Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática

Autor: Prof. Ms. Alexandre Botelho Brito

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Ouro Preto

2010

Ao Professor de Fundamentos de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática

Professor, este material apresenta uma proposta de ensino de Conjuntos Numéricos para disciplinas de Fundamentos de Análise Real (em algumas universidades chamadas de Análise Real, Análise na Reta ou Análise I) em cursos de Licenciatura em Matemática.

A proposta inclui atividades didáticas relacionadas à **"História e Desenvolvimento dos Conjuntos Numéricos: Das noções intuitivas para as definições rigorosas".** Os temas abordados nestas atividades são:

1) Números Naturais: Do problema do princípio da contagem para os Axiomas de Peano;

2) Números Inteiros: Do problema da comparação de medidas para as estruturas de Anel e Domínio de Integridade;

3) Números Racionais: Do problema da razão de grandezas para a estrutura de Corpo;

4) Números Irracionais: Do problema da incomensurabilidade de segmentos para a Teoria das Proporções de Eudoxo;

5) Números Reais: Do problema da representação da reta numérica para os Cortes de Dedekind.

A proposta aqui apresentada foi aplicada a alunos de uma turma da disciplina "Introdução à Análise Real" do curso de Licenciatura em Matemática e é fruto da nossa Dissertação do Mestrado Profissional em Educação Matemática do programa de pós-graduação da Universidade Federal de Ouro Preto intitulada "Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática".

Considerando a importância do tópico “Conjuntos Numéricos” para professores dos ensinos fundamental e médio, é conveniente a discussão de todas as atividades presentes nesse “produto”. Temos como sugestão que cada atividade seja aplicada em quatro aulas, sendo dois horários usados na leitura e discussão do texto e os dois seguintes na correção e discussão dos exercícios.

Cabe ao professor da disciplina de Análise Real a decisão de abordar ou não os “fatos históricos” dessas atividades em exercícios elaborados/selecionados por ele e nas avaliações da disciplina. Mas devemos atentar para a sua importância no processo de formação da matemática como a concebemos hoje.

Esperamos que esse material contribua para a sua prática pedagógica e para um repensar sobre o ensino de Análise Real.

ÍNDICE

A tensão entre Rigor e Intuição

Refletindo sobre a questão da transição para o Pensamento Matemático Avançado, vale ressaltar que, na prática pedagógica de Análise Real, ela pode ser identificada com a transição entre uma noção intuitiva dos conceitos e uma demonstração rigorosa dos resultados, o que nos remete à tensão entre rigor e intuição, discutida por Reis (2001).

Em sua experiência docente, Reis (2001) sempre se questionou sobre as causas das dificuldades apresentadas pelos alunos no curso de Análise, além das altas taxas de reprovação historicamente inerentes a ela, mesmo sendo os tópicos de Análise anteriormente trabalhados na disciplina de Cálculo.

Uma característica atribuída a essas disciplinas, é que no Cálculo o conteúdo é visto de forma mais intuitiva e muitas vezes explorando os aspectos gráficos e geométricos; já em Análise Real, prima-se pelas definições formais de conceitos e pela demonstração rigorosa das propriedades sob a forma de teoremas.

Devemos discutir essa transição Cálculo-Análise, muitas vezes reduzida à transição intuição-rigor, buscando responder, ou pelo menos refletir sobre as questões que envolvem o processo de aprendizagem em Análise Real. Esse debate pode contribuir para que o Professor de Matemática do Ensino Superior reflita sobre que metodologias de ensino se apresentam para o ensino de Matemática e, mais especificamente, para as disciplinas de Introdução à Análise Real.

Esse rigor presente no curso da disciplina Análise evidencia a história do seu surgimento, mais especificamente, o movimento de "Aritmetização da Análise", assim citado por Baron e Bos (1985, p. 43):

> A transição do Cálculo para a Análise no século XVIII não foi somente uma questão de crescimento e divisão em subcampos; envolveu também uma transformação fundamental em sua natureza. O Cálculo, por volta de 1700, era ainda essencialmente orientado para a Geometria. Tratava de problemas sobre curvas, empregava símbolos algébricos, mas as quantidades de que se utilizava eram principalmente interpretadas como ordenadas e abscissas de curvas, ou como outros elementos de figuras geométricas. Durante a primeira metade do século, diminuiu o interesse pela origem geométrica dos problemas e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras. A Análise tornou-se o estudo e manipulação de fórmulas.

Esse movimento tornou-se difícil e intrincado, mas acabou se concretizando, permitindo ao conteúdo de Análise (além da visão simplista de ser o estudo e manipulação de fórmulas) ser a dedução lógica de um conjunto de postulados que caracterizam o sistema dos números reais.

De toda forma, ao caracterizar o movimento da aritmetização, vários autores o classificam como a rigorização do cálculo, o que de fato é! Mas afirmar que o rigor estava presente no "surgimento da Análise" não equivale a dizer que é o principal foco da disciplina. Concordamos com Boyer (1974) quando diz que ao avaliar desenvolvimentos da Matemática devemos sempre ter em mente que as idéias atrás das notações são, de longe, "a melhor metade".

O fato é que a busca da formalização do Cálculo, que culminou com a aritmetização da Análise, proporcionou a valorização do rigor e sua busca, não só em Análise, mas em todas as áreas que constituem a Matemática Pura.

Pierpont (1899) resume o pensamento da matemática pura ao declarar que "o que pode ser provado deve ser provado" (*What can be proved should be proved*); entretanto, ele relata a importância das idéias da seguinte forma: "De nossa intuição, nós temos as noções de curvas, superfícies, continuidade, etc. Ninguém pode mostrar que as formulações aritméticas são coextensivas com seus conceitos intuitivos correspondentes" (PIERPONT, 1899, p. 400-401).

