Proposta de Ensino

O estudo de superfícies em IR^3: Atividades elaboradas na perspectiva da aprendizagem significativa e auxiliadas por uma tecnologia informática

Anderon Melhor Miranda

Apresentação

O ensino da disciplina Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo) constitui uma tarefa difícil e instigante para muitos professores e estudiosos da Educação Matemática. A disciplina é vista como uma fonte inesgotável de investigações e questionamentos acerca da prática docente nas instituições de ensino superior.

Com base em Rezende (2003), Nasser (2007) e Machado (2008), encontramos diversos problemas apresentados por professores que lecionam essa disciplina, dentre eles, a dificuldade dos alunos em compreender as relações entre a expressão analítica de uma equação com o traçado do gráfico, e questões referentes à construção, análise e interpretação desses gráficos, principalmente, em superfícies e gráficos do IR^3.

Assim, na tentativa de amenizar esses problemas, e outros oriundos do ensino de Cálculo, convidamos o leitor para conhecer esta proposta de ensino, baseada nos resultados de uma pesquisa de mestrado – *As Tecnologias da Informação no Estudo do Cálculo na Perspectiva da Aprendizagem Significativa*[1] – realizada em uma turma de licenciatura em matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, na disciplina de Cálculo. O produto de nossos estudos propõe uma abordagem pedagógica no ensino de gráficos do IR^3, isto é, uma perspectiva de ensino acerca de superfícies, em que o uso de um *software* em conjunto com atividades – Atividades 1 e 2 (ver Apêndice) – possibilite a aprendizagem dos alunos sobre esses conteúdos.

As atividades foram elaboradas na perspectiva da teoria da aprendizagem significativa. As construções e interpretações gráficas das superfícies em IR^3, por meio de um *software* matemático gráfico (Winplot[2]) e de uma teoria de aprendizagem tiveram como objetivo despertar nos alunos uma motivação para aprender, de forma significativa, os conteúdos referentes a gráficos de funções reais de duas variáveis, quer dizer, relacionar conhecimentos prévios em matemática (gráficos do IR^2, geometria analítica, cônicas, entre outros) com a aprendizagem de conceitos e propriedades de superfícies e gráficos em IR^3, auxiliados por uma tecnologia informática.

[1] Título da dissertação de mestrado – produto de uma pesquisa no ensino superior – do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. Utilizaremos o termo dissertação de mestrado no decorrer do texto para mencionar essa pesquisa.

[2] *Software* desenvolvido pelo professor Richard Parris "Rick" (rparris@exeter.edu), da Philips Exeter Academy, por volta de 1985. Escrito em C, chamava-se PLOT e rodava no antigo DOS. Com o lançamento do Windows 3.1, o programa foi rebatizado de "Winplot". A versão para o Windows 98 surgiu em 2001 e está escrita em linguagem C++.

Acreditamos que, além da proposta mostrar algumas considerações – à luz da teoria da aprendizagem significativa – sobre as respostas dos aprendizes[3] participantes da pesquisa, ela serve como reflexão e referencial para professores de Cálculo analisarem as nossas atividades e, convenientemente, incorporá-las em sua prática docente, reestruturando-as de acordo com as suas necessidades ou no que achar pertinente com a sua realidade acadêmica. Com isso, o professor poderá construir e elaborar suas próprias atividades, na perspectiva teórica da aprendizagem significativa, proporcionando uma aprendizagem em que o estudante possa **interagir** novos conhecimentos com outros existentes em sua estrutura cognitiva.

Esta proposta aborda, resumidamente, ideias e conceitos teóricos sobre a teoria da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 1980); conceitos do pensamento matemático avançado (TALL; VINNER, 1991), e o pensamento visual-espacial (COSTA, 2005). Ressaltamos que, para maiores esclarecimentos e conhecimento acerca desta fundamentação teórica, o leitor deva consultar a dissertação de mestrado.

Por fim, esperamos que esta proposta de ensino contribua qualitativamente com o ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo e, consequentemente, promova, de forma significativa, um instrumento de desenvolvimento da Educação Matemática no ensino superior.

[3] Utilizaremos nomes fictícios para preservar a identidade dos aprendizes que participaram da pesquisa.

Índice

1 O uso de tecnologias informáticas no ensino de Cálculo

> Quando decidido sobre a pedagogia do ensino de matemática, tem-se que levar em conta não só questões sobre como se espera que os estudantes adquiram os conceitos matemáticos, mas também, e talvez principalmente, como os estudantes realmente adquirem aqueles conceitos. (VINNER, 1991, p. 67, grifo do autor)

Para o uso de tecnologias informáticas (TI) no estudo do Cálculo, Vinner (1991) sugere que elas sirvam como um meio para a aprendizagem de estudantes nessa disciplina e que, com elas, o professor elabore atividades utilizando recursos computacionais, para que os aprendizes conheçam as definições e os conceitos do Cálculo de forma mais significativa.

Machado acredita que as ferramentas computacionais são bons instrumentos para a resolução de problemas, pois permitem aos alunos vivenciar "verdades matemáticas", experimentar e fazer conjecturas e

> De maneira geral, as tecnologias permitem uma simulação que facilita, em pouco tempo, os estudos de diferentes situações e de experimentação a custo baixo, possibilitam a construção de novas relações entre os homens e os ambientes informatizados e apresentam-se como ferramentas de auxílio ao processo de ensino e aprendizagem. (2008, p.21)

No discurso do uso de TI para o ensino de Matemática, Machado (2008) enfatiza a necessidade de mesclar o uso dessa tecnologia com outras (quadro, giz, lápis e papel) e que a utilização apenas de uma forma ou tipo de mídia não constituiria uma eficiência nas relações de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva vemos, em nossos estudos, a utilização do Winplot auxiliando as atividades, principalmente quando se referencia a visualização de superfícies e curvas de nível. Com isso, acreditamos que a utilização e a introdução de um recurso tecnológico são necessárias na prática docente do professor de matemática, pois a literatura – confirmada pela prática – afirma que esses recursos podem auxiliar a eficiência nas relações de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

A necessidade de um ensino eficiente de Cálculo (relacionado ao traçado de superfícies), diferente dos moldes tradicionais que vêm sendo apresentados atualmente, exige mudanças nas apresentações e visualizações de gráficos em IR^3. Em adição aos livros textos, instrumentos de abordagem estática do assunto, deve-se tentar uma abordagem mais dinâmica com o auxílio do computador, de modo que os aprendizes possam visualizar e manipular os seus gráficos e construções arrastando e movendo, por meio de ferramentas que os *softwares* e aplicativos oferecem. Nos livros didáticos de Cálculo mais recentes são trazidas abordagens de tópicos com o uso de TI e apresentam uma revisão de seus conteúdos em novo estilo, com ilustrações, gravuras e exercícios de simulação em *softwares*, para a construção e interpretação de gráficos.

Assim, penso que a utilização de TI, juntamente com outras mídias e recursos, como o quadro, giz, lápis, papel, livro didático, entre outros, consiste em um meio que possibilita despertar no professor de Cálculo o conhecimento de diversos tipos de *softwares*; o seu uso e a sua aplicabilidade para que, assim, ele possa estar atribuindo e incorporando essa tecnologia na sua prática docente, pois os resultados de nossa pesquisa sugerem eficiência na aprendizagem de estudantes a respeito de gráficos em IR^3.

2 A aprendizagem significativa

Com base, na teoria de Ausubel[4], a aprendizagem significativa consiste em um:

> processo pelo qual uma nova informação se relaciona, de maneira **substantiva**[5] (não literal) e **não arbitrária**[6], a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo. Neste processo a nova informação **interage** com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel chama de "conceito subsunçor" ou, simplesmente "subsunçor"[7], existente na estrutura cognitiva de quem aprende. (MOREIRA, 2006, p. 14,15, grifo nosso)

Fundamentado nessa teoria e auxiliado por um *software* gráfico – como recurso de verificação e visualização das superfícies construídas – utilizamos, em nossos estudos, os conhecimentos prévios dos estudantes em gráficos do IR^2 e conceitos matemáticos, para estabelecer as conjecturas dos aprendizes na construção de gráficos em IR^3, isto é, tendo em vista que, em um processo de aprendizagem significativa, a interação de novas informações com outras ancoradas na estrutura cognitiva do aluno, se faz necessária para a ocorrência dessa aprendizagem. Acreditamos que nossas atividades aliaram-se a essa perspectiva de

---

4 *David Paul Ausubel* nasceu nos Estados Unidos, na Cidade de Nova York, no ano de 1918, filho de uma família judia pobre de imigrantes da Europa Central. Psicólogo e Teórico Educacional. Fundador da Teoria da Aprendizagem Significativa, referências da teoria ver em: AUSUBEL, D.P. (1968). **Educational psychology: a cognitive view.** New York, Holt, Rinehart and Winston.

5 "ou seja, o que é aprendido de maneira significativa tem também significados pessoais, idiossincráticos. Os conhecimentos têm significados denotativos que são compartilhados por certa comunidade de usuários e os conotativos que são pessoais." (MASINI e MOREIRA, p. 15, 16).

6 "quer dizer, o novo conhecimento não interage com qualquer conhecimento prévio, mas sim com algum conhecimento que seja especificamente relevante para dar-lhe significado. Isso implica que se não houver esse conhecimento prévio não poderá haver aprendizagem significativa." (ibidem, p. 15, 16).

7 "qualquer ideia, conceito, proposição existente na estrutura cognitiva do aprendiz" e que servirão "como ancoradouros para os novos conhecimentos, se interagir com esses na finalidade de obter a aprendizagem significativa." (MOREIRA, 2006, p. 15)

aprendizagem, uma vez que, nos preocupamos em criar, nessas atividades, questões que induzem o aluno a utilizar o conhecimento sobre conteúdos do IR^2 estendendo-os para outros e novos assuntos, por exemplo, conceitos, propriedades e superfícies em IR^3.

Em contraposição à aprendizagem significativa existe a aprendizagem mecânica, sobre a qual Moreira (2006), coadunando com a ideia de Ausubel, define:

> como sendo aquela em que novas informações são aprendidas praticamente sem interagirem com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, sem ligar-se a conceitos subsunçores específicos. A nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal, não interagindo com aquela já existente na estrutura cognitiva e pouco ou nada contribuindo para sua elaboração e diferenciação. (2006, p. 16)

Moreira (2006) dá exemplos para as diferenças entre essas duas aprendizagens, como no caso de um quebra-cabeça, em que o aprendiz poderá encontrar a solução do jogo por descoberta, mas a aprendizagem será mecânica; já em outro caso, de uma lei física, o aprendiz pode recebê-la já "pronta e acabada", sem ter que descobri-la, porém poderá usá-la significativamente, desde que tenha em sua estrutura cognitiva os subsunçores adequados (MASINI; MOREIRA, 2008).

