experiências entre o professor e seus alunos ou entre os próprios alunos, a aprendizagem é potencializada pela oportunidade de aprender consigo mesmo e com o outro. Tais ideias vêm tanto de minha prática docente quanto das leituras feitas para a realização da minha pesquisa.

Neste sentido, defendemos que nem toda comunicação gera aprendizagem, entretanto, toda aprendizagem é produto de algum tipo de comunicação a partir da interação de um sujeito com um objeto e/ou com outro sujeito, na medida em que significados são negociados e novos conhecimentos são construídos.

A Comunicação e o processo de ensino e aprendizagem em Matemática

Em experiências anteriores, observamos que a aprendizagem dos alunos não se dava apenas em função da atividade proposta por si mesma. Era o clima criado na sala que fazia a diferença. Ou seja, eram as discussões em pequenos e grandes grupos formados por professores e estudantes e nos registros por elas gerados que os sujeitos se influenciavam mutuamente e construíam conhecimento atribuindo significado ao que estavam aprendendo. Neste sentido, a Comunicação na sala de aula de Matemática nos pareceu ser um referencial capaz de apoiar a estruturação de uma proposta de ensino de análise Combinatória.

Para a maioria das pessoas, a comunicação é, necessariamente, uma relação dual entre um emissor e um receptor que trocam informações utilizando-se de determinados códigos. Entretanto, na pesquisa que realizamos, a comunicação é percebida como um processo mais complexo.

Neste sentido, adotamos a definição utilizada por diversos autores e compilada por Santos (2009, p 117), "*na aula de matemática, a comunicação pode ser entendida, com diferentes autores que têm se ocupado dela, como todas as formas de discursos, linguagens utilizadas por professores e alunos para representar, informar, falar, argumentar, negociar significados".*

Acreditamos que estas ações têm uma influência direta no processo de ensino e aprendizagem e podem potencializá-lo na medida em que são direcionadas para a aprendizagem.

Em uma aula na qual se deseja promover a Comunicação Matemática, capaz de levar o estudante a apropriar-se de conhecimentos através de questionamentos acerca do que pensa saber e das novas informações que lhe são oferecidas, é essencial oportunizar momentos de discussão de idéias entre os sujeitos. Acreditamos que, ao se expressar elaborando argumentos, o indivíduo atribui significado e apropria-se do conhecimento potencializando assim sua emancipação no processo de ensino e aprendizagem.

A interação e a negociação de significados

Segundo Martinho (2007), a interação constitui a dinâmica do processo comunicativo entre os presentes na sala de aula e a negociação de significados, o modo como estes sujeitos partilham, desenvolvem, ajustam e apropriam-se de conceitos e processos matemáticos.

Em discussões envolvendo professor e aluno este tende a submeter-se ao discurso do primeiro e esforçar-se menos para julgar até que ponto a idéia apresentada é significativa. Para o professor, muitas vezes, é difícil ouvir sem interferir no discurso do aluno visto que habitualmente define o que está certo ou errado na sala de aula. Mas esta relação pode ser mais democrática quando professor e alunos juntos buscam aprender utilizando recursos que possibilitem uma interação capaz de gerar conhecimento. As interações estabelecidas na sala de aula podem interferir positivamente no processo de ensino e aprendizagem na medida em que torna possível aprender com o outro.

No diálogo a seguir, extraído de nossa pesquisa, verificamos que a aluna Jussara, apesar da timidez para se expressar, elaborou um raciocínio a partir de ideias geradas por alguns questionamentos. Também é possível verificar que outra aluna, componente do mesmo grupo, beneficiou-se do diálogo e foi capaz de chegar a uma conclusão própria inferindo a partir do que havia feito em outras atividades.

P: Bom! Deixa eu aproveitar pra perguntar.

Alunas: Ah!!!!!!!!!!!!

P: Essa aqui é a peça ...

Jussara: zero três.

P: Essa aqui é a peça ...

Jussara: três zero.

P: A peça zero três e a peça três zero são peças iguais ou diferentes?

Jussara: Diferentes porque se esta é a pecinha zero três, esta aqui é a pecinha três... Ah, não. É a mesma coisa. (risos). É a mesma coisa.

Paula: Então a gente vai diminuindo, vai diminuindo.

(Enquanto falava, Paula mostrava um esquema onde seu grupo havia esboçado parte de uma árvore de possibilidades)

Não foi necessário explicar à Jussara que as peças eram iguais. Os questionamentos levaram-na a refletir sobre suas ideias iniciais e proporcionaram uma observação crítica capaz de levá-la a compreender por si só que se tratava de agrupamentos não ordenados.

Apesar de não ter sido solicitada a justificar sua resposta, Jussara o fez. Ao verbalizar sua ideia, buscando argumentos para validá-la, percebeu que se equivocara e foi capaz de reconstruir seus conhecimentos a partir de suas observações.

Em grupos de alunos resolvendo uma determinada atividade proposta pelo professor é possível verificar que alguns assumem o papel de líder enquanto outros preferem seguir as orientações. Esta divisão de funções não é necessariamente prejudicial ao processo, mas é preciso garantir que todos tenham a oportunidade de participar expondo suas idéias. Um líder pode organizar a dinâmica do grupo, mas não deve assumir para si toda a responsabilidade de resolver a atividade proposta.

No trabalho de campo que realizamos, o diálogo interno de um dos grupos de alunos mereceu destaque. Acompanhe a descrição deste evento.