A inquietação de Pierpont e de outros matemáticos de sua época era que o "preço a ser pago" pelo desenvolvimento da Matemática no século XIX não deveria "custar" uma total separação do mundo de nossos sentidos.

Voltando às relações entre o rigor e a intuição, seriam estas entidades totalmente dicotômicas? Para Tall (1991, p. 20):

> O movimento do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significante: de descrever para definir, de convencer para provar de uma maneira lógica baseada nas definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva, a qual é vista durante a luta inicial dos estudantes universitários com as abstrações formais, enfrentadas por eles no primeiro ano de universidade.

Parece-nos que a intuição é, então, o ponto inicial da busca do rigor, permanecendo ativa durante todo o processo sendo, pois, complementar ao rigor!

Pinto (2009) destaca que não temos apenas dois percursos para a construção de uma Matemática avançada, trabalhando de uma Matemática denominada de intuitiva para outra denominada de formal. Na realidade, podemos pensar tal situação como uma reta com dupla seta, em que uma extremidade é representada pela intuição e a outra pelo rigor, apresentada por Reis (2001, 2009), sugerindo que o trabalho do professor pode situar-se em qualquer um dos pontos dessa reta contínua. Na prática docente, o ponto de equilíbrio é, ou pelo menos deveria ser, um ponto móvel e dinâmico.

Hanna (1989, p.45) afirma que não há infidelidade à Matemática ao buscar, tanto quanto possível, uma explicação matemática em detrimento de uma "prova matemática", 'mesmo abrindo mão do rigor' (grifo nosso). Isto não quer dizer que o rigor não tem seu papel na construção do conhecimento matemático nem deva ser "deixado de lado", em algum momento. Reiteramos as idéias de Reis (2001) que o rigor deve aparecer / acontecer em níveis.

Tanto uma "prova que prova" como uma "prova que explica" devem estar implícitas de rigor, e de acordo com a necessidade, usá-lo em maior ou menor grau. Usamos aqui os termos apresentados por Hanna (1989), "provas que provam", como sendo aquelas que têm a única função de provar a veracidade de certa propriedade matemática, muitas vezes vazias de significado prático, e "provas que explicam" como aquelas que, além da função necessária de verificar essa veracidade, demonstram / apresentam propriedades e características do que se está demonstrando, tornando-as mais inteligíveis e claras aos olhos dos discentes, sem dever nada às "provas que provam".

Outra discussão interessante sobre as provas e seu papel no ensino de Matemática é feita por Garnica (2002, p. 6), ao afirmar que a prova rigorosa pode ser "considerada como uma – dentre as várias – forma de argumentação acerca do objeto matemático".

Esta questão nos remete, novamente, à importância do papel do professor na escolha / seleção do que e de que forma fazer a transposição entre a Matemática e o seu ensino. Entretanto, é reconhecida a dificuldade de caminhar da história da evolução da Matemática para a sala de aula. Essas discussões devem levar os professores das disciplinas de Introdução a Análise Real, principalmente nos cursos de licenciatura, a reconhecer, segundo Reis (2009, p. 93), que:

> [...] o "rigor acadêmico", dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos, artigos científicos e outros, não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino. Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é, rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos, etc).

Nesta perspectiva, apresentamos uma proposta de ensino de Conjuntos Numéricos, para disciplinas de Fundamentos de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática.

Nossa proposta se intitula “História e Desenvolvimento dos Conjuntos Numéricos: Das noções intuitivas para as definições rigorosas” e se divide em 5 (cinco) atividades relacionadas aos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

Cada atividade possui objetivos específicos e é seguida por alguns exercícios retirados de livros didáticos (ÁVILA, 2006; FIGUEIREDO, 1996; LIMA, 1993) e outros de nossa própria autoria.

Atividade 1) O Conjunto dos Números Naturais

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números naturais e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo os Axiomas de Peano.

1.1) Da Intuição...

> O conceito de número com o qual estamos familiarizados, e que é tão essencial na sociedade de nossos dias, evoluiu muito lentamente. Para o homem primitivo, e mesmo para o filósofo da Antiguidade, os números estão intimamente relacionados com a natureza. Para o homem civilizado de hoje, o número natural é um ente puramente matemático, uma conquista de seu pensamento. (Fernandes e outros, 2005, p. 19)

Esta afirmação dos pesquisadores acima faz-nos refletir sobre o quão importante para o homem de diversas culturas e sociedades foi a criação dos números, para representar quantidades e a partir daí, fundamentar o próprio processo de contagem.

A princípio, este processo era, nada mais, nada menos, do que uma tentativa de se estabelecer uma correspondência entre os objetos a serem contados (por exemplo, ovelhas, gados, etc) com o chamado "conjunto de contagem", o qual continha elementos familiares à cultura e cotidiano das pessoas (por exemplo, pedras, dedos da mão, etc).

Entretanto, este processo de contagem ficava restrito a pequenas quantidades, gerando a necessidade de sua aplicação a casos que envolviam uma maior quantidade de objetos. A saída para este problema foi, então, buscar uma representação simbólica e um certo conjunto de regras e/ou procedimentos que permitissem a representação de um "número qualquer" de objetos. Mas como isso seria possível?

Muitos dos conjuntos criados para este fim continham de 5 a 60 "símbolos básicos", como os sistemas de numeração egípcio, grego e romano. Atualmente, quase todos os povos do mundo utilizam o sistema numérico hindu-arábico, inventado pelos indianos e introduzido pelos árabes, na Europa.

Este sistema é "decimal posicional". Decimal, pois utiliza 10 símbolos, chamados algarismos, que são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0. Posicional, pois qualquer número pode ser expresso por estes algarismos, que têm valores distintos de acordo com a posição que eles ocupam na representação do número.