Assim, Ausubel (1980) acredita que temos que **averiguar** o conhecimento do aprendiz e, a partir daí, **ensiná-lo de acordo**. O **averiguar** e o **ensinar de acordo** são tarefas bastante difíceis defendidas pelo autor, pois averiguar consiste na revelação (mostrar, compreender) da estrutura cognitiva do aprendiz e no entendimento da sua organização; e o ensinar de acordo requer uma boa resposta dessa análise de averiguação, para que, só depois com os instrumentos básicos, recursos e metodologias de cada disciplina, o educador possa chegar a uma aprendizagem que seja significativa para o aluno, e não a uma simples sequência de atividades que possa induzir a uma memorização e/ou aprendizagem mecânica.

Em busca de uma sintonia com o **averiguar** e o **ensinar de acordo**, defendidos por Ausubel, realizamos testes pilotos que favoreceram a compreensão dos conhecimentos prévios dos alunos, ou seja, realizamos atividades que serviram de subsídios para averiguarmos o conhecimento de nossos aprendizes-participantes e, a partir deles, analisamos e refletimos sobre como utilizá-los da melhor forma possível para a inserção de novos conteúdos (superfícies em IR^3).

Contudo, confirmamos o argumento de Ausubel (1980) de que, nas relações de ensino-aprendizagem, é necessária uma predisposição tanto do professor em querer ensinar, como do aprendiz em querer aprender, uma vez que a falta de uma dessas partes impossibilita a eficiência nas relações de ensino e aprendizagem, fato que é almejado na perspectiva da teoria da aprendizagem significativa.

De maneira geral, Ausubel (1980) não considera o ensino e aprendizagem extensivos, ou seja, se tivermos um ensino bastante eficaz, isso não irá garantir a aprendizagem; esta relação é vista pelo autor como uma das condições que influenciam a aprendizagem significativa. Nesse caso, ainda é possível que os aprendizes estejam desmotivados, desatentos, não querendo aprender, mesmo com um ensino de qualidade. Por outro viés, podemos ter a possibilidade de um aprendiz ser autodidata e não necessitar do professor. “O ato de ensinar não se encerra em si mesmo, pois a finalidade do ensino é o aprendizado por parte do aluno (...) e assim o produto da aprendizagem é ainda a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino” (AUSUBEL, 1980, p. 12).

3 O pensamento visual-espacial e o pensamento matemático avançado

Costa classifica o pensamento visual em dois tipos: o visual e o espacial, denominando-o de pensamento visual-espacial. A autora adverte que, na literatura, encontramos o pensamento visual ligado às questões de visualizações, ou seja, “o pensar visual é porque ocorre um fluxo contínuo de imagens mentais visuais” (2005, p. 88) e o pensamento espacial ou raciocínio visual e espacial associado às capacidades mentais e espaciais, ou seja, “pode envolver uma estrutura espacial percepcionada visualmente que incorpora descrições implícitas dos elementos das imagens e relações espaciais entre esses elementos” (ibidem, p. 88). Assim, a autora acredita que as duas formas de pensamento ocorrem simultaneamente e podem estar combinadas com informações visuais e espaciais interligadas.

Essa perspectiva de combinar o pensamento visual com o espacial contribuiu para a construção das nossas atividades; queremos dizer que, na preparação de atividades sobre gráficos, é importante que o professor leve em consideração uma valorização das ideias visuais-espaciais e perceptivas dos alunos, pois assim poderemos atingir de forma expressiva a aprendizagem significativa.

Corroboramos as ideias conclusivas e sugestivas de Frota e Couy (2009) quanto às construções mentais, por meio de conjecturas geradas pelos próprios estudantes em processos visuais (visualização), quando elas afirmam que “ao se investigar as ideias para uma posterior formalização, coloca-se o aluno para fazer Matemática, preparando-o não só para reproduzir regras, mas principalmente para compreendê-las e aplicá-las, à luz dos conceitos teóricos” (FROTA; COUY, 2009, p.19).

Com isso, sugerimos que os professores, principalmente em Cálculo, empreguem estratégias variadas de ensino para essa disciplina, pois os estudos de Frota e Couy (2009) apontaram uma estratégia relevante para o estudo de variações de funções, mostrando ainda meios necessários de serem utilizados no ensino de Cálculo com um foco no pensamento visual. Em nosso estudo, utilizamos o *software* como recurso auxiliar nesse processo de desenvolver o pensamento visual do aluno para a aprendizagem de superfícies em IR^3.

Já para o pensamento matemático avançado, vemos que, da década de 1970 até os dias atuais, o grupo de pesquisadores desse pensamento, liderado por David Tall, realiza muitas pesquisas sobre os conteúdos de Cálculo, na perspectiva de concepções do cognitivismo, tendo um respeito mundial nessa área. Assim, por meio desse pensamento, esse grupo de estudiosos pesquisadores dedicados, compromissados e atentos para os problemas do ensino superior, trouxe diversas contribuições para o ensino de Cálculo, as quais são permeadas de análises e discussões sobre as questões inerentes à Psicologia Cognitiva do aprendiz, contribuindo para o pensamento matemático avançado.

De acordo com essas ideias, Tall (1991) afirma que as investigações em Educação Matemática mostram que os estudantes de Matemática, principalmente os de Cálculo, possuem pouca capacidade de visualização e de formalização de conceitos. O autor sugere uma relação mais próxima entre a intuição e o rigor, para melhorar o uso dessas ideias visuais. Estas, muitas vezes consideradas intuitivas por um matemático experiente, não são necessariamente intuitivas para um aluno inexperiente, o que sugere a existência de diferentes categorias de intuição e, com isso, também diferentes níveis de rigor, conforme discute Reis (2001), em sua tese de doutorado, sobre a necessidade de um rompimento de uma visão dicotomizada entre rigor e intuição no ensino de Cálculo. Aparentemente, as ideias mais complexas podem levar a uma intuição poderosa que favorece, a *posteriori*, a obtenção de provas e demonstrações matemáticas com seu devido rigor.

Esse “casamento” entre intuição e rigor foi utilizado de forma implícita em nossas atividades quando exigimos dos alunos, primeiramente, que eles pensassem e “imaginassem” a forma de uma superfície (representação gráfica) a partir de sua expressão algébrica correspondente; e, posteriormente, descrevessem o processo dessa construção gráfica. Assim, para resolver uma questão, o aprendiz desenvolveu um processo lógico e dedutivo, passando depois para uma fase de rigor e formalização do conceito de superfície.

4 O *software* Winplot

Para a escolha do *software*, levamos em consideração a sua gratuidade[8], aplicabilidade e limitação em nossos estudos. A partir daí, escolhemos o Winplot devido à sua facilidade de manuseio e acessibilidade, sendo bem aceito pelos aprendizes participantes. Além disso, acreditamos que ele ofereça a possibilidade de investigarmos as contribuições para uma aprendizagem significativa em construções de gráficos do IR^3, através das relações entre os subsunçores/conhecimentos prévios dos aprendizes e gráficos do IR^2.

Para nossos estudos, o *software* Winplot ofereceu a possibilidade de construir diversos e diferentes gráficos em duas e três dimensões (ao digitarmos como dados de entrada as suas expressões algébricas). Por meio de seus comandos, podemos visualizar as representações gráficas na tela do computador; e ainda, pelo uso de outras de suas ferramentas que auxiliam a construção de simulações gráficas, através da entrada de **parâmetros** (letras) em lugar dos coeficientes das variáveis nas expressões analíticas, conseguimos manipular e visualizar várias representações gráficas, mudando apenas os coeficientes das variáveis nas expressões dadas.

O *software* ainda permitiu os movimentos (de translação e rotação) de gráficos em IR^3, pelos quais o aprendiz pôde visualizar e manipular essas superfícies no espaço, construindo a aprendizagem desses conteúdos na disciplina de Cálculo de várias variáveis. Entretanto, apesar da utilização do Winplot em nossos estudos, deixamos a opção do professor escolher outros *softwares* gráficos, de sua preferência, na realização das atividades propostas.

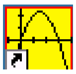
Em nossas atividades, utilizamos alguns comandos básicos do Winplot, entretanto, caso o professor queira mais detalhes na aplicabilidade e operacionalização desses comandos, favor consultar o Roteiro do Professor-Pesquisador no Apêndice (8.2) ou um tutorial do *software* no sítio:

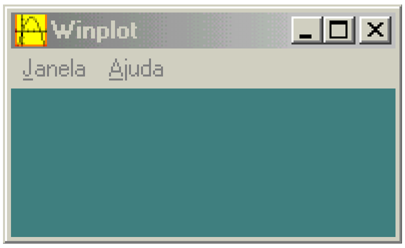
http://math.exeter.edu/rparris/peanut/Explorando%20Winplot%20-%20Vol%201.pdf .

[8] Obtido em qualquer sítio de busca ou de *download* (www.google.com.br, www.baixaki.com.br).

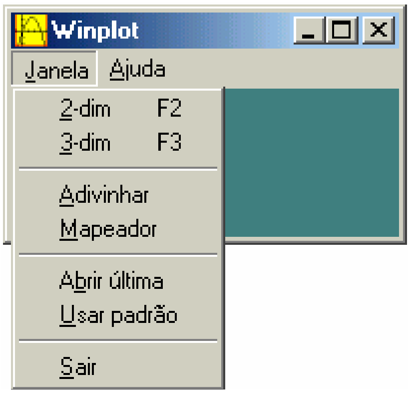
4.1 Comandos utilizados nas Atividades

4.1.1 Abrindo o Winplot

Para abrir o Winplot.exe, clique duas vezes no ícone  e abrirá a caixa:

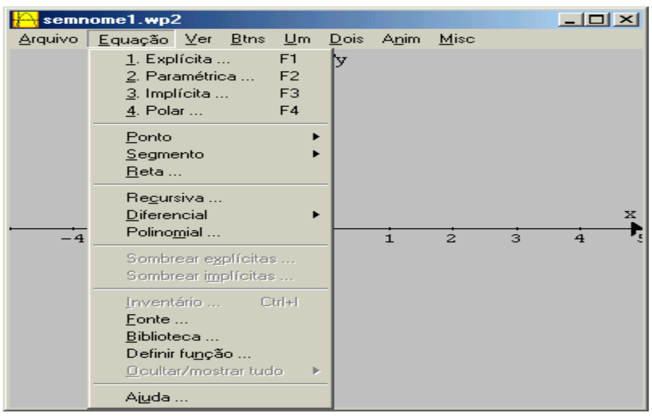


Clique (uma vez) no botão Janela e surgirá uma coluna com as opções 2-dim ou 3-dim (gráficos em duas dimensões e três dimensões):



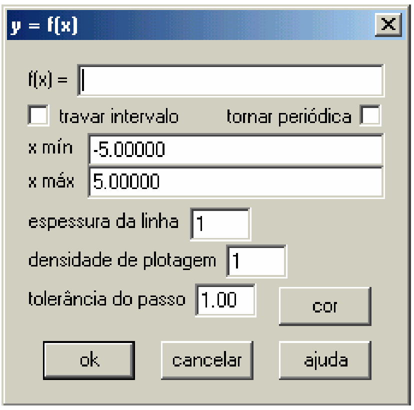
4.1.2 Construindo gráficos

Uma vez escolhida a dimensão do gráfico que se pretende "plotar" (duas dimensões ou três dimensões), clique no botão Equação para introduzir uma equação nova:



Clique no botão 

e surgirá a caixa abaixo:



Na janela acima, digite no espaço 

a função desejada e dê *enter*, para visualizar o traçado do gráfico.