> *"Ao iniciar a discussão da questão proposta na terceira atividade[5] Arlindo sugere uma estratégia de resolução. No começo não é questionado uma vez que existe uma norma social estabelecida de que ele é mais inteligente e, portanto, provavelmente sabe chegar a resposta correta. Entretanto, um outro componente do grupo: João, apresenta uma outra sugestão que depois de ser explicada para o restante do grupo é eleita como a mais eficaz. É interessante observarmos que João só expos sua ideia depois que Arlindo o incentivou. A norma social vigente o fez pensar que por ser 'menos inteligente' que Arlindo sua ideia não seria aceita pelo grupo. Arlindo, também acostumado com esta norma resistiu por algum tempo em aceitar a ideia de João, mas com o apoio de um outro membro do grupo, todos concordaram em utilizá-la" (diário de campo).*

O trecho a seguir traz a parte final do diálogo do grupo.

Arlindo: Olha pra você ver. Quando tem uma cabeça às vezes até pensa, mas quando tem quatro cabeças pensa muito mais né? Você viu que eu comecei a dar uma idéia, você já teve outra melhor e mais fácil pra entender. Se fosse eu ia estar pelejando até agora com aquele branco, preto, não sei o que.

João: Duas pensam melhor que uma.

Arlindo: Então. É o que eu estou falando. Quatro ainda pensam melhor ainda.

É no trabalho cooperativo estabelecido nas relações em sala de aula que as interações acontecem e contribuem para a aprendizagem. Através das discussões, os indivíduos constroem argumentos, conhecem as idéias defendidas por outros e negociam significados. Para Martinho (2007, p. 36), "*quando o aluno se envolve no processo de explicar as suas ideias aos outros e com o objectivo de ser entendido, ele próprio pode sentir uma evolução nas suas compreensões*".

Espera-se, portanto, que a comunicação estabelecida contribua para o processo de ensino e aprendizagem que as relações entre professores e alunos tenham um aspecto cooperativo tornando a interação entre as partes mais produtiva.

Para Brendefur e Fykholm (2000 apud MARTINHO, 2007) são quatro os níveis de comunicação que usualmente acontecem na sala de aula: *uni-direcional, contributiva, reflexiva e instrutiva.*

[5] Descrita na página 28 deste livreto.

A comunicação unidirecional é aquela na qual *"o professor fala quase sempre só, coloca questões fechadas e não dá oportunidade aos alunos para exprimirem as suas ideias, estratégias ou pensamentos"* (BRENDEFUR e FYKHOLM 2000 apud MARTINHO, 2007, p. 25).

Esse tipo de comunicação tende a manter a sala aparentemente mais organizada e, muitas vezes, tem-se a impressão de que a aula fluiu bem e que 'muito conteúdo' foi desenvolvido, porém, é comum acontecer que muitos alunos – mesmo quietos e parecendo estar prestando atenção – perdem o interessem, não assimilam o que é transmitido e, em síntese, não constroem conhecimento.

Na comunicação do tipo contributivo, *"já se verifica alguma partilha de ideias, soluções e estratégias embora sem grande exigência cognitiva. As interacções entre alunos são aqui mais comuns"* (BRENDEFUR e FYKHOLM 2000 apud MARTINHO, 2007, p. 25).

Deixar que os alunos discutam a resolução de um problema em pequenos grupos na sala de aula pode gerar algum desconforto para o professor que precisará lidar com alguns desafios como, por exemplo, garantir a participação de todos os integrantes. Entretanto, esta dinâmica pode favorecer o estabelecimento de uma comunicação do tipo contributivo e potencializar o processo de aprendizagem.

No padrão reflexivo de comunicação, "*para além da partilha, são estabelecidas conversas em torno dos conteúdos e dos próprios discursos. As diferentes falas são utilizadas como apoio para novas e mais profundas explorações. As reflexões não surgem de forma espontânea por parte do aluno mas são proporcionadas pela participação na construção do discurso da aula" (*BRENDEFUR e FYKHOLM 2000 apud MARTINHO, 2007, p. 25).

As discussões nos grandes grupos podem contribuir para o estabelecimento de uma comunicação do tipo reflexivo. Através de questionamentos, o professor pode convidar seus alunos a refletir sobre suas resoluções e de seus colegas, bem como compará-las com as situações discutidas anteriormente.

Por último, na chamada comunicação instrutiva, "*o professor para além de encorajar a reflexão, procura modificar as compreensões matemáticas dos alunos bem como a sua própria prática. O facto de o pensamento do aluno se tornar público, torna o professor consciente dos processos de pensamento, limitações e capacidades dos alunos e isso afecta a sua própria prática" (*BRENDEFUR e FYKHOLM 2000 apud MARTINHO, 2007, p. 25).

É comum que nós, professores, apresentemos uma certa dificuldade inicial para estabelecer este tipo de comunicação. Ao gerar uma demanda por um maior envolvimento intelectual de nossos alunos desencadeamos um processo no qual também seremos mais exigidos. Entretanto, o resultado deste compromisso com o conhecimento ultrapassa a barreira do “siga o modelo” e cria estudantes mais autônomos e conscientes do papel importante que assumem na busca pela própria aprendizagem.

Para Brendefur e Fykholm (2000 apud MARTINHO, 2007), a comunicação no padrão instrutivo só é alcançada após uma longa experiência gerada por aulas de nível reflexivo.

Nossa experiência docente nos ensinou que o primeiro nível proposto neste modelo, além de ser o mais comum, como também ressalta Martinho (2007), é aquele em que o professor se julga mais protegido por considerar que possui o controle total da aula.

Alguns professores podem sentir-se inseguros ao propor atividades potencialmente geradoras de discussões. Em escolas com um número maior de docentes na área de Matemática este problema poderia ser resolvido com a criação de um grupo de estudos nos quais atividades podem ser construídas e analisadas previamente. Em escolas menores onde, muitas vezes, apenas um professor leciona para todas as turmas, este grupo não seria viável dentro da instituição, mas com o avanço dos meios de comunicação outros grupos podem ser criados e o conhecimento partilhado.