Todavia, não podemos fixar datas para o surgimento dos números naturais, como hoje os conhecemos:

$$\mathbf{IN} = \{ 1 , 2 , 3 , ... \}$$

A respeito do conceito de número natural, Caraça (1959) afirma que o mesmo é muito remoto e constitui uma das primeiras manifestações do despertar da inteligência no homem. Contudo:

> [...] esse conceito deve, durante muitos séculos, ter estado identificado, por assim dizer, com os objetos a que dizia respeito; só muito mais tarde adquiriu o caráter de generalidade e abstração com que hoje o usamos. Foi certamente assim para os primeiros matemáticos gregos... Em Euclides (cerca de 300 a.C.) encontra-se já uma noção de um número natural mais elaborada sem, no entanto, possuir o caráter de generalidade que lhe damos hoje. (Caraça, 1959, p. 4)

Mas o que seriam esta generalidade e abstração relacionadas ao conceito de um número natural que temos hoje?

1.2) ... para o Rigor !

Segundo Lima (1993), toda a teoria dos números naturais pode ser deduzida de 3 axiomas, conhecidos como "Axiomas de Peano".

São dados, como objetos não definidos, um conjunto **IN**, cujos elementos são chamados de "números naturais" e uma função s: **IN** → **IN**. Para cada $n \in$ **IN**, o número s(n) é chamado o "sucessor de n".

A função s satisfaz aos seguintes axiomas:

A1) s é injetiva, isto é, números diferentes possuem sucessores diferentes:

$$m \neq n \Rightarrow s(m) \neq s(n) \text{ ou ainda, } s(m) = s(n) \Rightarrow m = n;$$

A2) Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro; ele é chamado de "um" e é representado pelo símbolo "1". Assim: $1 \neq s(n), \forall\, n \in$ **IN;**

A3) Se X é um subconjunto de **IN** tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ temos também que s(n) $\in X$, então X = **IN.**

Este último axioma é também designado como "Princípio da Indução Matemática", pois, noutras palavras, quer dizer que:

"Se $\wp$ é uma propriedade referente aos números naturais que é válida para 1 e, se do fato de um número natural n gozar de $\wp$ pudermos concluir que seu sucessor s(n) = n + 1 também goza da propriedade $\wp$, então podemos concluir que a propriedade $\wp$ é válida para todos os números naturais".

Na visão de Caraça (1959), Peano partiu de 3 conceitos primitivos: unidade, número e sucessor. Por outro lado, buscou relacionar estes conceitos por meio de 5 proposições:

1) A unidade é um número;

2) Todo número tem um, e um só sucessor, que é um número;

3) Se dois números têm o mesmo sucessor, então são iguais;

4) A unidade não é sucessor de nenhum número;

5) Se uma classe S de números contém a unidade e se a classe formada pelos sucessores dos números de S está contida em S, então todo número pertence a S.

Entretanto, mesmo com a formalização de Peano, os matemáticos estão longe de estabelecer um acordo a respeito das teorias axiomáticas dos números naturais. Como o próprio Peano verificou, existem várias "sucessões" diferentes da "sucessão dos números naturais" que satisfazem aos seus axiomas.

Exercícios

1) Use o Princípio da Indução Matemática para provar que:

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n = 1, 2, 3, ...$

2) Sabemos das Progressões Aritméticas que:

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Prove esse resultado por indução.

3) Dados os números naturais **a** e **b**, com **a** < **b**, prove que existe um número natural **m** tal que **a + m = b**.

4) Um elemento **a** $\in$ **IN** chama-se antecessor de **b** $\in$ **IN** quando se tem **a** < **b** mas não existe **c** $\in$ **IN** tal que **a** < **c** < **b.** Prove que, exceto 1, todo número natural possui um antecessor.

Atividade 2) O Conjunto dos Números Inteiros

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números inteiros e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo as estruturas algébricas de Anel e Domínio de Integridade.

2.1) Da Intuição...

Com o desenvolvimento do raciocínio matemático e de suas aplicações, surgiram algumas situações ainda não definidas na perspectiva de se trabalhar somente com os números naturais. Foi o que ocorreu na China antiga.

Eles operavam com os números naturais precedidos de uma barra vermelha ou por uma barra preta, que tinham significados opostos. Era a idéia "primitiva" de números negativos e positivos, usados em situações diversas para representar excesso e falta.

Apesar de operar facilmente com esses novos "entes" matemáticos, os chineses, assim como aconteceu com Diofanto de Alexandria (século III), não os consideravam verdadeiros para solucionar algumas equações. Nestas situações, Diofanto limitava-se a classificar o problema como absurdo. Já os europeus, nos séculos XVI e XVII, admitiam que esses problemas tinham soluções falsas ou impossíveis.

Assim o fez Michael Stifel (1487-1567) que se negou a admitir os números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de "numeri absurd". Cardano chamou-os de "numeri ficti".

Apenas no século XVIII, houve uma interpretação dos números positivos e negativos como sendo "segmentos de direções opostas". Assim, o 1 seria um segmento de uma unidade para a direita enquanto que o – 1 seria o segmento de uma unidade para a esquerda. Agora sim, fazia sentido pensarmos no elemento neutro:

> Se bem que a idéia de zero, de não-existência, esteja sem dúvida ligada à noção de quantidade, a verdade é que, nem nas mais antigas civilizações conhecidas, nem nos povos mais primitivos de hoje, se encontra o zero tomado como número nem o uso de um símbolo para o zero. Este é relativamente recente e a sua introdução foi devida às exigências da numeração escrita. (Caraça, 1959, p. 15)

Coadunando com o autor citado, o zero será considerado um número inteiro, o elemento neutro "separador" dos números positivos e negativos. Teremos, então, o conjunto dos números inteiros como o conhecemos hoje:

$$\mathbf{Z} = \{ \ldots , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots \}$$

Comparando-o com o conjunto dos números naturais, vemos que apesar dos números realmente usados no processo de contagem "natural" serem os inteiros positivos, os inteiros negativos conseguiram preencher uma lacuna que existia, quando se pensava em comparação de medidas e grandezas.

