Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

PROJETOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA ENVOLVENDO FUNÇÕES PARA OS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO: Cenários de Investigação a partir da temática "Transporte Público"

Autor: Prof. Ms. Glaucos Ottone Cardoso de Abreu

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Ouro Preto

2011

Ao Professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e/ou Médio

Professor, este material apresenta uma proposta de ensino de Funções a partir de Projetos de Modelagem Matemática para a disciplina de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental ou no 1º ano do Ensino Médio.

De acordo com as adaptações que podem ser feitas, a proposta pode até mesmo ser utilizada no Ensino Superior, dentro da disciplina de Cálculo I, pois abrange a possibilidade de se trabalhar com funções descontínuas.

Dentro das perspectivas aqui delineadas sobre possíveis interações entre Projetos de Trabalho e Modelagem Matemática, podemos pensar em uma temática que acreditamos ter um grande potencial para a criação de cenários de investigação na sala de aula do Ensino Fundamental: "Transporte Público".

Dentro dessa grande temática, proporemos o desenvolvimento de 2 (dois) temas / situações-problema que, a princípio, acreditamos ter um grande potencial didático pensando no processo de ensino e aprendizagem de Funções, especialmente no Ensino Fundamental.

Tema 1) O preço de uma corrida de táxi

Tema 2) O preço do combustível na bomba

Os projetos aqui apresentados foram desenvolvidos com alunos de uma turma da disciplina "Modelos e Modelagem Matemática" no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, no 2º semestre de 2010. Os participantes de nossa pesquisa eram Professores de Matemática com vasta experiência docente nos Ensinos Fundamental, Médio e/ou Superior, que puderam implementar e avaliar os Projetos de Modelagem Matemática.

Ressaltamos que o presente Produto Educacional é fruto da nossa Dissertação defendida junto ao Mestrado Profissional em Educação Matemática do programa de pós-graduação da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulada "A prática de Modelagem Matemática como um cenário de investigação na formação continuada de Professores de Matemática".

Esperamos que esse material contribua para a sua reflexão e prática pedagógica!

SUMÁRIO

1. Apresentando algumas concepções sobre Modelagem Matemática

Embora a Modelagem Matemática tenha sido introduzida no Brasil há cerca de trinta anos, e mesmo sendo uma das tendências mais pesquisadas em Educação Matemática, especialmente em cursos de pós-graduação, a Modelagem ainda não faz parte da formação da maioria dos professores de todos os níveis, principalmente os da Educação Básica. Um dos motivos talvez seja o fato de que a integração da Modelagem nos currículos de formação dos futuros Professores de Matemática, isto é, nos cursos de Licenciatura em Matemática ainda pode ser considerada "insipiente" ou restrita a uma disciplina específica.

Biembengut (2009) faz um mapeamento sobre a Modelagem Matemática, destacando os primeiros movimentos a nível internacional, os precursores brasileiros responsáveis pela sua introdução e disseminação no Brasil, bem como o número de trabalhos. Dentre os precursores, destaca-se Aristides Camargo Barreto pelas primeiras experiências com Modelagem Matemática no ensino, em meados dos anos de 1970, e Rodney Carlos Bassanezi como principal disseminador da Modelagem Matemática a partir da década de 1980, direcionando-a para o ensino.

Sabemos pela literatura que a Modelagem Matemática, enquanto objeto de pesquisa, tem passado por várias concepções e no entendimento de Biembengut (2009, p. 27):

> [...] é essencial não perder de foco estas distinções nos aspectos que convergem no entendimento de que a modelagem pode contribuir não somente para aprimorar o ensino e a aprendizagem matemática, mas especialmente, para provocar uma reação e interação entre corpo docente e discente envolvidos na contínua e necessária produção do conhecimento, que surtirá efeitos no contexto social.

Assim, buscaremos, a partir de agora, apresentar um pouco dessas concepções e algumas de suas distinções.

Segundo Bassanezi (2006, p. 24), "Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências." Assim, "[...] é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la."