Outro aspecto muito importante é a interação entre professor e alunos. Essa interação está diretamente ligada à imagem que estes têm daquele. Por sua vez, a representação que os alunos, têm do professor relaciona-se a forma como o mesmo atua em sala de aula.

Echeita e Martín (1995 apud D’ANTONIO, 2006, p 23-24) apresentam três modelos de professor: Professor ‘organizador-interventor’, Professor ‘observador-facilitador’ e Professor ‘observador-interventor’.

O Professor ‘organizador-interventor’ costuma considerar-se “*um transmissor de conhecimento que planeja e organiza as atividades, sob as quais o aluno tem uma total falta de autonomia, limitando-se a seguir as instruções do professor*” (D’ANTONIO, 2006, p. 23).

Ao assumir este perfil é possível que o professor consiga ensinar algumas ferramentas matemáticas para seus alunos. Entretanto, nossa experiência docente e a literatura consultada evidenciam que o conhecimento possivelmente adquirido pelo aluno fica restrito aos modelos oferecidos pelo professor

O Professor ‘observador-facilitador’ *“permite uma atividade totalmente livre entre os alunos, os quais decidem o quê, como e quando o processo de aprendizagem deverá ser realizado”* (D’ANTONIO, 2006, p. 23-24).

Neste caso, são os estudantes que assumem a responsabilidade pela própria aprendizagem e o professor passa a ser um coadjuvante que tem sua função submetida às demandas geradas por estes indivíduos. Esse perfil deixa o processo de ensino e aprendizagem sem uma linha norteadora e dificilmente poderia ser adotado nas escolas de nosso país onde temos programas a cumprir. Outra dificuldade é a variedade de interesses que podem surgir em uma única classe e desta forma alcançar um consenso torna-se algo pouco provável.

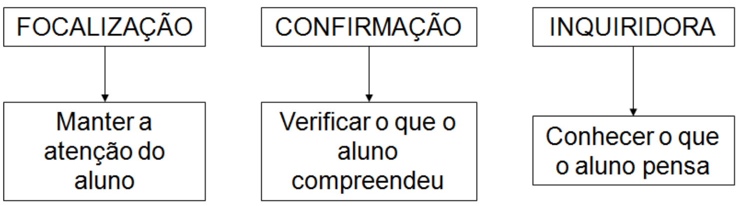
O Professor 'observador-interventor' se empenha em criar *"situações de aprendizagem que fornecem condições necessárias para que o aluno consiga construir seus conhecimentos*" (D'ANTONIO, 2006, p. 24).

Como D'Antonio, consideramos o modelo 'observador-interventor' como o mais indicado para o docente que deseja estabelecer em sua sala de aula uma comunicação no nível reflexivo.

Em diversas situações de sala de aula, o professor conhece a resposta e um caminho mais rápido e fácil para chegar até ela. Neste sentido, torna-se difícil para ele assumir o perfil de 'observador-interventor'. Entretanto, nem sempre a maneira mais fácil de ensinar algo a um estudante é a mais eficaz quando queremos que este atribua sentido ao que está aprendendo. Ser o educador que cria situações de aprendizagem que possibilitem aos alunos construírem suas próprias conjecturas e validá-las não é uma tarefa fácil. Neste sentido, destacamos a importância do papel do professor para o processo de ensino e aprendizagem bem como das escolhas que ele realiza.

O papel das perguntas no processo de ensino e aprendizagem

A exposição e discussão das idéias é um componente importante no processo de construção de conhecimento. Neste contexto, as perguntas feitas pelo professor assumem um papel muito importante no processo comunicativo da sala de aula visto que podem influenciar o processo de construção de conhecimento. Love e Mason (1995 apud MARTINHO, 2007), relacionam três tipos de perguntas: de focalização, de confirmação e de inquirição.



Reconhecemos que as perguntas de focalização e de confirmação também assumem um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, não basta manter a atenção do aluno e avaliar o que ele compreendeu. É preciso levá-los a refletir sobre suas conjecturas.

Uma aula em que pretendemos valorizar a troca de experiências e a argumentação deve privilegiar as perguntas inquiridoras uma vez que estas enriquecem o processo de ensino e aprendizagem quando promovem a interação e ajudam os estudantes a atribuírem significado ao conhecimento que está sendo discutido.

Diversos autores descrevem ações que podem orientar o professor no sentido de tentar obter um bom questionamento. A partir do estudo de Menezes (1999, p 7-8), que realiza um levantamento dessas orientações, apresentamos uma síntese que nos parece interessante para nortear o trabalho do professor:

- *Preparar algumas questões antecipadamente, que sejam claras, concisas e com diferentes níveis de dificuldade* (MCCULLOUGH e FINDLEY, 1983; COHEN e MANION, 1992).

A preparação prévia é importante por que orienta o trabalho do professor. Além disso, é essencial que cada questão esteja bem estruturada e permita ao aluno identificar claramente o que se pede.

É aconselhável variar o grau de complexidade dos problemas. Iniciar com questões mais simples ajuda a motivar a realização da atividade e a variação do nível de dificuldade busca promover sua continuidade. Se o aluno percebe que o grau de complexidade está aumentando é possível que se sinta desmotivado a tentar resolver a próxima se não tiver sido bem sucedido em uma questão, mas se o grau de dificuldade é desconhecido é possível que ele, pelo menos, tente.

- *Evitar questões cuja resposta é um simples "sim" ou "não" ou perguntas que contenham a resposta. Pedir aos alunos que justifiquem suas próprias respostas e analisem, criticamente, as de seus colegas* (JOHNSON, 1982).

Ao justificar ou avaliar uma resposta, o estudante precisa envolver-se com a situação e, a partir de suas observações, elaborar argumentos. Neste processo, não é o professor quem determina as regras a serem seguidas, é o estudante quem constrói seu conhecimento. O processo evolui quando os argumentos dos outros e seus próprios passam a ser um objeto de reflexão para o estudante.