Para a construção e visualização das curvas de nível, consultar o Roteiro do Professor-Pesquisador no Apêndice (8.2).

5 Atividades

Descreveremos os pontos mais relevantes nos quesitos das atividades (Atividades 1 e 2, ver no Apêndice (8.1)). Eles serão apresentados na seguinte ordem: recursos utilizados, questão, objetivo da questão e comentários/sugestões. A descrição completa das atividades, assim como o seu processo de elaboração e análise, encontra-se na íntegra na dissertação de mestrado.

5.1 Atividade - 1

Esta atividade foi elaborada com 7 (sete) questões, construídas com base nos conceitos da teoria da aprendizagem significativa, com o objetivo de induzir o aprendiz a refletir, conjecturar e construir gráficos de funções reais de duas variáveis (superfícies), a partir de conteúdos matemáticos – gráficos do IR^2, cônicas, expressões analíticas, funções – e dos conhecimentos prévios do IR^2. Em busca desse objetivo, procuramos identificar os subsunçores existentes na estrutura cognitiva do aprendiz e os aspectos ligados ao seu cotidiano e vivência fora do ambiente escolar, para a ocorrência da aprendizagem significativa.

As questões iniciais da Atividade – 1 abordaram os conteúdos matemáticos sobre a construção no plano cartesiano, cujas expressões foram: $y = x^2$, $y = 3$ e $x = y^2$ e, depois, buscou-se estabelecer uma conexão dos conhecimentos utilizados na construção desses gráficos com as superfícies em IR^3 ($z = x^2$, $z = y^2$, $z = x$ e outros). Essa atividade constou também de perguntas abertas sobre características específicas do IR^2 e do IR^3, como: ausências de variáveis nas expressões analíticas, translação, rotação de eixos e propriedades usadas nas representações gráficas das expressões algébricas citadas.

Recursos Utilizados:

Lápis, papel, atividade impressa, *software* Winplot e calculadoras.

Questão – 1: *Faça os esboços dos gráficos das equações $y = x^2$ e de $y = 3$, no plano cartesiano.*

a) Quais são as variáveis (dependentes e independentes) existentes na ***equação $y = x^2$*** *?*
Dependentes: ______________
Independentes: _____________

b) Quais são as variáveis (dependentes e independentes) existentes na ***equação $y = 3$****?*
Dependentes: ______________
Independentes: _____________

c) Que valores a variável x assumiu no traçado do gráfico da equação $y = 3$?

d) Qual(ais) a(s) influência(s) da variável x no traçado do gráfico da equação $y = 3$?

Neste quesito, foi pedido o esboço dos gráficos correspondentes às equações $y = x^2$ e $y = 3$ no plano cartesiano. Posteriormente, com base nesses gráficos, os aprendizes responderam às letras a, b, c e d que tratavam das variáveis dependentes e independentes das equações e da ausência de variáveis na equação.

Objetivo da questão: Identificar os subsunçores/conhecimentos prévios dos estudantes sobre a construção de gráficos no IR^2 e, ainda, compreender as relações e ausências de variáveis, identificando-as, tanto no gráfico quanto nas equações.

Comentários/Sugestões: Apesar da maioria dos alunos ter feito os esboços corretamente, alguns deles tiveram dificuldade na identificação da existência e influência da variável x no gráfico da equação $y = 3$. Por exemplo, na resposta de Gláucia observamos uma interpretação oriunda do esboço do seu próprio gráfico, pois a estudante traçou o gráfico de y = 3, sob o domínio de $x \geq 0$; assim, consequentemente, respondeu que os valores que x assumiria eram maiores que 0. Outra resposta foi x = 0 (Walda). Tiana explicou que: "*Independente do valor escolhido para a variável x, o valor de y sempre será 3*". E, por fim, a resposta de Cláudia: "*A variável x poderá assumir qualquer valor; o valor de y independe do valor de x, tem valor igual a 3.*" Sugerimos que utilizem outras equações do tipo y = b ou x = b, com $b \in IR$ e questionem os alunos sobre o significado da variável que se apresenta oculta nas expressões analíticas (por exemplo, o x em y = 3 ou y em x = 7) apresentar ou não alguma "influência" no traçado do gráfico dessas equações.

Questão – 2: *Os gráficos traçados na questão anterior foram feitos num espaço:*

a) ( ) Bidimensional
b) ( ) Tridimensional
*c) ( ) Outros (justifique sua resposta)*______________________________

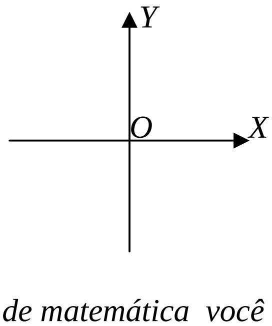
Nesta questão, os aprendizes escolhiam dentre algumas opções – bidimensional, tridimensional ou outras – qual delas representava os gráficos construídos na questão anterior (1ª questão).

Objetivo da questão: Construir nos aprendizes um pensamento sobre a existência de gráficos em três dimensões, além de promover uma revisão dos conhecimentos e conteúdos do IR^2 (bidimensional).

Comentários/Sugestões: Todos acertaram esta questão, assinalando que os gráficos da primeira questão foram construídos num espaço bidimensional.

Questão – 3: *Com base na análise das equações:* $\boldsymbol{y = x^2}$ *e* $\boldsymbol{x = y^2}$*, responda às questões abaixo:*

a) Faça um esboço dos gráficos destas equações no mesmo sistema de coordenadas cartesianas xOy:



b) Quais conteúdos de matemática você utilizou ao traçar os gráficos no item anterior?

c) Identifique as diferenças entre os gráficos.

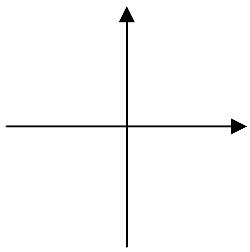
Na **letra a**, foi pedido aos estudantes o esboço dos gráficos das equações $y = x^2$ e $x = y^2$, no mesmo sistema de coordenadas xOy. Na **letra b,** perguntamos quais os conteúdos matemáticos que eles utilizaram para traçar os gráficos da **letra a**. E na **letra c**, pedimos a identificação das diferenças entre os dois gráficos.

Objetivo da questão: Investigar os conhecimentos dos aprendizes na construção de gráficos, quando modificadas as relações de dependência entre as variáveis, e também identificar os conhecimentos prévios/subsunçores utilizados na construção desses gráficos.

Comentários/Sugestões: Para alguns alunos, a questão serviu para eles identificarem as variáveis dependentes e independentes das expressões citadas, por exemplo, a aprendiz Tiana respondeu que "n*o gráfico $y = x^2$, y é a variável dependente, enquanto x é a variável independente (...) no gráfico $x = y^2$, x é a variável dependente, enquanto y é a variável independente*". Essa questão serviu para mostrar as dificuldades dos alunos sobre gráficos de funções, em que a variável dependente é diferente de y, isto é, $x = y^2$.

Questão – 4: *Considere um plano cartesiano, com o eixo y trocado pelo eixo z, e a equação $y = x^2$ trocada por $z = x^2$.*

a) Faça um esboço do gráfico $z = x^2$ no sistema de coordenadas retangulares abaixo, identificando as variáveis x e z nos eixos.



b) Com essa troca de variável, houve alguma mudança no traçado do gráfico? Justifique a sua resposta.

Para a **letra a,** pedimos um esboço para o gráfico da equação $z = x^2$, no plano cartesiano, nomeando os eixos. Para a **letra b,** perguntamos aos estudantes se houve alguma mudança no traçado do gráfico de $z = x^2$, a partir da troca da variável z pela variável y, em relação à equação $y = x^2$.

Objetivo da questão: Para as **letras a** e **b,** esperava-se que os aprendizes, com base no gráfico de $y = x^2$ num sistema de coordenadas retangulares, construíssem o gráfico de $z = x^2$ num plano cartesiano, identificando os seus eixos e percebendo a mudança da variável z dessa equação, em relação à variável y do gráfico de $y = x^2$.

Comentários/Sugestões: A questão cumpriu com o seu objetivo, exceto uma aluna (Walda) esboçou o gráfico incorretamente, gerando consequentemente uma interpretação errada. (Acreditamos que a construção abaixo, feita pela aluna, seja oriunda do mesmo raciocínio utilizado pela estudante para a construção do gráfico de $x = y^2$ na questão anterior).

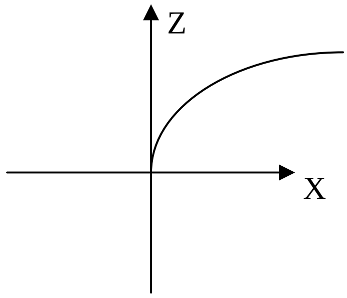
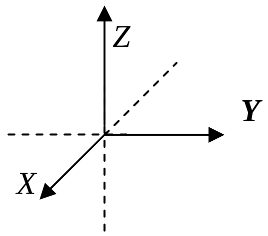


Figura 1 – Esboço do gráfico, da estudante Walda, referente à expressão $z = x^2$.

Questão – 5: *Que diferenças você percebe entre gráficos traçados em espaços bidimensionais (sistema de coordenadas x e y) daqueles traçados em espaços tridimensionais (sistema de coordenadas x, y e z).*
Exemplifique.

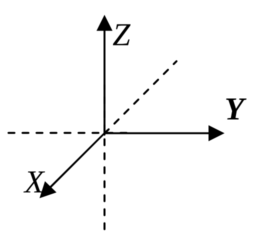
a) É possível traçar gráficos de equações envolvendo apenas duas variáveis em espaços tridimensionais? Justifique e exemplifique.

b) Quais são as diferenças entre os gráficos das equações $z = x^2$ e $z = y^2$, traçados num mesmo sistema tridimensional? Faça um esboço dessas duas equações no mesmo sistema de eixos dado abaixo.



c) A ausência da variável y na equação $z = x^2$ [respectivamente, ausência de x em $z = y^2$] teve alguma influência no traçado do gráfico? Justifique.