Na busca do modelo matemático para avaliar a situação estudada, percebe-se a busca da Matemática conhecida ou a conhecer para gerá-lo. Pensando na Modelagem Matemática direcionada para a educação, Bassanezi (2006, p. 38) destaca:

> A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria Matemática.

Importante destacar nessa concepção, que o fenômeno modelado conduz o aluno a levantar hipóteses, realizar pesquisas para coleta de dados, formular problemas e mesmo que não se obtenha um modelo "bem sucedido" em termos matemáticos, o processo proporciona o desenvolvimento da criticidade do aluno. Entretanto, a partir dessa concepção, o modelo matemático continua tendo um papel fundamental no processo e também como produto desse processo.

Outra concepção de Modelagem Matemática muito interessante é a de Biembengut e Hein (2005, p. 12):

> Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, etc.

Percebemos acima, que não há um único padrão de rigor na construção do modelo, mas deve ser dada uma maior importância ao processo que envolve a sua construção. Ainda em relação ao método, Biembengut e Hein (2005, p. 18) afirmam que:

> O método que utiliza a essência da modelagem em cursos regulares, com programa, denominamos modelação matemática. A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-modelagem.

Nesta visão, abre-se uma oportunidade para trabalhar conteúdos específicos de Matemática, levantando questionamentos. Pensando na Modelagem Matemática como metodologia de ensino, para tornar o aluno reflexivo, crítico, tomador de decisões Biembengut e Hein (2005, p. 18) afirmam que:

> [...] a Modelagem Matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico.

Já Barbosa (2001), concebe a Modelagem Matemática, como um "ambiente de aprendizagem" que se constitui numa oportunidade para indagações dos alunos por meio da Matemática. Neste ambiente, procedimentos não são fixados rigidamente e existem diversas formas de encaminhamento dos problemas que trazem consigo uma gama de conceitos / ideias matemáticas, exploradas à medida que os alunos desenvolvem as atividades de modelagem. Nas palavras de Barbosa (2001, p. 5-6):

> Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. O termo "ambiente" diz respeito a um lugar ou espaço que cerca, envolve. O ensino tradicional é um ambiente de aprendizagem, pois estimula os alunos a desenvolverem certas atividades; a história da Matemática como recurso didático, também; e assim por diante. Modelagem, como entendemos, estimula os alunos a investigarem situações de outras áreas que não a Matemática por meio da Matemática.

Este ambiente proporciona ao aluno, uma iniciação à pesquisa, ao fazer questionamentos de situações não matemáticas, procurando respondê-las fazendo uso da Matemática. Neste ambiente, desenvolve-se o conhecimento matemático.

Outra perspectiva da utilização da Modelagem Matemática é pensá-la como um processo que possibilita a integração na rotina escolar de situações do cotidiano dos alunos, conforme destacado por Caldeira (2009, p. 46):

> [...] como o processo da Modelagem Matemática é dinâmico e permite ao estudante criar, ele pode também inventar algoritmos de resolução ou criar algum procedimento matemático, advindo de sua vida fora da escola, para resolver determinadas situações. Isso garantirá a multiplicidade de formas de pensar Matemática e fugirá da sua imutabilidade e "a-historicidade".

Nessa visão, nota-se a importância dos alunos que trazem as suas experiências de vida que são valorizadas durante o processo de Modelagem. Cabe destacar, então, que no ambiente de Modelagem Matemática, enquanto os alunos exploram os dados advindos de observações, segundo Barbosa (2009, p. 82), "[...] é preciso criar condições na organização pedagógica para que eles discutam os pressupostos usados na organização da coleta e da interpretação dos dados”.

Existem, por outro lado, algumas perspectivas teóricas para a Modelagem Matemática que a aproximam de outras vertentes teóricas da Educação Matemática, tais como a Educação Matemática Crítica. Ao destacar a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica, Araújo (2009, p. 66) procura:

> [...] juntamente com os estudantes, problematizar o papel da Matemática na construção do progresso, gerando maravilhas e catástrofes, e questionar o uso que é feito dessa disciplina como instrumento de poder. Nesse sentido, preocupo-me com uma Educação Matemática dos estudantes que não vise apenas instrumentá-los matematicamente, mas que também proporcione sua atuação crítica na sociedade, por meio desse conhecimento matemático, o que pode trazer contribuições para sua emancipação como cidadãos.