- *Reenviar à turma as questões propostas pelos alunos bem como administrar o tempo entre as perguntas e as respostas* (HARGIE, 1983).

Ao redirecionar os questionamentos dos alunos para os colegas, no grande grupo, criamos a possibilidade da implementação de debates e dividimos, com os próprios estudantes, a responsabilidade pela análise das conjecturas apresentadas.

É necessário permitir que os alunos respondam às perguntas dando a eles tempo suficiente para interpretar seu conteúdo e elaborar uma resposta. Entretanto, longos períodos de silêncio podem dispersar a atenção dos alunos. Neste sentido, cabe ao professor observar o comportamento dos estudantes e prosseguir a aula introduzindo outros questionamentos com o objetivo de orientá-los na construção de uma resposta para a questão inicial.

A partir de tudo que foi exposto anteriormente, asseveramos que a dinâmica adotada nas aulas é um ponto crucial no processo de ensino e aprendizagem. A interação entre os alunos e entre alunos e professor, promovida pelo diálogo que valoriza a argumentação e a discussão das respostas ocupa papel de destaque no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Entendemos que o papel do professor não deve se restringir a avaliar se as respostas encontradas pelos alunos estão certas ou erradas, é essencial que ele questione, ensine a argumentar e a analisar o raciocínio expresso pelos colegas, garantindo a compreensão do que está sendo discutido. Tudo isso em um espaço de respeito mútuo, no qual a participação é sempre valorizada e não há erros, mas aproximações mais ou menos adequadas à discussão em questão.

A proposta de ensino

Construímos esta proposta de ensino a partir das leituras e de nossas experiências em sala de aula. Ela procura ensinar e aprender Análise combinatória enfatizando a comunicação matemática estabelecida por alunos e professor e a construção de estratégias pelos alunos. A aplicação de modelos matemáticos é vista como uma conseqüência natural do processo, não como objetivo principal.

Inicialmente, foi elaborada direcionando sua aplicação para uma turma de 2º ano do Ensino Médio. Entretanto, com as adaptações necessárias pode também ser utilizada em qualquer série do Ensino Fundamental. Realizamos um trabalho semelhante em uma classe de 9º ano com sucesso.

Atividades e dinâmicas

Nossa proposta se constituiu de atividades e dinâmicas que buscam favorecer uma comunicação nos padrões contributivo e reflexivo. Neste sentido, as atividades devem ser resolvidas e discutidas pelos alunos (em pequenos grupos) para posteriormente serem apresentados aos colegas.

Tanto no acompanhamento das discussões nos pequenos grupos quanto no momento da apresentação, cabe ao professor intermediar as discussões através de questionamentos dirigidos aos alunos.

Para se sentir mais preparado a participar das discussões, resolva as questões usando estratégias diferentes antes de propô-las aos alunos.

Não revele a eles o resultado da atividade. Deixe que construam estratégias para validar suas respostas.

A elaboração das primeiras atividades levou em conta o interesse dos alunos pelo tema ‘futebol’ e as necessidades percebidas após a análise de um teste diagnóstico inicial. Em nossa pesquisa, este teste foi aplicado com o objetivo de investigar quais eram os conhecimentos prévios dos alunos participantes da pesquisa com relação ao conteúdo Análise combinatória. Estamos disponibilizando, este e outros dois testes (apêndices 5, 6 e 7) aplicados em nossa pesquisa para que você, professor, possa utilizá-los caso queira.

A seguir, apresentaremos as atividades e algumas orientações.

Primeira atividade: Bingo

Materiais:

- Urna para bingo,
- Bolinhas numeradas com os algarismos.[6]

Tempo previsto: 50 min

Objetivos:

- Encontrar a quantidade de agrupamentos possíveis.
- Familiarizar os alunos com a ideia de construção de agrupamentos a partir de um conjunto de dados.
- Trabalhar a enumeração sistemática e cíclica.
- Trabalhar as idéias de agrupamentos com repetição e sem repetição.

[6] Este material pode ser substituído por outros similares como, por exemplo, pedaços de papéis contendo os algarismos de 0 a 9 para serem sorteados.

Desenvolvimento da atividade: Comece mostrando aos alunos o material que será utilizado nesta atividade. Selecione dois algarismos como, por exemplo, 9 e 7. Coloque as bolinhas correspondentes a estes algarismos dentro da urna. Pergunte a eles quantas opções de resultados são possíveis para um sorteio único. Registre no quadro:

elementos disponíveis: 9 e 7 resultados possíveis: 9 e 7

Repita o procedimento, mas avise que agora irá sortear as duas bolinhas e considerar o numeral formado pelos algarismos na ordem em que forem sorteados. Continue registrando no quadro:

elementos disponíveis: 9 e 7 resultados possíveis: 79 e 97.

Explore a possibilidade de repor a primeira bolinha retirada e registre no quadro:

elementos disponíveis: 9 e 7 resultados possíveis: 77, 79, 97 e 99.

Continue repetindo este procedimento, mas comece a explorar situações mais complexas como, por exemplo: (1) Coloque três ou mais bolinhas na urna, mas anuncie que apenas duas serão sorteadas; (2) varie a quantidade de bolinhas disponíveis e sorteadas; (3) acrescente o zero nas opções de sorteio e trabalhe a ideia que um numeral não deve começar com zero; (4) anuncie que só serão considerados numerais menores que um determinado valor ou apenas numerais pares.

Comentários: Faça sempre registros no quadro e chame a atenção para a necessidade de se organizar a construção dos agrupamentos a fim de não esquecer nenhum. Inicie, por questões de fácil resposta. Elas criam um ambiente onde os alunos se sentem mais seguros e, em consequência, mais receptivos aos seus questionamentos que podem, gradativamente, levá-los a refletir sobre situações mais complexas.