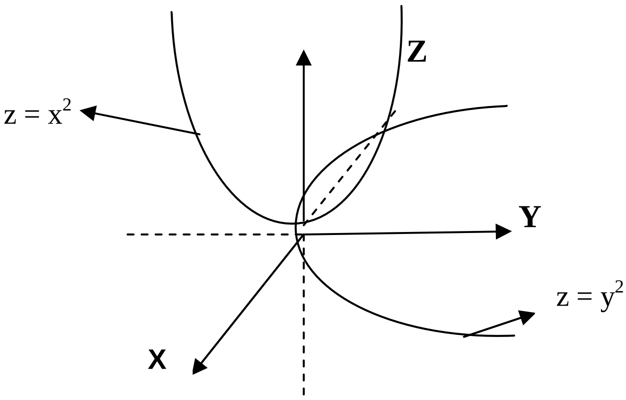
d) Agora tente esboçar o gráfico da equação $z = x^2 + y^2$ no sistema de coordenadas x, y, z. Os itens anteriores serviram para auxiliar na construção deste gráfico? De que forma?



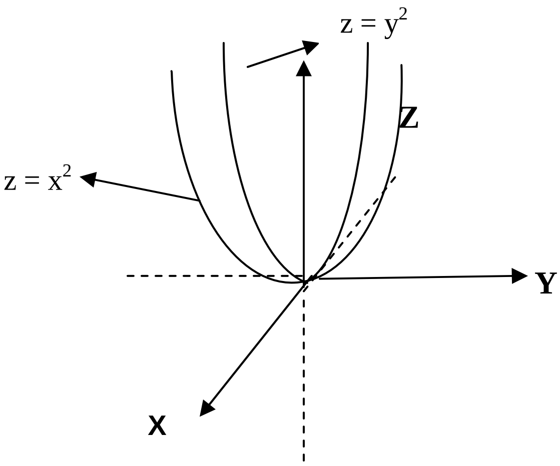
Perguntamos aos aprendizes sobre as diferenças percebidas por eles entre gráficos traçados em espaços bidimensionais e gráficos traçados em espaços tridimensionais. Para a **letra a,** indagamos a possibilidade de traçar gráficos de equações com duas variáveis, em espaços tridimensionais. Na **letra b,** oferecemos um sistema de eixo tridimensional e pedimos aos estudantes os esboços dos gráficos de $z = x^2$ e de $z = y^2$, identificando as possíveis diferenças entre eles. Para a **letra c,** perguntamos se a ausência da variável y, na equação $z = x^2$, e da variável x, na equação $z = y^2$, influenciariam no traçado do gráfico dessas equações em IR^3. Na **letra d,** pedimos o esboço do gráfico de $z = x^2 + y^2$ e indagamos se os itens anteriores desta questão os auxiliaram na construção e traçado deste gráfico.

Objetivo da questão: Esta questão evidencia as relações e os objetivos de nosso estudo, para o ensino de Cálculo com a teoria da aprendizagem significativa, pois em todas as letras da questão foi pedida, aos aprendizes, uma justificativa das ideias utilizadas por eles como respostas dos quesitos. Contudo, o intuito foi compreender as possíveis relações, estabelecidas pelos estudantes, nos conhecimentos e analogias do IR^2 com o IR^3. A **letra c** exemplifica tal fato: indiretamente, esperávamos que os alunos utilizassem conhecimentos prévios/subsunçores possivelmente existentes nas ausências de variáveis em IR^2 e os relacionassem com o IR^3 , ou seja, na primeira questão, a ausência de x em $y = 3$, em IR^2, pudesse ser usada como analogia para a ausência da variável y em $z = x^2$, em IR^3. Com base nas equações $z = x^2$ e $z = y^2$, esperávamos, para a **letra d,** que os estudantes fizessem a composição dessas equações e conseguissem sozinhos deduzir ou abstrair o traçado gráfico de $z = x^2 + y^2$.

Comentários/Sugestões: Alguns alunos tiveram dificuldades em imaginar e abstrair os gráficos em IR^3, pois a maioria deles desenhou gráficos de funções reais de uma variável (IR^2), e os representou em um sistema com três eixos (funções reais de duas variáveis - IR^3), ou seja, para os esboços dos gráficos das equações $z = x^2$ e $z = y^2$, num mesmo sistema de eixos, os aprendizes acreditavam que esses gráficos constituíam parábolas desenhadas em planos diferentes, porém, justificaram seus traçados de diversas maneiras, por exemplo, a resposta de Dago foi: "*A equação $z = x^2$ é traçada no gráfico, no plano zOx. A equação $z = y^2$ é traçada no gráfico, no plano zOy. Logo, os gráficos estão traçados em planos diferentes*". Já Raíssa, embora dando uma justificativa igual à de Dago – planos diferentes – apresentou um outro esboço. Seguem, abaixo, os esboços feitos por eles:



Esboço de Raíssa



Esboço de Dago

Figura 2 – Esboços gráficos dos estudantes Raíssa e Dago.

Para Gláucia, o traçado dos gráficos foi coincidente, como vemos abaixo:

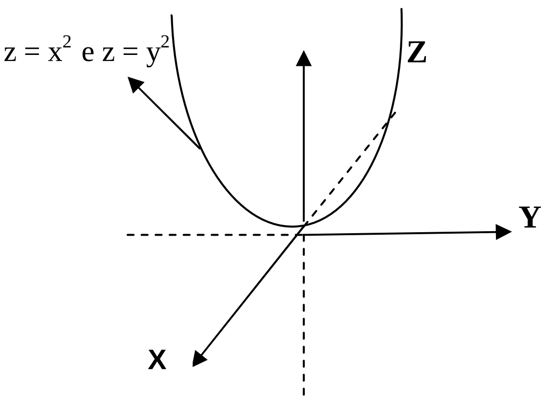


Figura 3 – Esboço gráfico da estudante Gláucia.

Os demais estudantes responderam de forma análoga a Dago e Raíssa. Na letra d pedia o gráfico de $z = x^2 + y^2$ dois alunos (Tiana e Gilberto) – que esboçaram, na letra c, os gráficos de $z = x^2$ e de $z = y^2$ análogo a Dago – fizeram corretamente o desenho do gráfico $z = x^2 + y^2$ (paraboloide) pedido, apesar de que, na justificativa, responderam que não tinham certeza do gráfico construído, mas salientaram que os itens e questões anteriores os auxiliaram no esboço e na construção do paraboloide, como vemos em suas justificativas: "*Na verdade não sei se está certo, eles* [itens, questões anteriores] *me ajudaram a deduzir um possível gráfico, mas não sei se está correto*" (Gilberto). "*Sim. Agrupando as informações anteriores, tornou-se mais fácil entender o que ocorreria nesta situação*" (Tiana).

Tendo em vista que dos 11 aprendizes participantes apenas dois deles (Tiana e Gilberto) conseguiram, por meio de conhecimentos prévios e das questões anteriores, esboçar corretamente o gráfico de $z = x^2 + y^2$, sugerimos a utilização de mais expressões analíticas com diversas superfícies com formas variadas e que o professor utilize exemplos de sólidos – objetos tridimensionais – para esclarecer e dar significado às ideias dos aprendizes nas construções das superfícies e gráficos em IR^3.

Questão – 6: *Você já utilizou algum software para a construção de gráficos matemáticos? Quais?*

Questão – 7: Em *sua opinião, o computador pode contribuir no aprendizado de matemática? De que maneira?*

Objetivo das questões (referente às questões 6 e 7): Estas questões, de cunho mais investigativo e qualitativo, tiveram como objetivo conhecer um pouco a utilização de TI pelos aprendizes participantes, diagnosticando os tipos de *software* usados por eles, assim como as facilidades de manuseio e as possíveis contribuições de mídias para o estudo de Matemática.

Comentários/Sugestões: Todos os aprendizes participantes disseram que o computador auxiliaria a aprendizagem de Matemática, principalmente nas questões que permitissem a utilização da visualização, através do computador, a fim de obter uma melhor compreensão gráfica de funções. Exemplifiquemos com as respostas das estudantes Claúdia e Tiana: "*Bastante. Porque ajuda na representação de gráficos, figuras em 3D. Podemos rotacioná-las* [girá-las], *ampliar nossa visão tridimensional, melhorar a capacidade de abstração através de imagens concretas que ficarão armazenadas no cérebro*" (Claúdia).

"*Sim. Os computadores são recursos visuais que auxiliam em casos onde seria difícil visualizar mentalmente determinadas propriedades geométricas. Além disso, a eficiência nos desenhos é melhor no computador*" (Tiana).

5.2 Atividade - 2

O objetivo da Atividade – 2 foi o de avaliar os trabalhos realizados no laboratório, durante a Atividade – 1, dando continuidade à construção e interpretação de gráficos e superfícies no IR^3. Esta atividade, também de cunho investigativo, procurou compreender as relações entre os aspectos da teoria da aprendizagem significativa, servindo como avaliação para a elaboração de novos roteiros e/ou aprimoramento do que foi utilizado na pesquisa.

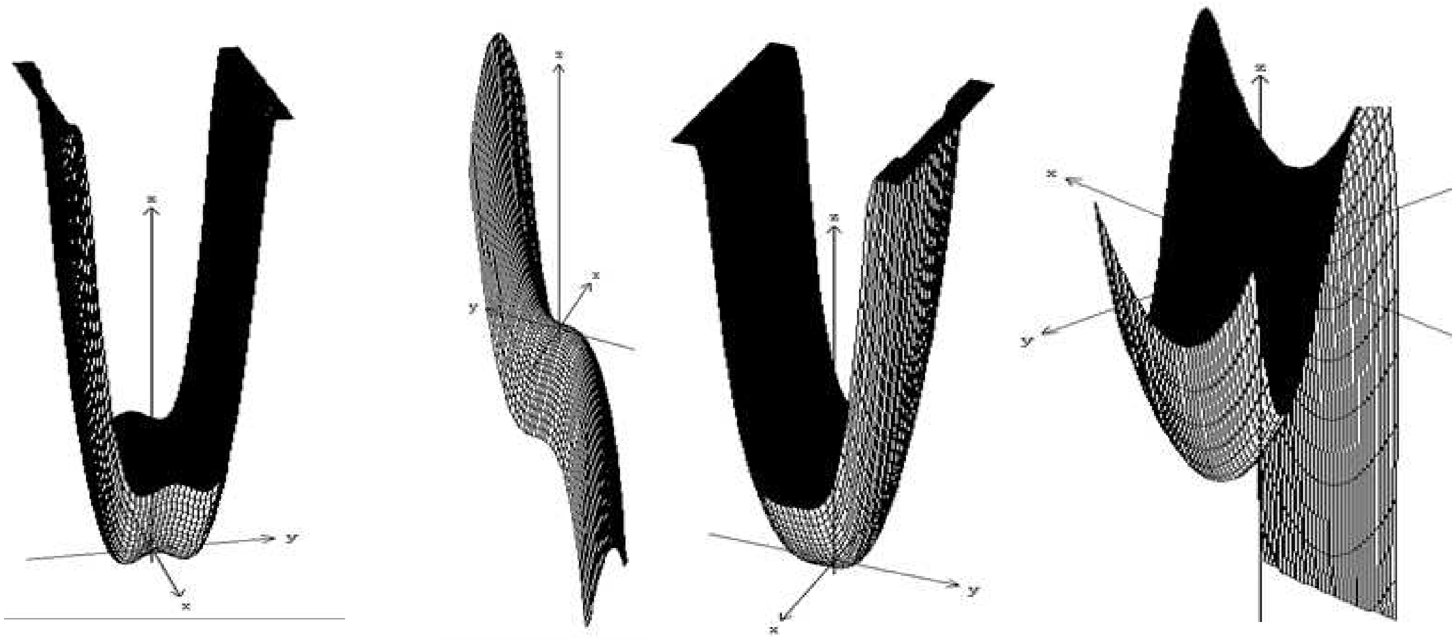
Recursos Utilizados:

Lápis, papel, atividade impressa.