A postura da pesquisadora parece refletir sua preocupação com a formação de cidadãos que utilizem a Matemática como instrumento de leitura do mundo e que, a partir dessa leitura, posicionem-se criticamente.

Assim, a Modelagem Matemática na visão da Educação Matemática Crítica pode conduzir o aluno a questionar seus próprios modelos construídos, bem como os já existentes relacionados a diversas situações da vida em sociedade.

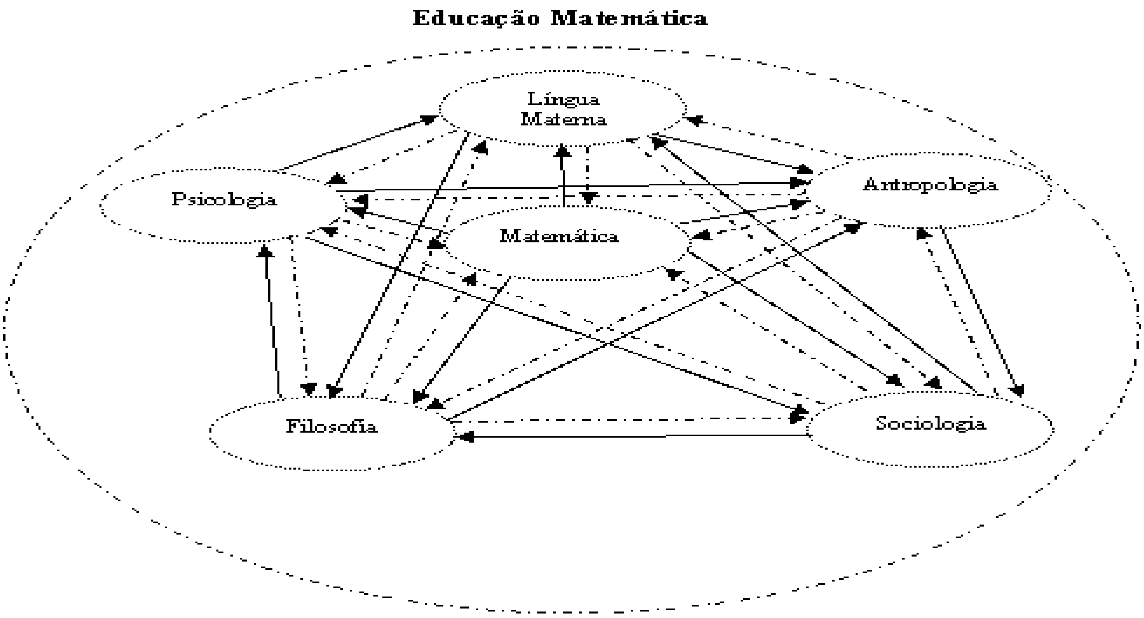
Apresentamos, ainda, a concepção de Modelagem Matemática de Almeida e Ferruzzi (2009, p. 120-121), para quem o termo “modelo matemático” se refere, antes de qualquer coisa, a uma busca por uma representação matemática de um fenômeno ou de um objeto do mundo real:

> Considerando que a construção desta representação matemática pode ser realizada no âmbito de aulas de matemática, o entendimento de Modelagem Matemática que temos em mente é de que esta constitui uma alternativa pedagógica [...] Ela se configura como uma atividade que, para os envolvidos, [...] implica em um conjunto de ações como a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não.

Por fim, destacamos Burak e Klüber (2010, p. 157) que, ao defenderem que a Modelagem Matemática deve voltar-se à formação dos nossos alunos da Educação Básica, nas mais diversas modalidades desse nível educacional, apresentam a Modelagem

Matemática em uma perspectiva de Educação Matemática “que concebe a Matemática como um instrumento importante, mas sem desconsiderar as outras áreas que devem se fazer presentes no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.”