Você pode deixar a atividade mais divertida para os alunos se mesclar a determinação da quantidade de numerais possíveis com alguns sorteios. Os alunos gostam de tentar adivinhar qual será o resultado do sorteio.

Segunda Atividade: Os times de Futebol da cidade

Bola Murcha Esporte Clube
Tabajara Futebol Clube
Clube de Regatas Falência
Perna de Pau Futebol Clube
Saci Pererê Esporte Clube

Materiais:

- Fichas com os nomes dos times (Apêndice 1, pág. 36),
- lápis, borracha e papel para fazer os registros,
- transparências[7], canetas para transparências e retroprojetor.

Tempo previsto: 110 min

Objetivos:

- Contribuir para o desenvolvimento da ideia de agrupamento ordenado.
- Verificar se a ideia de enumeração sistemática com elemento de referência e variação cíclica desenvolvida no encontro anterior foi compreendida.
- Comparar diferentes estratégias de resolução.
- Comparar diferentes formas de registros.

Desenvolvimento da atividade: Nesta atividade, os alunos devem resolver a seguinte situação: *Um campeonato municipal de futebol de salão amador será disputado por cinco times: Bola Murcha Esporte Clube; Tabajara Futebol Clube, Clube de Regatas Falência; Perna de Pau Futebol Clube e Saci Pererê Esporte Clube. Qual é o número de resultados possíveis para os três primeiros lugares, considerando a ordem de classificação?*

Divida-os em grupos. Entregue as fichas com os nomes dos times. Peça a eles para registrarem suas descobertas. Deixe que manipulem as fichas e construam seus esquemas. Participe das discussões internas dos grupos questionando o porquê das estratégias escolhidas.

Peça para registrarem suas resoluções em uma transparência.

[7] Caso não seja possível dispor de transparências, utilize sacos plásticos tamanho A4. É possível escrever neles com caneta hidrocor e reaproveitá-los, limpando-os com álcool.

Depois das discussões em pequenos grupos, promova uma socialização das resoluções pedindo aos grupos que apresentem suas resoluções usando um retroprojetor.

Comentários: Se necessário, oriente-os na enumeração sistemática a partir de um elemento de referência.

Terceira Atividade: Uniformes para os times de futebol

Materiais:

- Lápis, borracha e papel (Se os alunos desejarem podem usar lápis de cor).
- transparências, canetas para transparências e retroprojetor.

Tempo previsto: 50 min

Objetivos:

- Trabalhar o princípio multiplicativo;
- Incentivar o uso da árvore de possibilidades e outras estratégias similares para validar o princípio multiplicativo.
- Comparar diferentes estratégias de resolução.
- Comparar diferentes formas de registros.

Desenvolvimento da Atividade:

Proponha aos alunos a investigação da quantidade de uniformes diferentes (camisa, short e meião) que poderão ser formados com as opções oferecidas ao Saci-Pererê Futebol Clube por um patrocinador: quatro cores de camisas: brancas, pretas, vermelhas e listradas; duas de shorts: vermelho e preto e três de meiões: branco, preto e vermelho.

Divida-os em grupos. Deixe que discutam a melhor estratégia para resolver a questão. Participe das discussões questionando-os a fim de incentivá-los a criar argumentos para justificar suas ideias.

Peça a eles que registrem, em uma transparência, a resolução.

Comente com os integrantes de um grupo as estratégias adotadas por outros grupos.

Socialize as resoluções através de discussões em um grande grupo (professor e alunos).

Peça a alguns alunos para explicarem as resoluções dos grupos dos quais não fazem parte.

Comentário: Caso algum grupo apresente apenas o resultado, incentive seus componentes a montar um esquema para validar a resposta encontrada.

Quarta Atividade: O calendário esportivo e o exame antidoping

O Saci-Pererê Futebol Clube já está no campeonato regional juntamente com outros 11 times. Segundo o regulamento da competição, na primeira fase, cada time deve jogar com todos os outros adversários.

Fui eleita como organizadora do calendário esportivo do evento e preciso determinar quantos jogos serão ao todo nesta primeira fase. Prepare um "esquema" para apresentá-lo a fim de explicar como posso determinar o total de jogos.

Cada time de futebol de salão é formado por 5 jogadores (4 na linha e 1 no gol). O Saci-Pererê Futebol Clube ainda conta com 5 jogadores na reserva. Em um determinado jogo todos os atletas do clube compareceram. Destes atletas, três serão selecionados para fazer o exame anti-doping. Existem várias possibilidades de formação deste grupo. Identifique quantas são, mostrando como vocês chegaram a este resultado.

Objetivos:

- Contribuir para o desenvolvimento da ideia de agrupamento não-ordenado.
- Comparar a quantidade de agrupamentos ordenados com a quantidade de não-ordenados.
- Encontrar a quantidade de agrupamentos possíveis.
- Incentivar o uso da árvore de possibilidades e outras estratégias similares.
- Comparar diferentes resoluções

Materiais:

- Lápis, borracha e papel,
- Folha com os problemas (Apêndice 2, pág. 37),
- Transparências, canetas para transparências e retroprojetor.

Tempo previsto: 220 min

Desenvolvimento da Atividade: A dinâmica adotada pode ser a mesma da atividade anterior, ou seja, os alunos deverão, em grupos menores, resolver as questões e preparar uma apresentação para a turma e para o professor.

Comentário: Durante a discussão no grande grupo, o professor deve aproveitar para discutir possíveis erros relacionados à identificação errada do tipo de agrupamento.

Quinta Atividade: Os presentes

Objetivos:

- Contribuir para o desenvolvimento da ideia de agrupamento não-ordenado e ordenado.
- Comparar a quantidade de agrupamentos ordenados com a quantidade de não-ordenados.
- Encontrar a quantidade de agrupamentos possíveis.