Questão – 1: *Associe cada função ao seu gráfico nas figuras abaixo*

A. $f(x, y) = y^3 - x^2$
B. $f(x, y) = y^4 + x^2$
C. $f(x, y) = y^4 + x^2 - 2y^2$
D. $f(x, y) = 2y^3 - 3y^2 - 12y + x^2$

(**C**) (**A**) (**B**) (**D**)



A questão relaciona expressões analíticas a superfícies (dadas 4 superfícies e 4 expressões analíticas, divididas em letras A, B, C e D), ou seja, os estudantes tiveram que associar cada expressão analítica à sua superfície correspondente.

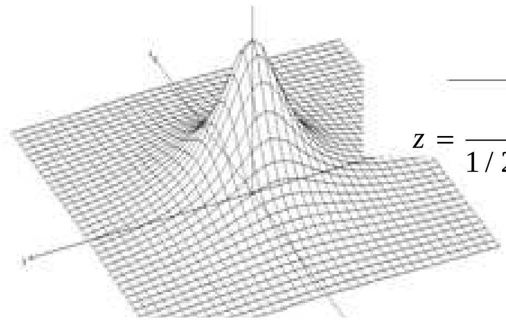
Objetivo da questão: Verificar a contribuição das atividades realizadas no laboratório pelos estudantes sobre a compreensão de determinadas superfícies do IR^3, e das relações existentes entre elas e suas expressões analíticas correspondentes.

Comentários/Sugestões: Em relação a esta questão os estudantes tiveram um bom rendimento, associando corretamente as letras A e D, porém, alguns apresentaram erros nas expressões analíticas das letras B e C, talvez por elas apresentarem, em suas expressões e superfícies, formas bastante parecidas. Sugerimos que o professor utilize expressões analíticas com termos polinomiais bem parecidos, modificando apenas os sinais, coeficientes numéricos ou grau do polinômio. Veja, no quadro abaixo, os acertos (x) dos estudantes referentes a esta questão.

Aprendizes / Letras	A	B	C	D
Rose				X
Fabiane	X	X		
Dago	X			
Walda	X			
Sara	X			X
Claúdia	X			X
Cristian	X			X
Gláucia	X			X
Gilberto	X			X
Raíssa	X	X	X	X
Tiana	X	X	X	X

X – acertos dos aprendizes

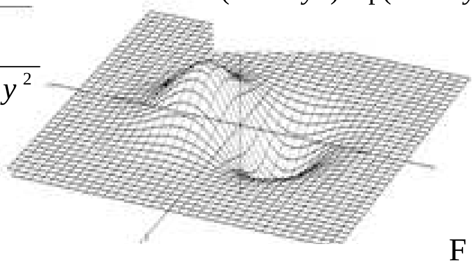
Questão – 2: *Associe cada superfície às suas curvas nível:*



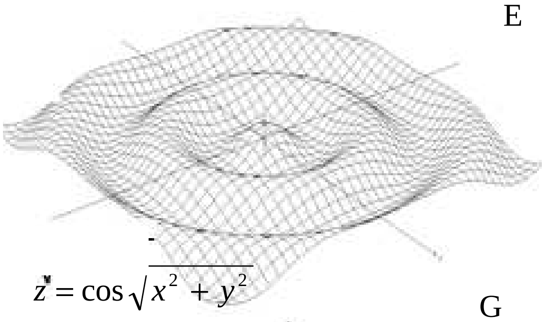
$$z = \frac{1}{1/2 + x^2 + y^2}$$

E

$$z = 3(x^2 + 3y^2)\exp(-x^2 - y^2)$$

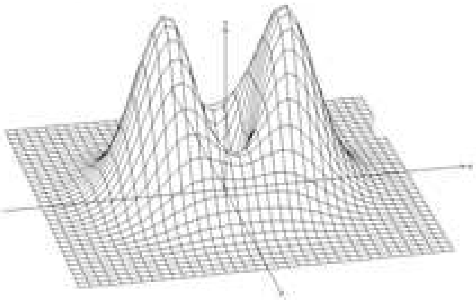


F



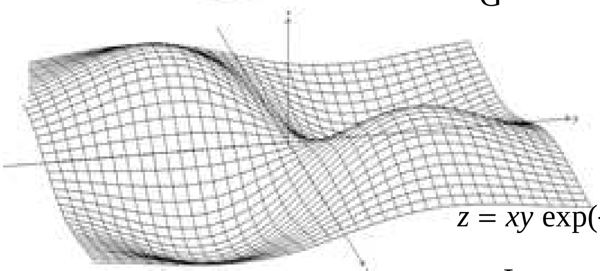
$$z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$$

G



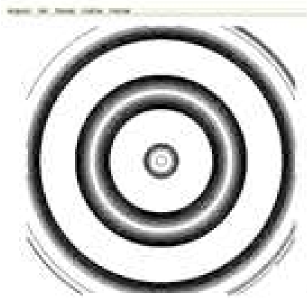
H

$$z = x\exp(-x^2 - y^2)$$

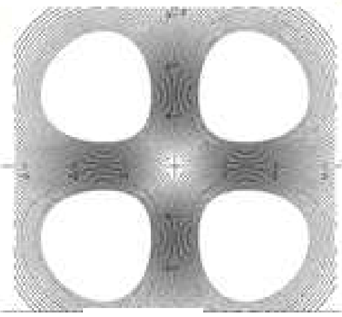


$$z = xy\exp(-1/4(x^2 + y^2))$$

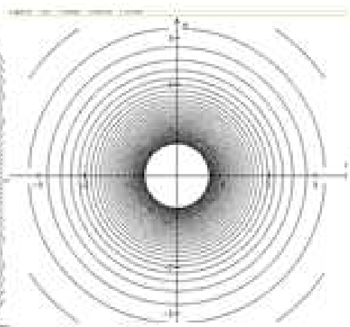
I



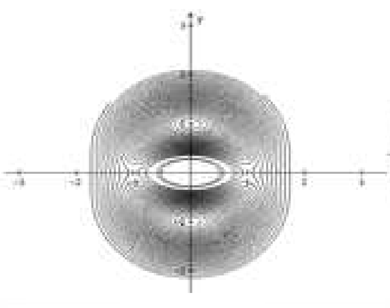
(G)



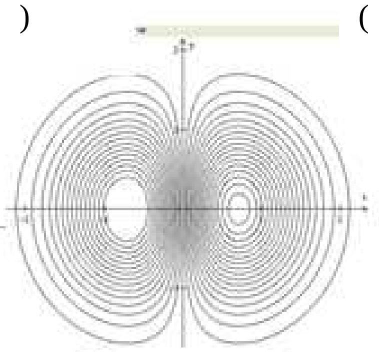
(I)



(E)



(H)



(F)

Nesta questão, análoga à questão 1, pedimos aos estudantes que fizessem as associações das superfícies e expressões analíticas, nomeadas de E, F, G, H e I com as suas curvas de nível correspondentes (ver Apêndice (8.1) ou na dissertação).

Objetivo da questão: Perceber a contribuição das atividades realizadas no laboratório pelos estudantes a compreensão de algumas superfícies do IR^3 e suas curvas de nível, e as relações existentes destas com as suas respectivas expressões analíticas.

Comentários/Sugestões: Os comentários desta questão são análogos aos da 1ª questão; atento para as respostas dos estudantes nas letras F e H (letras que apresentavam o formato das superfícies e curvas de nível bastante parecidas). Com base nisso, sugerimos também ao professor utilizar superfícies e curvas de nível com formas parecidas, com o intuito de levar o aprendiz a pensar e a deduzir possibilidades para a sua aprendizagem, nas diferenças e peculiaridades entre elas. Veja, no quadro abaixo, os acertos (x) dos estudantes referentes a esta questão.

Aprendizes / Letras	E	F	G	H	I
Fabiane					
Sara		X	X		
Rose	X				
Raíssa	X		X		X
Gláucia	X		X		X
Gilberto	X		X		X
Walda	X	X	X	X	X
Tiana	X	X	X	X	X
Claúdia	X	X	X	X	X
Cristian	X	X	X	X	X
Dago	X	X	X	X	X

X – acertos dos aprendizes

Questão – 3: *Houve contribuições para o seu entendimento de matemática nas atividades realizadas com o software Winplot ? Caso afirmativo descreva.*

Questão – 4: *Descreva as suas ideias, pensamentos e estratégias ao responder às questões 1 e 2 desta atividade.*

Questão – 5: *Em relação à visualização dos gráficos do R^3 e das curvas de nível no software Winplot, você acredita que a atividade contribuiu para a sua aprendizagem de forma:*

( ) acima das expectativas
( ) muito boa
( ) boa
( ) regular
( ) ruim
( ) desnecessária

Questão – 6: *Justifique a sua escolha na questão anterior.*

Questão – 7: *Espaço livre para sugerir, criticar, opinar, etc. a respeito das atividades desenvolvidas.*

Objetivo das questões (referente às questões 3 a 7): Saber a opinião dos estudantes sobre as possíveis contribuições que o *software* Winplot proporcionou às atividades e à compreensão dos conteúdos matemáticos estudados; buscar, através das respostas dos aprendizes, nos quesitos 1 e 2 da atividade a compreensão de algumas ideias, pensamentos, conhecimentos prévios/subsunçores utilizados pelos estudantes no momento de realização da atividade; avaliar, na concepção do aprendiz participante, a validação das Atividades 1 e 2, auxiliadas pelo *software* Winplot, na compreensão e estudos de gráficos em IR^3; avaliar a pesquisa, os objetivos das atividades, as abordagens pedagógicas utilizadas em sala de aula e no laboratório, visando uma aprendizagem significativa para os estudantes; sugerir futuras pesquisas que venham a utilizar os nossos resultados de pesquisa como referência.