Esta "criação humana" dos inteiros foi, portanto, fundamental para o desenvolvimento não só da Matemática, mas de toda a Ciência de uma maneira geral, pois hoje, vemos com muita "naturalidade" uma representação numérica negativa quando analisamos a temperatura de um local ou um extrato bancário.

2.2) ... para o Rigor !

Com o intuito de definir formalmente o conjunto dos números inteiros, vamos relembrar a definição de duas estruturas algébricas de grande importância: Anel e Domínio de Integridade.

Sejam A um conjunto e (+) e (.) duas operações em A, chamadas de "adição" e de "multiplicação". A terna **(A,+,.)** será chamada de Anel se as operações gozarem das seguintes propriedades:

A1 (A adição é associativa) Quaisquer que sejam a, b e c $\in$ A, tem-se que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

A2 (A adição é comutativa) Quaisquer que sejam a e b $\in$ A, tem-se que:

$$a + b = b + a$$

A3 (Existe um elemento neutro da adição) Existe um *0* $\in$ A tal que:

$$a + 0 = a \text{ , para todo } a \in A$$

A4 (Todo elemento possui um simétrico) Para todo $a \in A$, existe um $-a \in A$ tal que:

$$a + (-a) = 0$$

M1 (A multiplicação é associativa) Quaisquer que sejam a, b e $c \in A$, tem-se que:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

M2 (A multiplicação é comutativa) Quaisquer que sejam a e $b \in A$, tem-se que:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

M3 (Existe um elemento neutro da multiplicação) Existe um $1 \in A$ tal que:

$$a \cdot 1 = a \text{ , para todo } a \in A$$

MA (A multiplicação é distributiva em relação à adição) Quaisquer que sejam a, b e c $\in A$, tem-se que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

É fácil verificarmos que, da forma como a adição e a multiplicação estão definidas no conjunto dos números inteiros, a terna **(Z,+,.)** é um anel, no qual o elemento neutro da adição é o número inteiro "0" e o elemento neutro da multiplicação é o número inteiro "1".

Existe também uma outra estrutura algébrica com propriedades muito interessantes que é um Domínio de Integridade. Um anel **(A,+,.)** será chamado de Domínio de Integridade (ou Anel de Integridade) se, além das propriedades anteriores de anel, for válida a seguinte propriedade:

M4 (Propriedade da Integridade para a multiplicação) Sejam a e $b \in A$, tais que $a \cdot b = 0$, onde 0 é o elemento neutro da adição. Então:

$$a = 0 \text{ ou } b = 0$$

(Z,+,.) é, portanto, um domínio de integridade, pois, de fato, se a e $b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $a \cdot b \neq 0$.

<u>Exercícios</u>

1) Ache o erro na "demonstração" da seguinte afirmação, obviamente falsa:

"Todos os números inteiros positivos são iguais, ou seja,
para todo $n \in$ IN é verdadeira a asserção P(n): $1 = \ldots = n$".

i) P(1) é verdadeira, pois $1=1$;
ii) Suponha P(n) verdadeira; logo, $1 = \ldots = n - 1 = n$. Somando 1 a cada membro da última igualdade, segue que $n = n + 1$; logo, $1 = \ldots = n - 1 = n = n + 1$ e, portanto, P(n + 1) é verdadeira.

Portanto, pelo Principio da Indução Matemática, concluímos que P(n) é verdadeira para todo $n \in$ IN.

2) Seja f: **Z** → **Z** uma função tal que, para quaisquer que sejam **a** e **b** $\in$ **Z,** $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Pede-se:

a) Mostre que $f(0)=0$;

b) Mostre por indução que $f(n) = n.f(1)$, para todo $n \in \mathbf{Z}^+$;

c) Mostre que $f(-n) = -f(n)$, para todo $n \in \mathbf{Z}$;

d) Conclua que $f(n) = n \,.\, f(1)$, para todo $n \in \mathbf{Z}$.

3) Seja **a** um número inteiro. Mostre que:

a) Se $\mathbf{a}^2$ é par, então **a** é par;

b) Se $\mathbf{a}^2$ é divisível por 3, então **a** é divisível por 3.

4) Mostre que o algarismo das unidades do quadrado de um número inteiro, no sistema decimal, só pode ser **0, 1, 4, 5, 6 ou 9**.

Atividade 3) O Conjunto dos Números Racionais

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números racionais e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo a estrutura algébrica de Corpo.

3.1) Da Intuição...

> O conhecimento dos números fracionários é muito remoto. Eles introduziram-se naturalmente no cálculo pela necessidade de exprimir numericamente a medida de certas grandezas. (Caraça, 1959, p. 35)

Segundo o autor, já se encontra menção aos números fracionários no "Papiro de Rhind", documento egípcio datado de 1500 a 2000 a.C., pertencente ao *British Museum*. A idéia básica é descrita a seguir.

Dado o segmento de reta $\overline{AB}$, e tomando como unidade de medida o segmento $\overline{CD}$, no caso, que é o mais frequente, de $\overline{CD}$ não estar contido um número (inteiro) de vezes em $\overline{AB}$, procura-se um segmento de comprimento L que seja "parte alíquota" de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (isto é, ela se contém um número inteiro em ambos os segmentos). Se med$\overline{CD}$ $=n$.L e med$\overline{AB}$ $=m$.L, o resultado da medida exprimir-se-á dizendo que o segmento $\overline{AB}$ contém *m* das *n-ésimas* partes de $\overline{CD}$, ou *m n-avos* de $\overline{CD}$, ou que a medida de $\overline{AB}$ tomando como unidade $\overline{CD}$ é o novo número $\frac{m}{n}$; com o mesmo significado temos ainda a igualdade:

$$\text{med}\,\overline{AB} = \frac{m}{n}\,.\,\text{med}\,\overline{CD}\,.$$

Nesta primeira definição, Caraça (1959) aborda razão de segmentos para definir "números fracionários". Já Ávila (2006, p. 20) ressalta a diferença de razão para fração: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos, não números. É por isso que "razão" não é o mesmo que "fração". Os gregos não usavam "frações", apenas "razões". E não escreviam $\frac{AB}{CD}$ para indicar a razão de dois segmentos (aqui, AB e CD são as medidas dos segmentos).