Outro aspecto interessante dessa perspectiva é que, ao retratar as contribuições de outras áreas do conhecimento para a Educação Matemática e considerando a evolução ainda porvir desses conhecimentos, Burak (2010b, p. 14) apresenta o modelo proposto por Burak e Klüber (2008), no qual as linhas pontilhadas evidenciam um modelo que continua aberto às contribuições de novos conhecimentos:



Fonte: Burak e Klüber (2008)

Essa preocupação com a perspectiva de Educação Matemática na qual queremos trabalhar com a Modelagem Matemática também é encontrada em Barbosa (2001, p. 20) que, ao descrever o papel dos modelos matemáticos na sociedade, conclui que: “A Matemática e os modelos matemáticos integram, interferem, controlam e/ou prescrevem a vida social. Cabe, então, perguntar qual Educação Matemática queremos.”

Observamos, então, que existem algumas semelhanças e também algumas diferenças entre as perspectivas dos diversos pesquisadores.

Diante dessas abordagens a respeito das diferentes concepções construídas em relação à Modelagem Matemática, acreditamos como Reis e outros (2005), ser possível a sua implementação no ambiente educacional, apesar de alguns obstáculos enfrentados, dentre os quais destacamos:

- A dificuldade do aluno em assumir uma “postura de investigador” e aprender a aprender;

- A dificuldade do professor em sair da posição de “dono do saber” e aprender a lidar com situações desconhecidas.

Entretanto, também acreditamos que o conjunto de ações que a Modelagem Matemática favorece, proporciona ao aluno desenvolver a prática investigativa e o ambiente que viabiliza tal prática é, segundo Skovsmose (2000), um cenário para investigação. Conceberemos como tal, um ambiente propício à interação entre professor-aluno e aluno-aluno, o que pode fazer com que a situação investigada se configure num cenário para o desenvolvimento e aprendizagem da Matemática.

2. “Nossa concepção” sobre Modelagem Matemática

Diante das diversas concepções / ideias de Modelagem Matemática aqui delineadas, acreditamos ser importante nos manifestarmos em relação a alguns pontos que consideramos essenciais no sentido de assumirmos uma posição enquanto pesquisador / educador.

Entendemos Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem e investigação na sala de aula, no qual deve-se priorizar a construção de forma significativa do conhecimento matemático pelos alunos.

Essa forma de trabalhar com Modelagem Matemática pode ser enquadrada na perspectiva de Burak (1992, 1998, 2004, 2006), para quem o interesse do grupo de pessoas envolvidas, as informações e os dados obtidos no ambiente onde se localiza o interesse do grupo são os dois princípios norteadores para o trabalho com Modelagem Matemática. Assim, o pesquisador sugere para encaminhamento desse trabalho em sala de aula as seguintes etapas:

1) Escolha do tema;
2) Pesquisa exploratória;
3) Levantamento dos problemas;
4) Resolução dos problemas e desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema;
5) Análise crítica das soluções.

Em relação ao processo de Modelagem no ensino, chamamos a atenção para o papel que o modelo tem nesse processo. Inicialmente, consideramos “modelos” não só formulações e/ou expressões algébrico-geométricas, mas também representações de outra natureza, tais como gráficas, tabulares e ainda inferências explicitadas oralmente, a partir das discussões proporcionadas pelo ambiente de Modelagem.

Assim, consideramos muito importante a formulação / elaboração de “modelos” (dentro dessa visão mais ampliada); entretanto, a sua representação não pode desmerecer / desvalorizar o próprio processo de Modelagem. Este sim deve ser o principal foco do trabalho e deve merecer todos os olhares dos seus “atores”.

Um exemplo interessante nessa discussão é o trabalho com Modelagem Matemática no Ensino Fundamental. Muitos professores podem achar que as limitações do conhecimento matemático nessa etapa educacional acabam por delimitar a construção do modelo matemático em termos algébricos mais acurados, principalmente ao estudar fenômenos mais complexos. Entretanto, acreditamos que na Educação Básica, a maior preocupação docente deve recair sobre a construção do conhecimento matemático por parte dos alunos.