Materiais:

- Lápis, borracha e papel,
- Cinco "brindes" iguais (mesmo tipo de objeto embrulhado do mesmo jeito com papeis da mesma cor)
- Cinco "brindes" diferentes (objeto distintos embrulhados com papeis de cores diferentes)

Tempo previsto: 110 min

Desenvolvimento da Atividade: Selecione cinco voluntários entre os alunos. Em seguida, mostre os cinco brindes iguais. Esclareça que, inicialmente, apenas três voluntários serão escolhidos para receber três brindes. Estabeleça a ordem dos brindes, dessa forma, a ordem de escolha influenciará no tipo de brinde que cada um vai receber. Use questões inquiridoras para explorar esta situação como, por exemplo, 'Se a ordem de entrega dos presentes, de acordo com a cor do embrulho for vermelho, azul e verde, e eu chamar o aluno A primeiro, depois o B e em seguida o C cada um receberá um brinde diferente. E se eu mudar a ordem de entrega para B, A e C, será diferente? Por que?

Interrogue-os sobre a quantidade total de maneiras diferentes que estes três presentes podem ser distribuídos selecionando-se três entre os cinco voluntários.

Peça a eles que façam registros no caderno e discuta, no grande grupo, os resultados encontrados.

Em uma segunda fase, selecione outros cinco voluntários e repita o procedimento da primeira fase utilizando os presentes iguais.

Divida o quadro ao meio e peça a dois alunos para registrarem suas estratégias. Um deve apresentar o evento quando os presentes eram diferentes e o outro, iguais. Peça a cada um deles que explique como o outro resolveu o problema. Compare os resultados. Incentive-os a investigar quantas vezes e por que a quantidade de agrupamentos ordenados é maior que a quantidade de não-ordenados.

Peça a eles que escrevam uma carta a um amigo contando sobre os eventos ocorridos na aula explicando porque a quantidade de maneiras possíveis na primeira distribuição é diferente da segunda.

Comentário: Esta atividade pode contribuir de forma significativa para a compreensão das características que diferenciam um agrupamento ordenado de um não-ordenado, bem como, justificar o modelo matemático $C_{n,r} = A_{n,r} : P_r$.

Sexta Atividade: Problemas diversos I

Objetivos:

- Permitir que tenham contato com situações diversas (similares às encontradas em livros didáticos).
- Torná-los mais ágeis na resolução de problemas envolvendo raciocínio combinatório.
- Verificar se são capazes de identificar o tipo de agrupamento e escolher uma estratégia adequada para resolver um problema.

Materiais:

- Lápis, borracha e papel,
- Folha com os problemas (Apêndice 3, pág. 38),
- Folha grande de papel, cola e tesoura.

Tempo previsto: 220 min

Desenvolvimento da Atividade: Providencie uma cópia da lista de problemas do apêndice 4 para cada grupo. Recorte as tiras separando os problemas.

Divida-os em grupos. Esclareça que você entregará quatro problemas para resolverem. Entretanto, a entrega será feita um a um.

Distribua, pelas paredes da sala, grandes folhas de papel. Uma para cada grupo.

Entregue a tira com o primeiro problema. Peça para registrarem a resolução em uma folha. Quando o registro da estratégia usada estiver pronto deverá ser colado na folha grande correspondente ao grupo. O segundo só será entregue quando o anterior estiver resolvido e assim sucessivamente até que o último problema tenha sido resolvido.

À medida que os grupos forem terminando, peça aos alunos que observem as resoluções dos outros grupos e comparem com as suas. Acompanhe-os nestas observações. Valorize a diversidade de estratégias bem como compare os resultados encontrados.

Comentário: É comum que alguns alunos percebam um erro na sua resolução quando a compara com as dos colegas. Deixe que eles corrijam seus registros desde que justifiquem a mudança.

Sétima Atividade: Problemas diversos II

Objetivos:

- Permitir que tenham contato com situações diversas (similares às encontradas em livros didáticos).
- Torná-los mais ágeis na resolução de problemas envolvendo raciocínio combinatório.
- Verificar se são capazes de identificar o tipo de agrupamento e escolher uma estratégia adequada para resolver um problema.
- Habilitá-los a avaliar criticamente suas próprias resoluções bem como as de seus colegas.
- Usar o erro como oportunidade de aprendizagem.

Materiais:

- Lápis, borracha e papel,
- Folha com os problemas (Apêndice 4, pág. 39),
- Transparências, canetas para transparências e retroprojetor.

Tempo previsto: 220 min

Desenvolvimento da atividade: Entregue aos alunos a lista de problemas do Apêndice 4. Peça que resolvam em grupo e registrem as estratégias.

Recolha os registros, selecione alguns e faça cópias em transparências.

Apresente as resoluções usando um retroprojetor. Peça aos alunos para observarem as resoluções dos colegas e façam comentários. Ajude-os a analisar criticamente cada registro: possíveis erros na determinação do tipo de agrupamento, na escolha da estratégia ou na sua aplicação.

Comentário: Use os erros cometidos como oportunidade de reflexão sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos. Como os registros serão copiados e apresentados sem que o aluno seja identificado podemos explorar os erros sem expô-los.

À título de conclusão

Dificilmente, em uma aula em que prevalece a exposição de conteúdo pelo professor e uma atitude passiva por parte dos alunos, pode-se encontrar um ambiente propício para uma relação que privilegia a negociação de significados. Em contrapartida, aulas investigativas ou de resolução de problemas que instigam os estudantes a criarem estratégias, trabalhos em grupo, nos quais estas estratégias são partilhadas e discutidas, exigem um esforço maior na direção de criar argumentos consistentes.