Mesmo nos dias de hoje, costuma-se escrever AB:CD=*m*:*n*, e dizer “AB está para CD assim como *m* está para *n”*. Quando indicamos a razão com $\frac{AB}{CD}$, em vez de AB:CD, não devemos confundí-la com fração.

3.2) ... para o Rigor !

Definimos “anel” na atividade do conjunto dos números inteiros, exemplificando com o “domínio de integridade” (**Z**,+,.). Para definirmos o conjunto dos números racionais vamos relembrar outra importante estrutura algébrica, a estrutura de Corpo.

Segundo Figueiredo (1996), um corpo K é um conjunto de elementos x,y,z,..., onde se acham definidas as operações de adição (isto é, a cada par de elementos x e y em K corresponde um único elemento de K que se designa por x + y) e de multiplicação (isto é, a cada par de elementos x e y em K corresponde um único elemento de K que se designa por x.y) satisfazendo às propriedades que seguem:

1) Leis comutativas: $x + y = y + x$, $x.y = y.x$;

2) Leis associativas: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x.y).z = x.(y.z)$;

3) Existência de um zero: existe um elemento $0 \in K$ tal que:

$$x + 0 = x \text{ , para todo } x \in K;$$

4) Existência de uma unidade: existe um elemento $1 \in K$ tal que:

$$x.1 = x \text{ , para todo } x \in K;$$

5) Existência de um simétrico : dado $x \in K$, existe $-x \in K$ tal que:

$$x+(-x) = 0;$$

6) Existência de um inverso: dado $x \in K$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in K$ tal que:

$$x.\ x^{-1} = 1;$$

7) Lei distributiva: $(x + y).z = x.z + yz$.

Temos então, que o conjunto dos números racionais **Q**, munido das operações usuais de adição e multiplicação, é um corpo, onde:

$$\mathbf{Q} = \{\ p\ /\ q;\ \text{tais que } p, q \in \mathbf{Z} \text{ e } q \neq 0\ \}$$

Para representar o conjunto **Q** na reta real **R**, representamos dois pontos, o "0" e o "1". Os inteiros são facilmente marcados tomando o segmento de extremidades "0" e "1" como unidade. Os racionais são obtidos por subdivisões adequadas do segmento unidade.

Domingues e Iezzi (1984) observam que os anéis **Z** e **Q** são ambos, "comutativos com unidade" (vale a comutatividade das operações e a existência da unidade). Para ambos vale a lei do anulamento do produto. Mas, enquanto no anel **Z** somente o "1" e o "–1" admitem inverso (que também pode ser chamado de "inverso multiplicativo" ou ainda "simétrico multiplicativo"), no anel **Q**, todo elemento não nulo admite inverso. Este fato nos sugere a definição a seguir:

"Um anel K, comutativo com unidade, recebe o nome de corpo se todo elemento não nulo de K admite inverso multiplicativo, isto é:

$$\forall\ a \in K,\ a \neq 0,\ \exists\ b \in K\ /\ a.\ b = 1$$

Tal elemento b é chamado inverso de a e será denotado por a^{-1}."

Se agora relacionarmos corpos com domínios de integridade, temos um resultado muito interessante:

Proposição: Todo corpo K é um domínio de integridade.

Demonstração: Sejam a e b elementos de um **corpo** K tais que **a.b = 0**. Suponhamos que um deles, por exemplo, a, é não nulo. Então, existe $a^{-1} \in K$, tal que: $a.a^{-1} = 1$. Multiplicando os dois membros da equação a.b = 0 por a^{-1}, temos:

$$a^{-1}.a.b = a^{-1}.0 \Rightarrow 1.b = 0, \text{ ou seja, } \mathbf{b = 0}.$$

Assim, provamos a lei do anulamento do produto em K que é, então, um **domínio de integridade**.

Vale ressaltar que a recíproca desse teorema não é verdadeira, pois, como já mencionamos, **Z** é um domínio de integridade, porém não é um corpo, uma vez que seus únicos elementos “inversíveis” são o “1” e o “– 1”.

Uma outra abordagem interessante que é a definição de número racional feita por Hefez (1993, p. 35), na qual o autor destaca o “senso comum” de identificação de um número racional com uma fração, mas expressa o que considera “essencial” no conceito de fração:

“Frequentemente, define-se um número racional como sendo uma fração $\frac{a}{b}$ com a e b números inteiros e b $\neq$ 0. Mas o que é fração? O essencial numa fração $\frac{a}{b}$ é o par ordenado (a , b) e a relação de igualdade $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow$ (a.b’ = a’.b)”

Isto é o ponto de partida para se definir um corpo de frações de um domínio de integridade qualquer. Em particular, **Q** pode ser definido como o corpo de frações de **Z** (Ver Hefez, 1993, p. 35).

<u>**Exercícios**</u>

1) Prove que a dízima periódica 0,232323...é igual a $\frac{23}{99}$.

2) Estabeleça a seguinte regra: Toda dízima periódica simples é igual a uma fração ordinária, cujo numerador é igual a um período e cujo denominador é constituído de tantos noves quantos são os algarismos do período. (“dízima periódica simples” significa que o período começa logo após a vírgula e a dízima não tem parte inteira).

3) Exemplifique e estabeleça uma regra para dízimas periódicas compostas.

4) Mostre que a soma, a diferença, o produto e a divisão de dois números racionais é um número racional.

Atividade 4) O Conjunto dos Números Irracionais

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números irracionais e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo a Teoria das Proporções de Eudoxo.