Assim, mesmo que alguns modelos encontrados possam ser considerados simplistas ou reducionistas, no processo de Modelagem certamente ocorrerão discussões / investigações que contribuirão para a exploração de conceitos matemáticos e, principalmente, para a interpretação dos fenômenos e/ou situações-problema investigados.

Ademais, durante o processo de Modelagem, pode surgir a possibilidade de utilização de vários recursos não tradicionalmente explorados na sala de aula, como por exemplo, recursos computacionais para gerar tabelas e gráficos, contribuindo assim para que os alunos façam análises dos dados obtidos ao longo do processo.

Tudo isso corrobora, em nossa visão, para a formação de uma postura de criticidade e reflexividade em nossos alunos.

3. Um pouco sobre a abordagem dos livros didáticos para o ensino de Funções

Como detalharemos Projetos de Modelagem Matemática relacionados ao ensino de Funções, julgamos importante apresentar, brevemente, como alguns livros didáticos de Ensino Fundamental apresentam tal assunto.

Cabe destacar ainda que nossa intenção mais geral é investigar nos livros didáticos a existência (ou não), no desenvolvimento do conteúdo de Funções, de situações /

aplicações do tema que são explorados à luz da Modelagem ou que nos remetam a possibilidades de trabalhar com esta.

A escolha dos livros foi feita com base em algumas obras que são tradicionalmente enviadas para as escolas fazerem sua opção por um livro a ser adotado no ano seguinte e com base em nossa experiência docente com livros didáticos no Ensino Fundamental, ao longo das últimas 3 (três) décadas.

Os livros que aqui analisamos brevemente são:

1) **A Conquista da Matemática** – 9º ano – Castrucci e Castrucci Jr. (2009);

2) **Matemática e Realidade** – 9º ano – Iezzi e outros (2009);

3) **Projeto Araribá: Matemática** – 8ª série – Barroso e outros (2006);

4) **Matemática: Ideias e Desafios** – 9º ano – Mori e Onaga (2009);

5) **Tudo é Matemática** – 9º ano – Dante (2009).

Castrucci e Castrucci Jr. (2009, p. 147), ao introduzirem o capítulo referente às funções associadas a polinômio do 1° grau, apresentam algumas situações do cotidiano que podem ser relacionadas a funções, em geral:

> - O comprimento de uma barra de ferro é dado em função da temperatura, pois o ferro se dilata quando é aquecido;
>
> - O consumo de combustível de um veículo é dado em função do percurso percorrido;
>
> - Quando uma pessoa ingere bebida alcoólica, a concentração de álcool no sangue é dada em função da quantidade de bebida consumida;
>
> - O preço que se paga por uma ligação telefônica é dado em função do tempo que se fala ao telefone.

A seguir, apresentam o sistema de coordenadas cartesianas incluindo atividades com algumas aplicações desse sistema (mapa de uma cidade, etc), procurando enfatizar a ideia de par ordenado.

Após a realização de tais atividades, apresentam a noção de função fazendo uso de tabelas para mostrar a relação entre as duas grandezas variáveis, caracterizando a lei de formação.

Logo em seguida, apresentam uma série de exercícios com informações orientadas, solicitando que os alunos encontrem a lei de formação da função.

Ao concluir tais atividades, Castrucci e Castrucci Jr. (2009, p. 158) fazem um destaque para a seguinte situação:

> Para graduar um termômetro nas escalas Celsius e Fahrenheit são utilizados dois estados térmicos com temperaturas bem definidas:
>
> - ponto de gelo, temperatura do gelo sob pressão normal;
>
> - ponto de vapor, temperatura de ebulição da água sob pressão normal.
>
> Na escala Celsius (C) são atribuídos, respectivamente, os valores 0 e 100 para essas temperaturas, e o intervalo entre esses dois pontos fixos é dividido em 100 partes iguais.
> Na escala Fahrenheit (F), atribui-se o valor 32 à temperatura de fusão do gelo e 212 à temperatura de ebulição da água. O intervalo entre esses pontos é dividido em 180 partes iguais.

Após fornecer essas informações, apresentam a lei de transformação entre as escalas e alguns exercícios explorando tal relação.