Concordamos com Menezes (1999, p 14) em que *"a comunicação entre os alunos, tanto oral como escrita, constitui um aspecto que o professor deve incrementar, porque permite o desenvolvimento de capacidades, de atitudes e de conhecimentos".* Dessa forma, é essencial estabelecer uma interação entre professor e alunos na qual exista espaço para a troca de saberes, a argumentação e a construção coletiva de conhecimento, mais que a transmissão de informações. Ou seja,

> *a interação, além de uma fonte para a aprendizagem da cooperação, torna-se uma fonte de construção de conhecimentos compartilhados, visto que quando professor e alunos colaboram e interagem no debate de assuntos e problemas, diferentes pontos de vista podem surgir e serem negociados* (D'ANTONIO, 2006, p 17).

Apesar de não ser uma tarefa fácil, assumir na sala de aula o papel de professor "observador-interventor" pode potencializar o processo de ensino e aprendizagem. Acreditamos que propondo atividades que permitam o estabelecimento de uma comunicação no padrão reflexivo, utilizando perguntas inquiridoras, promovendo discussões em grupos e valorização a argumentação, é possível desenvolvermos uma proposta de ensino capaz de gerar conhecimento com significado.

Esperamos que a proposta de ensino que apresentamos neste encarte seja capaz de contribuir, como foi na pesquisa que o gerou, de forma efetiva para uma educação de qualidade.

Referências

BATANERO, M.C.; GODINO, J.D. e NAVARRO-PELAYO, Vírgínia. **Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.** Educación Matemática, 8(1), 26-39. 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC, 1999. 364 p.

D'ANTONIO, Sandra Regina. **Linguagem e Matemática: Uma relação conflituosa no processo de ensino?** 2006. 285 f. Dissertação (Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná), 2006.

FERNANDES, José Antônio; CORREIA, Paulo Ferreira. **Estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória.** In: Libro de Actas do Congresso Internacional Galego-português de Psicipedagoxia. 2007. A Coruña/Universidade da Coruña. Revista Galego-portuguesa de Psicoloxia e Educación. p. 1256-1267.

MARTINHO, Maria Helena. **Comunicação na sala de aula de Matemática**: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico. 2007. 455 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2007.

MENEZES, Luís. **Matemática, Linguagem e Comunicação**. Conferência: Matemática, Linguagem e Comunicação. ProfMat 99 – Encontro Nacional de Professores de Matemática. Portimão, Portugal, 10 a 13 de novembro de 1999.

ROA, Rafael. **Razonamiento combinatório em estudiantes com preparación matemática avanzada.** 2000. 189 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidade de Granada, Granada, Espanha, 2000.

ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

SANTOS, Vinício de Macedo. Linguagem e Comunicação na aula de Matemática. (In: LOPES, C. A. E. E NACARATO, A. M. [org] **Escritas e leituras na Educação Matemática**, 1 ed. Belo Horizonte. Autêntica, 2009. 192 p., p.117-125).

STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa.** 1999. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação.Campinas, São Paulo, 1999.

Apêndice 1: Material para a segunda atividade.

Bola Murcha Esporte Clube
Tabajara Futebol Clube
Clube de Regatas Falência
Perna de Pau Futebol Clube
Saci Pererê Esporte Clube.

Apêndice 2: Material para a quarta atividade.

1ª situação

O Saci-Pererê Futebol Clube já está no campeonato regional juntamente com outros 11 times. Segundo o regulamento da competição, na primeira fase, cada time deve jogar com todos os outros adversários.

Fui eleita como organizadora do calendário esportivo do evento e preciso determinar quantos jogos serão ao todo nesta primeira fase. Prepare um “esquema” para apresentá-lo a fim de explicar como posso determinar o total de jogos.

2ª situação

Cada time de futebol de salão é formado por 5 jogadores (4 na linha e 1 no gol). O Saci-Pererê Futebol Clube ainda conta com 5 jogadores na reserva. Em um determinado jogo todos os atletas do clube compareceram. Destes atletas, três serão selecionados para fazer o exame antidoping. Existem várias possibilidades de formação deste grupo. Identifique quantas são, mostrando como vocês chegaram a este resultado.

Apêndice 3: Material para a sexta atividade.

1) Quantas e quais são as peças de um jogo de dominó?
2) De quantas formas diferentes 6 pessoas podem formar uma fila?
3) Num grupo de sete alunos, dois deles não se toleram e não desejam sair lado a lado em uma fotografia. A foto será deles sentados em fila. De quantos modos eles poderão sentar, respeitando essa incompatibilidade?
4) De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

Apêndice 4: Lista de problemas proposta na sétima atividade

QUESTÃO 01

Determine o número de anagramas que podemos fazer com as letras da palavra:

a) SEMENTES
b) UNIVERSO

DESAFIO!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

MARQUE APENAS UMA ALTERNATIVA E DEIXE SUA RESOLUÇÃO PARA QUE SEJA ANALISADA.

O número de anagramas que podemos fazer com a palavra SEMENTES, de modo que as vogais NÃO fiquem juntas é:

a) 3000
b) 720
c) 2.640
d) 3.360

QUESTÃO 02

Usando os algarismos 1, 3, 4 e 6, quantos numerais com três algarismos distintos podemos formar?

QUESTÃO 03

Usando os algarismos 1, 3, 4 e 6, quantos numerais com três algarismos, distintos ou não, podemos formar?

QUESTÃO 04

Usando os algarismos 0, 1, 3, 4 e 6, quantos numerais com três algarismos distintos podemos formar?

QUESTÃO 05

Usando os algarismos 0, 1, 3, 4 e 6, quantos numerais ímpares com três algarismos distintos podemos formar?

QUESTÃO 06

Usando os algarismos 0, 1, 3, 4 e 6, quantos numerais maiores que 300 podemos formar?

QUESTÃO 07

Numa loja existem camisas de 6 cores diferentes , calças de 4 cores diferentes e sapatos pretos e marrons. Determine o número de maneiras distintas que uma pessoa pode comprar uma camisa, uma calça e um sapato.