4.1) Da Intuição...

> A origem histórica da necessidade da criação dos números irracionais deve-se simultaneamente a fatos, intimamente relacionados, de ordem geométrica e aritmética. (Caraça, 1959, p. 87)

O autor refere-se à existência de certos segmentos então chamados de "incomensuráveis" entre si, isto é, segmentos que não possuem uma medida comum entre si. No campo aritmético, a existência de segmentos incomensuráveis equivale à impossibilidade da existência de números racionais que representem esses segmentos, ou ainda, "à impossibilidade da existência, sempre, de um número racional raiz exata de outro". (Caraça, 1959, p. 87)

A incomensurabilidade da diagonal do quadrado era conhecida na "escola pitagórica", mas a sua descoberta não se desenvolveu em conjunto dos números, como nos parece natural; foi tratada como a razão de segmentos incomensuráveis.

Continuavam a considerar apenas os números racionais, desenvolvendo-se ao lado uma teoria geométrica. A separação da Aritmética com a Geometria em compartimentos estanques é essencialmente de ordem filosófica.

Mas a busca pela formalização dos conjuntos numéricos e a criação da Geometria Analítica com Fermat e Descartes, no século XVII, exigiu uma mudança de atitude em relação a esses dois campos, preparando assim o caminho para o tratamento aritmético das incomensurabilidades:

> Newton dá já uma definição de número, a partir da razão de grandezas, que compreende tanto os números racionais como os irracionais. Só no século XIX, porém, com Weierstrass, Méray Dedekind e Cantor, apareceram teorias dos números irracionais satisfatórias do ponto de vista do rigor científico. (Caraça, 1959, p. 87)

Figueiredo (1996) também aborda a incomensurabilidade da diagonal do quadrado da seguinte forma:

> [...] a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos têm comprimento 1, então a hipotenusa não é racional. Portanto, o ponto P da reta R, obtido traçando-se a circunferência centrada em 0 e raio igual à hipotenusa, não corresponde a um racional (ver Figura 2 abaixo) (Figueiredo, 1996, p. 4)

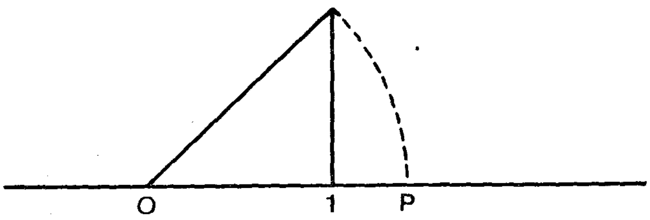


Fig. 2

O autor não apenas cita a sua incomensurabilidade, mas demonstra a irracionalidade da hipotenusa.

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que a hipotenusa seja um racional p / q. Podemos supor que p e q são primos entre si. Pelo Teorema de Pitágoras, $(p / q)^2 = 1 + 1$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é um inteiro par, o que implica que p é par, isto é, p = 2r. Portanto, $4r^2 = 2q^2$, ou seja, $q^2 = 2r^2$, de onde se segue que q é par. Ora, p e q, sendo números pares, não podem ser primos entre si. Essa é a contradição!

A demonstração acima explicita a existência de pontos da reta (real!) que não correspondem a elementos de **Q**, indicando uma insuficiência dos racionais no "preenchimento" desta reta.

4.2) ... para o Rigor !

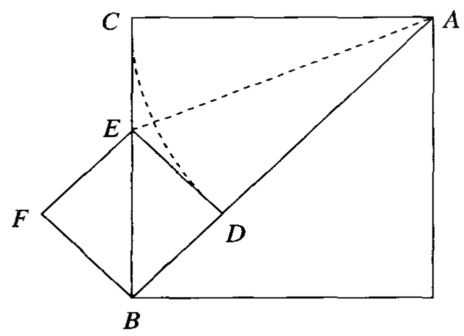
Desde o século V a.C., época dos pitagóricos, acreditava-se que dados dois segmentos AB e CD (aqui representados sem a barra superior, por simplificação de notação), sempre existiria um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em AB e em CD. Uma simples reflexão intuitiva nos sugere que essa é uma ideia muito razoável pois, caso um certo EF não sirva, podemos procurar outro "menor" que satisfaça a condição de ser submúltiplo comum de AB e CD.

Dois segmentos são ditos comensuráveis quando existe o segmento EF capaz de medí-los um número inteiro de vezes.

Ao contrário do que nos induz a intuição geométrica, existem segmentos incomensuráveis, o que foi motivo de muita surpresa para todos os matemáticos da época. A priori, a sua aceitação não foi unânime, acarretando a chamada “crise dos incomensuráveis” (BOYER, 1974; EVES, 1997).

Ávila (2006) apresenta como exemplo inicial de segmentos incomensuráveis, o lado e a diagonal de um quadrado.

Seja o quadrado a seguir de lado AC e diagonal AB.



Vamos supor, por absurdo, que os segmentos AC e AB são comensuráveis. Isto implica que existe um terceiro segmento λ, submúltiplo comum de AC e AB. Com centro em A e raio AC tracemos o ponto D na diagonal AB. Seja DE o segmento perpendicular à diagonal AB, com $E \in$ CB. De certo que os triângulos ACE e ADE são congruentes (AC = AD, AE é lado comum e os ângulos ADE e ACE são retos) sendo, portanto CE = ED. Como o triângulo BDE é retângulo isósceles (já que o ângulo formado pela diagonal e um lado é de 45º), concluímos que BD = DE. Logo:

AB = AD + BD = AC + BD , isto é, AB = AC + BD

Como o segmento λ é submúltiplo comum de AC e de AB, ele será submúltiplo de BD (que seria a diferença entre AB e AC). Temos também que:

AC = BC = BE + EC = BE + BD , isto é, AC = BE + BD

Como o segmento λ é submúltiplo comum de AC e de BD (como demonstramos acima), ele será submúltiplo de BE. Então, o mesmo segmento λ será submúltiplo comum de BE e BD, segmentos esses que são, respectivamente, a diagonal e o lado do quadrado BDEF. Ora, a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original ao quadrado menor BDEF pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente, de modo que esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos. Dessa maneira, provamos que o segmento λ deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos. Como ele foi "fixado" no primeiro passo, isto nos leva a um absurdo!