Comentários/Sugestões: Algumas respostas dos aprendizes:

"Faz com que compreendêssemos e não apenas aceitássemos" (Raíssa).

"Não tinha conhecimento em curva de nível e gráficos no IR^3, e o aprendizado foi muito importante" (Sara).

"Como tenho dificuldade em enxergar [visualizar, perceber] *gráficos, me ajudou muito visualizar; logo, o Winplot ajudou bastante o entendimento"* (Dago).

“Acredito que a questão do comportamento do gráfico e a relação entre as variáveis, principalmente as implícitas, deram outra perspectiva para mim, no significado de funções” (Gilberto).

“Em minha opinião, a atividade foi muito rica, pois ajudou a aperfeiçoar o conhecimento sobre funções que já possuíamos e, sem dúvida, nos preparou para os novos conceitos que iremos aprender no Cálculo II e III. Com essa atividade, eu passei a acreditar ainda mais na potencialidade da Informática na educação” (Tiana).

“Achei muito interessante, não cansativa, muito esclarecedora e muito importante para mim; me esclareceu dúvidas que eu tinha sobre gráficos. Muito Legal!” (Sara).

“A atividade deveria ser incentivada para TODAS as turmas de Cálculo II” (Raíssa).

“Foi muito bom, espero que outros mestrandos, professores e alunos façam atividades parecidas. Muito obrigado!” (Gilberto).

“A atividade foi ótima, muito interativa. Nada a reclamar, a não ser por se realizar na parte da tarde de sábado. Fora isso, já estou com o programa em casa. Muito bom mesmo!” (Dago).

De acordo com as respostas dos aprendizes a essas questões, pudemos dizer que as atividades desenvolvidas podem favorecer a aprendizagem dos conteúdos de funções e construções de gráficos em IR^2 e IR^3, com uma valiosa contribuição do *software* Winplot.

Assim, acreditamos nas representações de modelos matemáticos, em simulações e visualizações gráficas por computadores para a aprendizagem de conteúdos de Cálculo, como a construção de gráficos de funções, e, em particular, as construções e representações de superfícies em IR^3.

6 Sugestões de Leituras

6.1 Teoria da aprendizagem significativa

• AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro: Interamericana. Tradução, para o português, de Eva Nick et al., da segunda edição de *Educational psychology: a cognitive view (1968).* 1980.

O livro apresenta a teoria da aprendizagem significativa ausubeliana desde a sua perspectiva original, por David Ausubel, até as contribuições posteriores de Joseph Novak e Hanesian. Esses autores foram fundamentais na implementação de exemplos para a compreensão da teoria. Recomendamos o livro como principal referência da teoria da aprendizagem significativa, e no caso de consulta a conceitos e significados da teoria. O livro oferece facilidade de leitura, pois é uma versão traduzida para o português do original escrito por Ausubel.

• MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006. 186p.

Este livro apresenta de forma simples meios para a implementação da teoria da aprendizagem significativa em sala de aula, auxiliando aos professores e pesquisadores na busca de referenciais teóricos para estudos em sala de aula e no desenvolvimento de materiais instrucionais. O livro esclarece o que é aprendizagem significativa e quais as condições para que ela ocorra; sugere estratégias facilitadoras de ensino – os mapas conceituais, os diagramas de V e os organizadores prévios –, e ainda serve como modelo para a organização do ensino à luz dessa teoria.

• MASINI; Elcie F. Salzano; MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa: Condições para a ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos**. 1. ed. São Paulo: Vetor, 2008.

Este livro propõe uma reflexão sobre o aprender que propicia ao ser humano o uso de sua capacidade de compreender e elaborar ou, em outras palavras, aprender com significados. O livro traz uma coletânea de artigos com diversos autores e em áreas diferenciadas sobre a aprendizagem significativa. A parceria dos dois autores brasileiros – organizadores do livro – ofereceu uma discussão rica nas questões referentes às lacunas e aos comprometimentos do aprender com exemplos em diferentes áreas de pesquisa. Segundo eles, o livro terá atingido seu objetivo "*se alertar para a importância das condições oferecidas para que ocorra o* *aprender com significado e realizado sua meta central se ficar evidenciado que, para dimensionar comprometimentos no desenvolvimento da aprendizagem, é indispensável uma análise cuidadosa das lacunas nas condições requeridas para esse aprender*".

6.2 O pensamento matemático avançado

• TALL, David. O. **Advanced Mathematical Thinking**. London: Kluwer Academic Publishers, 1991a. 289p.

O livro apresenta um grupo de pesquisadores comprometidos com o pensamento matemático avançado, ou seja, preocupado com a introdução de definições formais e dedução lógica nos conteúdos de matemática. Os artigos apresentados tratam de uma transição do ensino da matemática elementar (geometria, aritmética, álgebra) ao pensamento matemático avançado (prova axiomática) na universidade. Assim, o livro apresenta vários artigos que abordam temas referentes ao pensamento matemático avançado nas questões que vão desde o intuitivo, dedutivo/lógico ao formalismo e rigor matemáticos.

• VINNER, Shlomo. *O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática.* Tradução Márcia Pinto e Jussara Araújo. In: TALL, D. **The Role of Definitios in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. cap. 5, 1991. p. 65-81.

Este artigo é um capitulo do livro *Advanced Mathematical Thinking***,** citado anteriormente, que aborda dois conceitos **–** **imagem conceitual** e **definição conceitual –** importantes do pensamento matemático avançado. Esses temas passam por questões de visualização e formalização de conceitos. O autor discute questões de ordem cognitivas do ser que aprende, relacionadas a uma aprendizagem por processo mental, perceptivo e verbal.

6.3 O pensamento visual-espacial

• COSTA, Maria da Conceição Monteiro da. **Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade**. 2005. Tese (Doutorado) – Universidade Nova de Lisboa, Lisboa. 314p.

O estudo abordado nesta pesquisa envolveu a construção de um modelo teórico, baseado no pensamento visual-espacial. A autora constrói quatro modos de pensamento neste modelo: modo resultante da percepção, modo resultante da manipulação mental de imagens, modo resultante da construção mental de relações entre imagens e modo resultante da exteriorização do pensamento (que inclui metáforas e gestos). Para cada modo de pensamento foram explicitados processos de pensamento específicos. Sugerimos a leitura desta tese, pois as considerações da autora dão uma verdadeira compreensão dos modos determinados por ela e dos significados do pensamento visual-espacial.

• FROTA, Maria Clara Rezende; COUY, Laís. *Estratégias para o Ensino-Aprendizagem de Funções com um Foco no Pensamento Visual.* In: **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (IV SIPEM)**, GT-04, em Brasília-DF, 2009.

O artigo relata os resultados de uma pesquisa que teve o objetivo de investigar as potencialidades da utilização dos processos visuais para o estudo da variação de funções, e ao mesmo tempo, incentivar o desenvolvimento do pensamento visual no ensino de matemática. As autoras, com o objetivo de sugerir estratégias eficazes para o ensino-aprendizagem de funções nesta disciplina, e com base no modelo e modos do pensamento visual-espacial de Costa (2005), citado acima, reconstroem esse modelo teórico e o aplicam para o ensino de Cálculo. Este artigo serve para esclarecer uma das possibilidades do uso do pensamento-visual espacial para o ensino de Cálculo.

6.4 O ensino com tecnologias informáticas

• BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática** . Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 98p. (Coleção Tendências da Educação Matemática).

O livro apresenta uma tendência da educação matemática, por meio de exemplos no uso da informática com alunos e professores. Os autores debatem temas de políticas governamentais, questões epistemológicas e pedagógicas relacionadas à utilização de computadores e calculadoras gráficas em educação matemática. Ao ler o livro, o leitor poderá entender um pouco mais sobre as tecnologias informáticas utilizadas para o ensino de matemática e da educação matemática, e conhecer, em particular, a visão dos autores sobre este tema.

• MACHADO, Rosa Maria. **A Visualização na Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral no Ambiente Computacional MPP.** 2008. Tese (Doutorado) – Unicamp, Campinas. 289 p.

• BARBOSA, Sandra Malta. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.** 2009. Tese (Doutorado) – Unesp, Rio Claro, SP. 199 p.

Para o ensino de Cálculo com TI recomendamos a leitura dessas duas teses de doutorado, pois, além de serem trabalhos de pesquisa cientifica que envolvem o uso de TI com o ensino de Cálculo, apresentam-se bem elaboradas; com bastante esclarecimento sobre os temas; uma boa fundamentação teórica; uma descrição metodológica detalhada com fácil compreensão e leitura envolvente.

7 Referências Bibliográficas

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro, Interamericana. Tradução para português, de Eva Nick et al., da segunda edição de *Educational psychology: a cognitive view (1968).* 1980.

COSTA, Maria da Conceição Monteiro da. **Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade.** 2005. Tese (Doutorado) – Universidade Nova de Lisboa, Lisboa. 314p.

FROTA, Maria Clara Rezende; COUY, Laís. *Estratégias para o Ensino-Aprendizagem de Funções com um Foco no Pensamento Visual.* In: **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (IV SIPEM)**, GT-04, em Brasília-DF, 2009.

MACHADO, Rosa Maria. **A Visualização na Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral no Ambiente Computacional MPP.** 2008. Tese (Doutorado) – Unicamp, Campinas, SP. 289 p.

MASINI; Elcie F. Salzano; MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa: Condições para a ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos.** 1. ed. São Paulo: Vetor, 2008.

MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006. 186p.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Campinas: Unicamp, Tese (Doutorado) **–** Unicamp, Campinas, SP. 302 p.

TALL, David. O. **Advanced Mathematical Thinking**. London: kluwer Academic Publishers, 1991a. 289p.

______. **Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus**, *Visualization in Mathematics* (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. **19**, 105–119. 1991c. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991a-int-rigourmaa.pdf>. Acesso em: 14 out. 2009.

VINNER, Shlomo. *O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática.* Tradução Márcia Pinto e Jussara Araújo. In: TALL, D. **The Role of Definitios in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. cap. 5, 1991. p. 65-81.

8 Apêndice

8.1 Atividades

Atividade – 1

Nome:____

1) Faça os esboços dos gráficos das equações $y = x^2$ e de $y = 3$, no plano cartesiano.

a) Quais são as variáveis (dependentes e independentes) existentes na **equação** $\mathbf{y = x^2}$?