QUESTÃO 08

Uma empresa tem 3 diretores e 6 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas?

QUESTÃO 09

Uma empresa tem 3 diretores e 6 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas contendo, exatamente, 1 diretor?

QUESTÃO 10

Em um grupo de 12 pessoas, serão sorteadas três para ganharem viagens para Porto Seguro, Bahia. Quantos são os resultados possíveis deste sorteio?

Apêndice 5: Teste diagnóstico inicial

Que tal resolver algumas questões desafiadoras?

Leia com atenção cada questão.

Procure analisar as informações e o que está sendo pedido.

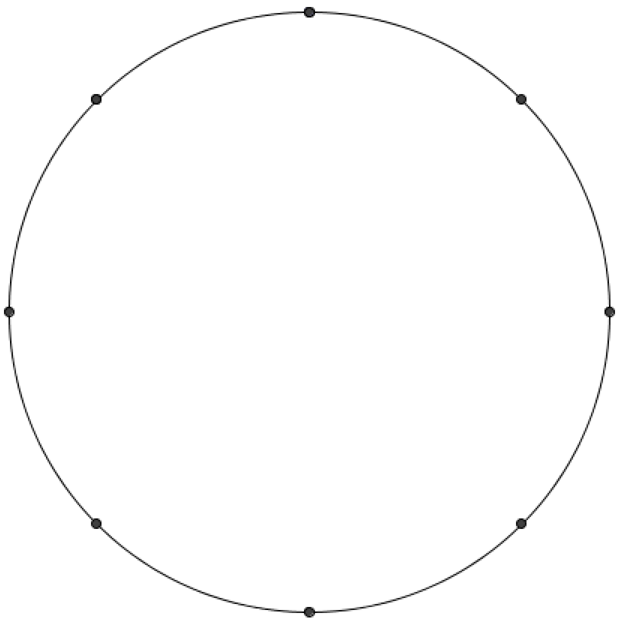
Crie uma estratégia de resolução e divirta-se!

1. Paulo quer trocar de carro ou comprar uma moto. Pesquisando o mercado, ele encontrou, de seu interesse: 8 modelos de carros em 5 opções diferentes de cores e três modelos de motos, em 3 cores diferentes. Qual é o número de opções de compra que ele tem?

2. Quantos numerais de 4 algarismos distintos, ou seja, diferentes, podemos formar com os algarismos 0, 2, 5 e 7?

3. Laura esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la, lembrou-se das seguintes informações: é um número de algarismos distintos, compreendido entre 4000 e 7000 e NÃO é composto pelos algarismos 2, 5 e 9. Identifique o número máximo de tentativas que Laura deverá fazer para encontrar a senha.

4. Numa circunferência são marcados 8 pontos. Determine o número de triângulos que podemos formar com vértices nestes pontos.



Apêndice 6: Teste diagnóstico intermediário

Procure resolver as questões a seguir deixando sua resolução no local indicado.

1) Jorge tem 5 blusas diferentes e 3 calças diferentes. De quantos modos diferentes ele pode se vestir usando uma de suas calças e uma de suas blusas?
2) Fazer anagramas com as letras de uma palavra é misturá-las de forma diferente, ainda que a palavra formada não tenha um significado. Por exemplo: ERAL é um anagrama da palavra REAL. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ESCOLA?
3) Quantos anagramas começados por uma vogal podemos formar com as letras da palavra ESCOLA?
4) Uma escola possui 12 professores de Matemática. Serão escolhidos três para participarem de um congresso. De quantas formas diferentes este grupo poderia ser formado?
5) Quantos **numerais pares** diferentes, de quatro algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?
DESAFIO!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão? (ATENÇÃO! COMISSÃO É UM GRUPO DE PESSOAS ONDE TODOS TÊM AS MESMAS FUNÇÕES)

Apêndice 7: Teste diagnóstico final

Que tal resolver algumas questões desafiadoras?

Leia com atenção cada questão.

Procure analisar as informações e o que está sendo pedido.

Crie uma estratégia de resolução e divirta-se!

1. Paulo quer trocar de carro ou comprar uma moto. Pesquisando o mercado, ele encontrou, de seu interesse: 8 modelos de carros em 5 opções diferentes de cores e três modelos de motos, em 3 cores diferentes. Qual é o número de opções de compra que ele tem?

2. O sistema de numeração na base 10 utiliza, normalmente, os dígitos de 0 a 9 para representar os números naturais, sendo que o zero não é aceito como o primeiro algarismo da esquerda. Pergunta-se:
Quantos são os números naturais de cinco algarismos formados por cinco dígitos diferentes?

3. Encontre:

a) o número de anagramas da palavra CORAGEM que começam com consoante.

b) o número de anagramas da palavra SUCESSO.

4. Observe três diferentes soluções apresentadas por alguns alunos para a seguinte questão de uma prova de matemática:

"*Determine o número de trios possíveis de serem formados com um grupo de 5 pessoas*."

Solução A: $5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 60$ Solução B: $\frac{5.4.3}{3} = 20$ Solução C: $\frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$

Qual das resoluções está correta? **Por que?**

5. Laura esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la, lembrou-se das seguintes informações: é um número de algarismos distintos, compreendido entre 3.000 e 7.000 e NÃO é composto pelos algarismos 2, 5 e 9. Identifique o número máximo de tentativas que Laura deverá fazer para encontrar a senha.

6. Desafio!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Considere um grupo formado por 6 homens e 8 mulheres, do qual se deseja constituir uma equipe formada por 4 pessoas, sendo 2 homens e 2 mulheres. O **NÚMERO DE MANEIRAS DISTINTAS** de se formar a equipe é:

a) 495
b) 420
c) 210
d) 285
e) 450

Justifique sua escolha!