Concluímos, portanto, que o lado e a diagonal do quadrado são segmentos incomensuráveis.

Então, a partir desta idéia, podemos concluir que a razão entre dois segmentos incomensuráveis não é um número racional; logo, será um número irracional.

A formalização do conjunto dos números irracionais, ou **R – Q**, foi feita por Eudoxo, em sua Teoria das Proporções (ver ÁVILA, 2006, p. 50).

Exercícios

1) Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.

2) Prove que $\sqrt{p}$ é irracional, onde p>1 é um número primo qualquer.

3) Prove que a soma ou a diferença entre um número racional e um número irracional é um número irracional. Mostre, com um contra-exemplo, que o produto de dois números irracionais pode ser um número racional.

4) Prove que o produto de um número irracional por um número racional diferente de zero é um número irracional.

Atividade 5) O Conjunto dos Números Reais

Objetivos: Apresentar elementos do desenvolvimento histórico dos números reais e alguns aspectos de seu processo de formalização, segundo os Cortes de Dedekind.

5.1) Da Intuição...

> A Matemática desenvolveu-se extensamente nos tempos modernos (isto é, a partir do século XVI), até o início do século XIX, mesmo sem qualquer fundamentação dos diferentes sistemas numéricos. Trabalhavam-se livremente com os números racionais e irracionais, desenvolvendo todas as suas propriedades, sem que houvesse uma teoria embasando esse desenvolvimento. (Ávila, 2006, p. 55)

Esta nota histórica nos mostra dois aspectos interessantes no desenvolvimento dos números reais.

O primeiro aspecto diz respeito a uma sensação de "dever cumprido" que muitos matemáticos sentiram ao se construírem os números irracionais que agora, unidos aos racionais, formavam o conjunto dos números reais, um conjunto realmente "completo", no sentido de que, se associado a uma reta contínua, cada elemento deste conjunto era representado por um ponto na reta e, da mesma forma, cada ponto desta reta representava um elemento deste conjunto. Assim, "completou-se" a idéia da reta real da maneira como hoje a conhecemos: **IR = Q ∪ (IR – Q)**

_______●_________●_______●_______●_______●___●__●________●______

– 4   – 2   – 3/2   0   1   √2   2   π

Outro aspecto é que muitos matemáticos se sentiam "incomodados", pois, muitos conceitos matemáticos importantes como limites, derivadas e integrais (só para ficarmos em conceitos do Cálculo Diferencial e Integral), estavam baseados numa noção que até então não estava "rigorosamente formalizada": a noção de "número real".

Nesta perspectiva, muitos matemáticos do século XIX fizeram acontecer um movimento que ficou conhecido como a "Aritmetização da Análise" (ver REIS, 2009) que se revelou em diversas tentativas de dar ao Cálculo (e, portanto, a toda a Matemática) um padrão de formalização e rigor que, necessariamente passava, naquele momento, pela "urgência" de se ter uma definição precisa, rigorosa e inabalável de número real.

5.2) ... para o Rigor !

> Vários matemáticos do século XIX cuidaram da construção dos números reais, dentre eles Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor. Mas as teorias dos números reais que permaneceram foram a de Dedekind e a de Cantor. (Ávila, 2006, p. 57)

A partir de agora, faremos uma breve exposição das idéias centrais da teoria de Dedekind, destacando inicialmente a definição de "corte", que é considerada fundamental dentro da perspectiva, então inovadora, de se pensar num número real como um "par de dois subconjuntos".

Definição

Um **corte de números reais** ou, simplesmente, **corte**, é um par ordenado de subconjuntos do conjunto dos números racionais não vazios (E , D), tal que:

i) $E \cup D = \mathbf{Q}$

ii) Todo elemento de E é menor que todo elemento de D, isto é:

$$\text{Se } x \in E \text{ e } y \in D, \text{ então } x < y.$$

Exemplos:

1) $E = \{ x \in \mathbf{Q} \,/\, x \leq 3\}$
$D = \{ x \in \mathbf{Q} \,/\, x > 3\}$

$\Rightarrow$ **(E,D)** = 3

2) $E = \{ x \in \mathbf{Q}_{-} \text{ ou } (x \in \mathbf{Q}_{+} \,/\, x^2 < 2)\}$
$D = \{ x \in \mathbf{Q}_{+} \,/\, x^2 > 2\}$

$\Rightarrow$ **(E,D)** = $\sqrt{2}$

Teorema de Dedekind

Todo corte possui um **elemento de separação**. Este elemento é o **número real** com o qual ele é identificado.

Nos exemplos acima, os números reais 3 e $\sqrt{2}$ são os elementos de separação dos respectivos cortes.

A demonstração deste teorema é bastante elaborada e, em alguns casos, o mesmo é enunciado até como "Postulado de Dedekind" (Figueiredo, 1996, p. 9).

Entretanto, o que vale destacar é que, a partir deste teorema, formalizamos o conceito de número real (que, então, é identificado com o seu corte), formalização esta, que vinha sendo perseguida desde os primórdios do desenvolvimento dos sistemas numéricos (ver JÚDICE, 2007).

Exercícios

1) Prove que entre dois números reais distintos sempre há uma infinidade de números racionais (isto é, o conjunto dos números racionais é denso em **IR**).

2) Prove que entre dois números reais distintos sempre há uma infinidade de números irracionais (isto é, o conjunto dos números irracionais é denso em **IR**).