Após a representação gráfica da função associada ao polinômio do 1º grau, Castrucci e Castrucci Jr. (2009, p. 167) dão destaque ao tratamento da informação, apresentando uma tabela com valores de concentração de álcool no sangue em função da quantidade de latas de cervejas consumidas, fornecendo o valor para uma lata e solicitando o preenchimento dos valores até 10 latas. Em seguida, solicitam a representação gráfica desses dados e a lei de formação.

O ensino de funções é introduzido por Iezzi e outros (2009, p. 251) começando com uma atividade física onde os dados são apresentados em uma tabela relacionando distância percorrida e tempo gasto. Analisando a tabela, os autores apresentam uma formulação e, a seguir, conceituam uma função “quando há correspondência entre duas grandezas x e y, de modo que para cada valor de x fica determinado um único valor de y”.

Na sequência, é apresentada uma série de exercícios, partindo de exemplos numéricos para se chegar a uma formulação da lei da função. Em seguida, através do exemplo do cálculo de uma área, (IEZZI e OUTROS, 2009) introduzem a notação f(x) e exploram exercícios usando esta notação.

Querendo mostrar uma contextualização no ensino de funções, Iezzi e outros (2009, p. 254) apresentam uma atividade envolvendo a conta de água sob a forma de “desafio”, conforme descrito abaixo:

> Jaiminho mora na cidade de Porto Azul.
> Em Porto Azul, a conta de água de toda casa tem valor mínimo de R$ 9,00 e dá direito ao uso de até 10 m³ de água.
> Para estimular a economia no consumo de água, a prefeitura e a companhia de saneamento local estabeleceram que, quando o consumo ultrapassar essa medida, são acrescentados:
>
> - R$ 2,00 por m³, para os primeiros 10 m³ excedentes;
>
> - R$ 3,00 por m³, para os próximos 10 m³;
>
> - R$ 5,00 por m³, para o consumo que ultrapassar 30 m³.
>
> Na casa de Jaiminho, o valor da conta foi de R$ 53,00. Quantos metros cúbicos de água eles consumiram naquele mês?

Já para representar graficamente a função associada ao polinômio do 1º grau, Iezzi e outros (2009, p. 264) apresentam a seguinte situação:

> A conta mensal de uma linha telefônica do tipo econômica (que só faz ligações para telefone fixo local) é composta de duas partes: uma taxa fixa de R$ 30,00, chamada assinatura, e mais uma parte variável, que é de R$ 0,25 por minuto de ligação.

A seguir, é apresentado o modelo matemático que fornece o valor da conta, uma tabela com alguns valores e sua representação gráfica.

Barroso e outros (2006), ao introduzirem a ideia de função, utilizam dados de uma tabela, analisam tais dados e mostram a lei de formação da função. Algumas atividades são apresentadas com indicações para formar a lei de formação e outras são apresentadas em forma de tabelas.

Muitas situações apresentadas por Barroso e outros (2006) fazem uso da função linear e, quando se solicita a sua lei de formação através do gráfico, este já vem traçado, além de conter informações sobre valor unitário, o que facilita a obtenção da lei de formação da função.

Mori e Onaga (2009) abordam inicialmente os vários significados da palavra função na língua portuguesa, apresentando, em seguida, uma situação com os dados organizados em tabela e a lei de formação, bem como a representação gráfica por meio de pontos discretos, sem enfatizar o gráfico como uma reta.

Nas atividades propostas inicialmente por Mori e Onaga (2009), é apresentada uma situação-problema, os alunos respondem às alternativas até chegarem à lei de formação da função.

No final dessas atividades, Mori e Onaga (2009, p. 189) apresentam uma atividade relacionada a uma academia, destacando a importância do cuidado com o físico, fornecendo informações promocionais para matrícula em uma escola de natação. A seguir, sugerem aos alunos que registrem as anotações organizando os cálculos em uma tabela, usando uma fórmula e registrando em um gráfico cartesiano.