Dependentes: _______________

Independentes: ______________

b) Quais são as variáveis (dependentes e independentes) existentes na **equação** $\mathbf{y = 3}$?

Dependentes: _______________

Independentes: ______________

c) Que valores a variável *x* assumiu no traçado do gráfico da equação $y = 3$?

____

____

____

____

d) Qual(ais) a(s) influência(s) da variável *x* no traçado do gráfico da equação $y = 3$?

____

____

____

____

2) Os gráficos traçados na questão anterior foram feitos num espaço:

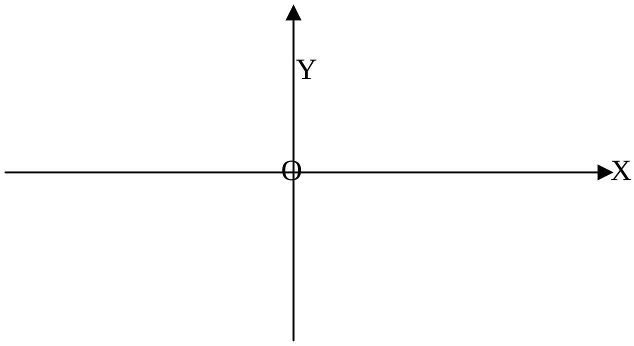
a) (   ) Bidimensional

b) (   ) Tridimensional

c) (   ) Outros (justifique sua resposta)________________________________

3) Com base na análise das equações: $\mathbf{y = x^2}$ e $\mathbf{x = y^2}$, responda as questões abaixo:

a) Faça um esboço dos gráficos destas equações no mesmo sistema de coordenadas cartesianas *xOy*:

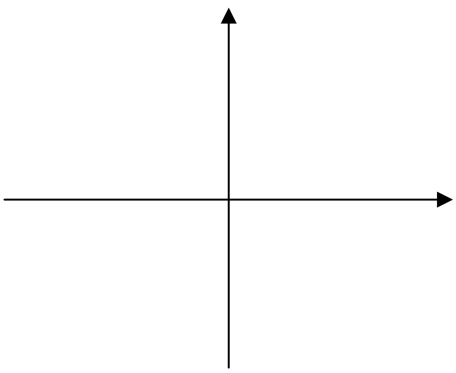


b) Quais conteúdos de matemática, você utilizou ao traçar os gráficos no item anterior?

c) Identifique as diferenças entre os gráficos.

4) Considere um plano cartesiano, com o eixo *y* trocado pelo eixo *z*, e a equação
$y = x^2$ trocada por $z = x^2$.

a) Faça um esboço do gráfico $z = x^2$ no sistema de coordenadas retangulares abaixo, identificando as variáveis *x* e *z* nos eixos.

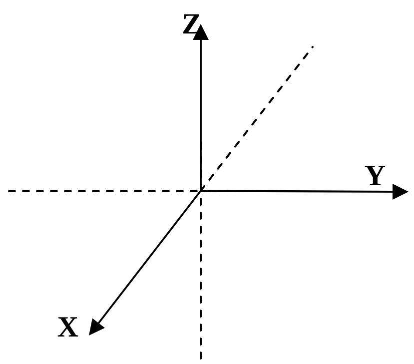


b) Com esta troca de variável, houve alguma mudança no traçado do gráfico? Justifique a sua resposta.

5) Que diferenças você percebe entre gráficos traçados em espaços bidimensionais (sistema de coordenadas x e y) daqueles traçados em espaços tridimensionais (sistema de coordenadas x, y e z)? Exemplifique

a) É possível traçar gráficos de equações envolvendo apenas duas variáveis em espaços tridimensionais? Justifique e exemplifique.

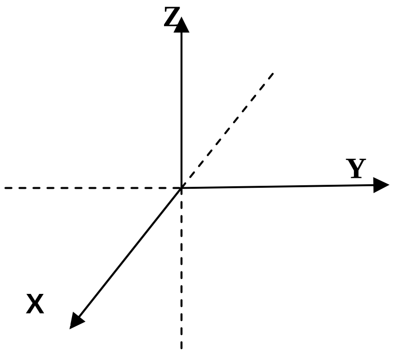
b) Quais são as diferenças entre os gráficos das equações $z = x^2$ e $z = y^2$, traçados num mesmo sistema tridimensional? Faça um esboço destas duas equações no mesmo sistema de eixos dado abaixo.



c) A ausência da variável y na equação $z = x^2$ [respectivamente, ausência de x em $z = y^2$] teve alguma influência no traçado do gráfico? Justifique.

____
____
____
____
____

d) Agora tente esboçar o gráfico da equação $z = x^2 + y^2$ no sistema de coordenadas x, y, z. Os itens anteriores serviram para te auxiliar na construção deste gráfico? De que forma?



____
____
____
____

6) Você já utilizou algum software para construção de gráficos matemáticos? Quais?

____
____
____
____

7) Na sua opinião o computador pode contribuir no aprendizado de matemática? De que maneira?

____
____
____
____

Atividade – 2

Nome:____

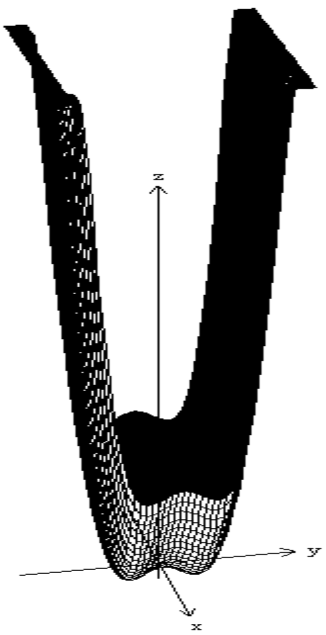
1) Associe cada função ao seu gráfico nas figuras abaixo:

A. $f(x,y) = y^3 - x^2$

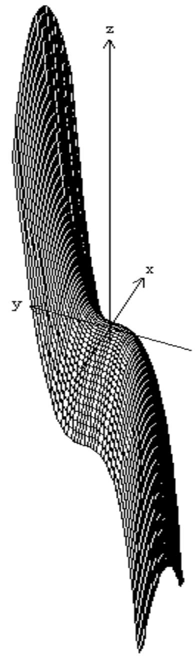
B. $f(x,y) = y^4 + x^2$

C. $f(x,y) = y^4 + x^2 - 2y^2$

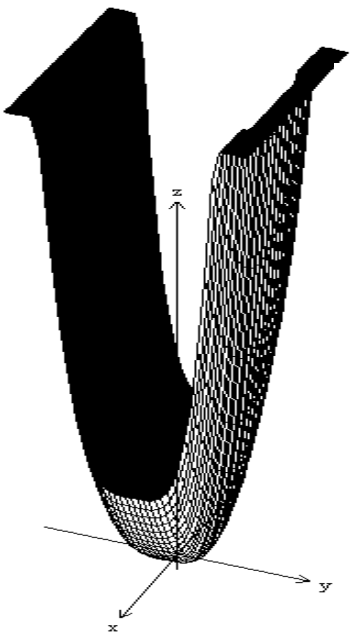
D. $f(x,y) = 2y^3 - 3y^2 - 12y + x^2$



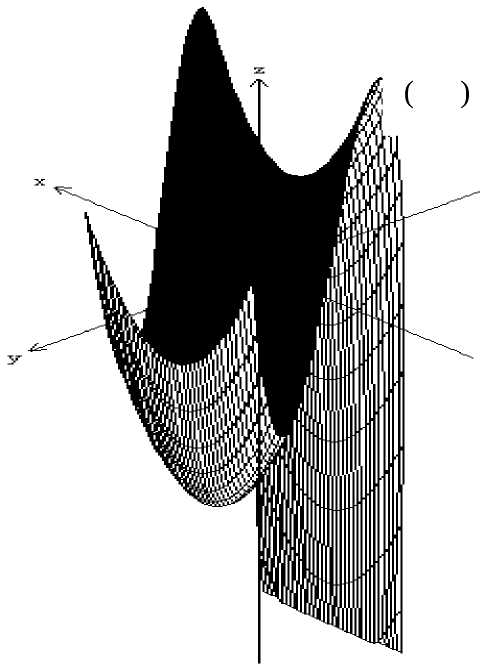
(   )



(   )

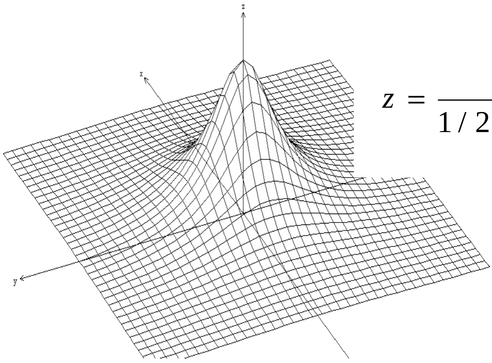


(   )



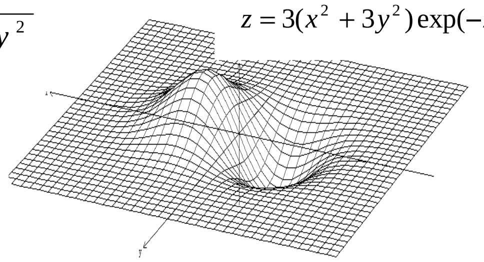
(   )

2) Associe cada superfície as suas curvas nível:



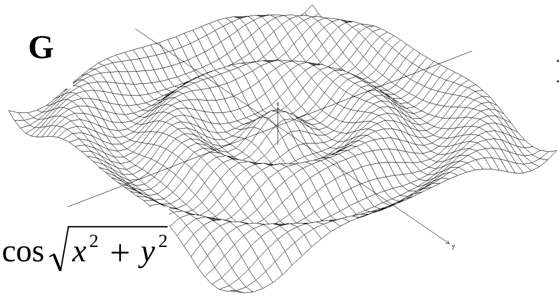
E

$$z = \frac{1}{1/2 + x^2 + y^2}$$



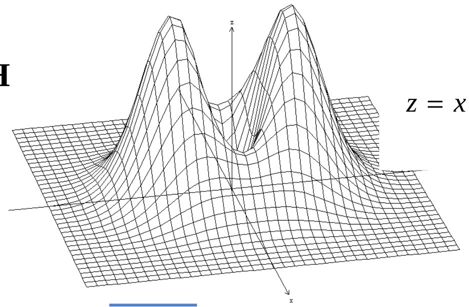
F

$$z = 3(x^2 + 3y^2)\exp(-x^2 - y^2)$$



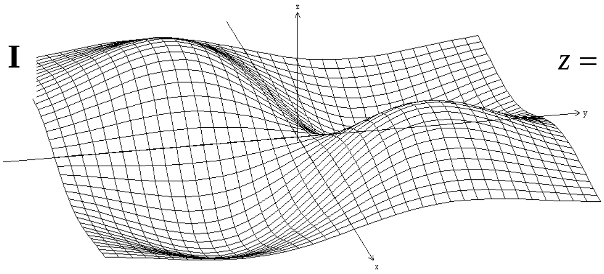
G

$$z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$$



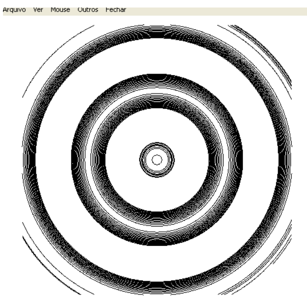
H

$$z = x\exp(-x^2 - y^2)$$

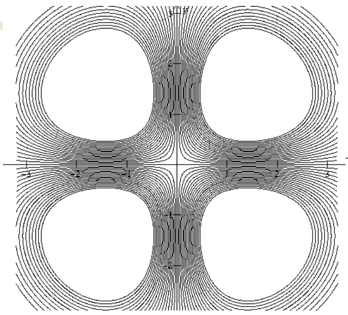


I

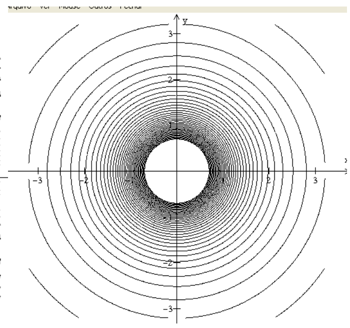
$$z = xy\,\exp(-1/4(x^2 + y^2))$$



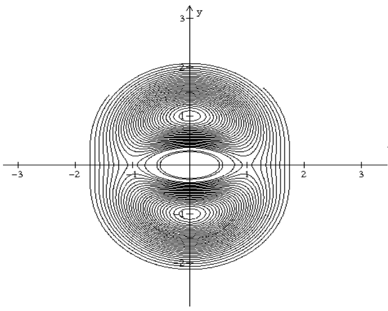
( )



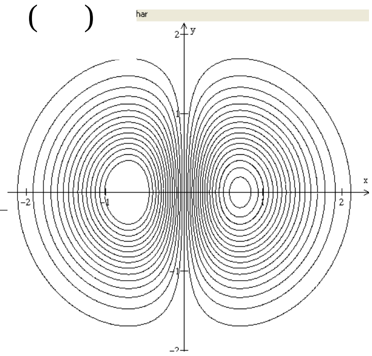
( )



( )



( )



( )

3) Houve contribuições para o seu entendimento de matemática nas atividades realizadas com o *software winplot* ? Caso afirmativo descreva.

____
____
____
____
____
____

4) Descreva as suas idéias, pensamentos e estratégias ao responder as questões 1 e 2 dessa atividade?

____
____
____
____
____
____

5) Em relação à visualização dos gráficos do R^3 e das curvas de nível no software "Winplot", você acredita que essa atividade contribuiu para a sua aprendizagem de forma:

( ) acima das expectativas
( ) muito boa
( ) boa
( ) regular
( ) ruim
( ) desnecessária

6) Justifique a sua escolha na questão anterior.

____
____
____
____
____

7) Espaço livre para *sugerir, criticar*, opinar, etc. a respeito das atividades desenvolvidas.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

8.2 Roteiro de atividades extras

Construções no R^2

Construção de Retas:

1º Passo: Apresentação do software aos alunos, e configuração da área de plotagem e apresentação de algumas ferramentas a se utilizar no software (*2-dim e 3-dim*).

2º Construção de gráficos em espaços bidimensionais, utilizando-se das ferramentas (*2-dim* $\Rightarrow$ *equação* $\Rightarrow$ *explicita*).

Obs: Informar da possibilidade na construção de gráficos usando equações implícitas, principalmente no caso da equação $x = y^2$.

2.1 Construir o gráfico da função y = x (escolher a cor, com espessura de traço igual a 2)[9].

2.2 Construir os gráficos das funções y = 2x, y = 0,5x (obs: altere as cores dos gráficos para diferenciá -los), mostrar as equações na tela plotada

2.3 Utilizar os gráficos anteriores mudando o sinal, através das ferramentas: (*equação* $\Rightarrow$ *inventario* $\Rightarrow$ *editar*).

3º Passo: Utilizando a ferramenta (*inventário* $\Rightarrow$ *gráfico*), oculte os gráficos das funções y = 2x, y = 0,5x.

3.1 Com a ferramenta (inventario $\Rightarrow$ editar), edite a equação y = x mudando para y = ax

3.2 Com as ferramentas (*anim* $\Rightarrow$ *parâmetros A – w*) movimente a barra de rolagem da janela *(valor usual de A*) para a direita e esquerda, observando o que ocorre na tela plotada em relação aos valores de A na caixa de ferramentas sobreposta a ela, depois clique na ferramenta *auto cíclico* ou *auto reverso*

3.3 Para salvar as construções, utilizem as ferramentas: (*arquivo* $\Rightarrow$ *salvar como*)

4º Passo: Construa o gráfico da função y = ax + b, e siga os passos de 3.2 alternando na janela para (*valores usuais de A e B*).

---

[9] O objetivo é destacar a função como padrão para posteriormente os alunos fazerem relações e comparações dela com as demais que serão construídas no mesmo sistema de coordenadas.

Construção de Parábolas:

1º Passo: Construção de gráficos em duas dimensões, utilizando as ferramentas (*2-dim* $\Rightarrow$ *equação* $\Rightarrow$ *explicita*).

1.1 Construir o gráfico da função $y = x^2$ [(PS: consultar a *biblioteca* do software, pois para x^2 digitar xx ou x^2) destaque a cor e a espessura com um traço igual a 2].

1.2 Construir os gráficos das funções $y = 2x^2$, $y = 0,5x^2$ (obs: altere as cores dos gráficos para diferenciá -los), mostrar as equações na tela plotada

1.3 Utilizar os gráficos anteriores mudando o sinal, através das ferramentas: (*equação* $\Rightarrow$ *inventario* $\Rightarrow$ *editar*).

2º Passo: Utilizando a ferramenta (*inventário* $\Rightarrow$ *gráfico*), oculte os gráficos das funções $y = 2x^2$, $y = 0,5x^2$.

2.1 Com a ferramenta (inventario $\Rightarrow$ editar), edite a equação $y = x^2$, mudando para $y = ax^2$

2.2 Com as ferramentas (*anim* $\Rightarrow$ *parâmetros A – w*) movimente a barra de rolagem da janela *(valor usual de A*) para a direita e esquerda, observando o que ocorre na tela plotada em relação aos valores de A na caixa de ferramentas sobreposta a ela, depois clique na ferramenta *auto cíclico* ou *auto reverso*

2.3 Para salvar as construções, utilizem as ferramentas: (*arquivo* $\Rightarrow$ *salvar como*)

3º Passo: Construa o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, e siga os passos de 2.2 alternando na janela para (*valores usuais de A, B e C*).

Promover a familiarização dos alunos com o software, construindo(ao seu modo) outras funções no R^2 do tipo: $y = x^3$, $y = |x|$, $y = a^x$, y = log (x), y = sen (x), y = cos (x) e outras trigonométricas, etc., com o propósito de posteriormente introduzir as construções de gráficos no R^3.

Construções no R^3

Construção de Planos e Cilindros (Calhas)

1º Passo: Construção de gráficos em três dimensões, utilizando as ferramentas (*3-dim* $\Rightarrow$ *equação* $\Rightarrow$ *explicita*).

1.1 Construir o gráfico da função $z = x$, buscando relações com o gráfico no espaço bidimensional.

1.1.1 Como seria o gráfico de $z = |x|$ e de $z = x^2$ no espaço tridimensional? construir utilizando o software, verificando as relações com o espaço bidimensional. *(PS: consultar a biblioteca do software, pois para |x|, digitar abs (x))*

1.2 Construir o gráfico da função $z = x^2$ e $z = y^2$.

Obs: os eixos desaparecem no momento da construção (solução: *ver* $\Rightarrow$ *eixos* $\Rightarrow$ *eixos ou ctrl E*). Aumentar a espessura dos eixos em (*ver* $\Rightarrow$ *eixos* $\Rightarrow$ *espessura tela e digite 3*).

Obs: Visualizar o que ocorre no traçado do gráfico na ausência do y e do x nas equações $z = x^2$ e $z = y^2$, respectivamente.

1.2.1 Utilizar a ferramenta: *um*$\Rightarrow$*fatiador* (abrirá uma janela para o fatiador do traçado do gráfico, clique uma vez para ver *o valor usual de x e depois clique para ver o valor usual de y*)

1.3 Com os gráficos das funções $z = x^2$ e $z = y^2$ construídos no mesmo sistema de coordenadas (X, Y e Z), verifique as interseções entre eles e tente imaginar como seria o gráfico da função $z = x^2 + y^2$.

1.3.1 Através das ferramentas (dois $\Rightarrow$ interseção $\Rightarrow$ superfície-superfície) busque as interseções e clique em *manter mudanças* nessa mesma janela, depois oculte os dois cilindros (calhas) e verifique as interseções na tela, utilize as setas de direção do teclado para melhorar a visualização e imaginar o gráfico desejado

Construção de Parabolóides

1º Passo: Construa o gráfico de $z = x^2 + y^2$ e compare com a interseção dos gráficos(calhas) construídos. (*Utilizar as setas de direção para movimentar os gráficos*)

1.1 Ocultar os gráficos $z = x^2$ e $z = y^2$

2º Passo: Mostre (tirar da posição de oculto) o gráfico da função $z = x^2$ e construa o gráfico $z = - y^2$. (Ainda sem o uso do computador imagine como seria o gráfico de $z = x^2 - y^2$? *tendo como referência os gráficos já construídos e visualizados na tela gráfica.*)

Construção de outras superfícies

Como seriam os gráficos de z = sen (x)? e/ou z = cos (x)? e/ou $z = x^3$?*(PS: consultar a biblioteca do software, pois para sen (x) digitar sin (x)).*

Obs: Promover a familiarizacao dos alunos com o software e com o espaço tridimensional construindo diversas e diferentes superfícies.

As Curvas de Nível das superfícies construídas

Uma introdução sobre as curvas de nível, com base em reflexões sobre estas nos gráficos construídos anteriormente e posteriormente visualizar curvas de nível de outras superfícies construídas pelos aprendizes.

1º Passo: Com base nos gráficos construídos, utilizar as ferramentas (equação$\Rightarrow$ inventário$\Rightarrow$níveis$\Rightarrow$auto$\Rightarrow$ver$\Rightarrow$todas).

Obs: Visualizar e comparar com a utilização do software as curvas de nível dos demais gráficos construídos individualmente pelos aprendizes.