3) Mostre que dado um número real positivo **a**, existe um natural **n** tal que $\frac{1}{n} < \mathbf{a}$.

4) Defina cortes para os seguintes números reais:

a) 2

b) π

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. S. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BARON, M.E.; BOS, H.J.M. **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BORTOLOTI, R. D. M. **Afeto e cognição no contexto da disciplina Análise Real no curso de Matemática**. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.** Recife: SBEM, p. 147-167, 2009.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática Bacharelado e Licenciatura.** PARECER CNE/CES Nº 1302/2001.

BURTON, L. **Recognising Comonalities and Reconciling Differences in Mathematics Education.** Educational Studies in Mathematics. Londres, 2002.

CARAÇA, B. J. **Lições de Álgebra e Análise.** Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1959.

CLÍMACO, H. D. A. **Prova e Explicação em Bernard Bolzano**. Cuiabá: UFMT, 2007.

DAVIS, R. B.; VINNER, S. **The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages.** Journal of Mathematical Behavior, n. 5, p. 281-303, 1986.

FERNANDES, A.M.V.; AVRITZER, D.; SOARES, E.F.; BUENO, H.P.; FERREIRA, M.C.C.; FARIA, M.C. **Fundamentos de álgebra**. Belo Horizonte: UFMG, Coleção: Didática 2005.

FIGUEIREDO, D.G. **Análise I.** Campinas: UNICAMP, 1996.

FISCHBEIN, E. **Intuition and Mathematical Education.** Osnabrucker Schriftenzur Mathematik, p.148-176, 1978.

GARNICA, A. V. M. **As demonstrações em Educação Matemática: Um ensaio.** In: BOLEMA, n. 18. Rio Claro, p. 91-122, 2002.

GASCHO, J.A. **Lógica formal, lógica dialética e aprendizagem.** In: Revista UNIVILLE, v. 8, n. 2. Joinville, p. 20-25, 2003.

GONÇALVES, H. A. **Jogo, brincadeira ou Geometria**. Juiz de Fora: UFJF, 1999.

GRATTAN-GUINNESS, I. **O que foi e o que deveria ser o Cálculo?** In: Zetetiké, v. 5, n. 7. Campinas, p. 69-89, 1997.

HANNA, G. **Proofs that prove and proofs that explain.** Proceedings of the Tentieth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. III. Paris, p. 45-54, 1989.

JÚDICE, E. D. **Números Reais**. Belo Horizonte: FUMARC, 2007.

KLINE , M. **O fracasso da Matemática Moderna.** São Paulo: IBRASA, 1976.

LANE, S. M. **Responses to Theoretical Mathematics.** Bulletin of the American Mathematics Society, v.30, n.2, p.190-191, 1994.

LIMA, E.L. **Análise Real – Volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática.** Campinas: Autores Associados, 2008.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação: Alegorias, tecnologias e temas afins.** São Paulo: Cortez, 2001.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. **Por que Análise Real na licenciatura?** In: Zetetiké, v. 13, n. 23. Campinas, p. 11-42, 2005.

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). **A formação do professor que ensina Matemática: Perspectivas e pesquisas.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAPERT, S. **Mindstroms: Children, computers and powerful ideas**. New York: Basic Books, 1980.

PEREIRA, J. E. **A formação acadêmico-profissional: Compartilhando responsabilidades entre universidades e escolas. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: didática e formação de professores.** In: Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, XIV, Porto Alegre, 2008. Anais… Porto Alegre: ENDIPE, 2008.

PERMINOV, V.Y. **On the realiability of mathematical proofs.** Revue International de philosophie, p.500-508, 1988.

PIERPONT, J. **On the Arithmetization of Mathematics.** Bulletin of the American Mathematical Society, p. 394-406, 1899.

PINTO, M. M. F. **Discutindo a transição dos Cálculos para a Análise.** In: Laudares, J. B.; Lachini, J. (Orgs.) **A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, p. 123-145, 2001;

PINTO, M. M. F **Re-visitando uma teoria: O desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de Análise Real.** In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.** Recife: SBEM, p. 27-42, 2009.

POINCARÉ, H. **Mathematics and Science: Last Essays**. New York: Dover, 1908.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese de Doutorado. Faculdade de Educação – UNICAMP. Campinas, 2001.

REIS, F. S. **Discutindo algumas relações entre a história e o ensino de Análise Matemática: Da Aritmetização da Análise para a sala de aula do Ensino Superior.** In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, IV, Brasília, 2009. Anais... Brasília: SBEM, p. 1-14, 2009.

REIS, F. S. **Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise.** In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.** Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

REIS, F. S.; MASSON, A.B. **A inserção de Tecnologias Informáticas em novas metodologias para o ensino de Cálculo I na Universidade Federal de Ouro Preto.** In: Semana de Iniciação Científica da UFOP, X, Ouro Preto, 2003. Anais... Ouro Preto: UFOP, p. 1-10, 2003.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. **Números Reais: Concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura.** In: Zetetiké, v. 7, n. 12. Campinas, p. 95-117, 1999.

TALL, D. O. **The Psichology of Advanced Mathematical Thinking.** In: TALL, D.O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 3-21, 1991.

___________ **The transition to the Advanced Mathematical Thinking: Functions, limits, infinity and proof.** In: GROWS, D. A. (Ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan, p. 495-511, 1992.

TALL, D. O.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity.** Educational Studies in Mathematics, n. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. **The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics.** In Tall, D. O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 65-81, 1991.

ZAIDAN, S. **Breve panorama da formação de professores que ensinam Matemática e dos professores de Matemática na UFMG**. In: Zetetiké, v. 17, Número Temático. Campinas, p. 37-56, 2009.

ZUFFI, E. M. **Uma Seqüência Didática Sobre "Funções" Para A Formação de Professores do Ensino Médio**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM-2004, Recife, Pernambuco. Anais.