Quanto ao tratamento específico da função associada ao polinômio do 1º grau, Mori e Onaga (2009) apresentam situações e atividades orientadas enfatizando a obtenção da fórmula que caracteriza a função e sua representação gráfica.

Para mostrar a importância do estudo de uma função, Dante (2009) apresenta uma situação hipotética de abastecimento num posto de gasolina, conduzindo à construção da tabela, fórmula e gráfico. Em seguida, explora de modo intuitivo a ideia de função e apresenta atividades com dados em tabelas e gráficos, conduzindo o aluno a encontrar a lei de formação, bem como compreender, através da representação gráfica, a diferença entre uma grandeza discreta e uma grandeza contínua.

Após essas atividades, Dante (2009) enfatiza a representação gráfica como auxílio na análise da variação das grandezas, acrescenta mais atividades envolvendo o conceito de função e passa a dar um tratamento específico para a função afim, apresentando uma situação hipotética e a formulação que a caracteriza.

Os autores dos livros didáticos brevemente analisados acima, de um modo geral, abordam o estudo da função associada a um polinômio do 1º grau utilizando situações hipotéticas, mostrando sua aplicabilidade, bem como atividades envolvendo situações com questionamentos orientados até chegarem à obtenção da lei de formação da função.

Podemos considerar que existe, por parte desses autores, uma preocupação em ressaltar aplicações das funções em situações do cotidiano; entretanto, a utilização de situações hipotéticas, com dados hipoteticamente apresentados demonstra que o foco das abordagens não converge para um ensino com Modelagem Matemática em todos os seus aspectos, mas apenas para a obtenção do Modelo Matemático, ou seja, o foco está no “produto” mas não no “processo” como um todo.

Um exemplo disso é o problema do comprimento de uma barra de ferro que varia em função da temperatura (CASTRUCCI e CASTRUCCI JR., 2009). Como uma barra possui três dimensões, embora possamos nos concentrar em apenas uma delas (no caso, o comprimento), na prática, a dilatação da barra é volumétrica. Ademais, o problema da dilatação de uma barra, bem como outros apresentados por outros autores, não podem ser considerados "situações do cotidiano", as quais deveriam se ater a situações de pessoas comuns.

Também podemos observar nos livros citados, uma concordância com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 116) que destacam "[...] a importância dos gráficos para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos e para mostrar a variedade de ralações possíveis entre duas variáveis".

Entretanto, notamos que os autores dos livros aqui analisados privilegiam bastante a construção de gráficos associados a funções, a partir de tabelas, mas exploram muito pouco a interpretação de gráficos no sentido do tratamento da informação. Este último, em geral, fica restrito a capítulos específicos de Estatística quando na realidade deveria perpassar todos os conteúdos, inclusive, o conteúdo de Funções que pode gerar diversos exemplos relacionados ao dia a dia das pessoas e explicitar propriedades de crescimento, decrescimento, maximização e minimização de variáveis.

Após a análise desses livros, acreditamos que podemos contribuir para essa discussão apresentando Projetos de Modelagem Matemática como um cenário de investigação para o ensino e aprendizagem de Funções no Ensino Fundamental e/ou no Ensino Médio.

4. Desenvolvendo Projetos de Modelagem Matemática

Ao pensar em propostas que organizem os conhecimentos escolares trazendo maior flexibilidade, abertura ao planejar, bem como no momento de colocar em prática, Hernández e Ventura (1998, p. 60) defendem a "organização dos conhecimentos escolares através de projetos", por ilustrar o enfoque da globalização e seu papel na aprendizagem.

Dentre as fundamentações teóricas para se trabalhar com projetos na perspectiva de Hernández e Ventura (1998, p. 62-63), podemos destacar os seguintes princípios que justificam tal trabalho:

1. Um sentido de aprendizagem que quer ser significativo;

2. A atitude favorável para o conhecimento;

3. Configura-se a partir da previsão, por parte dos docentes, de uma estrutura lógica e sequencial dos conteúdos, numa ordem que facilite sua compreensão;

4. Realiza-se com um evidente sentido de funcionalidade do que se deve aprender;

5. Valoriza-se a memorização compreensiva de aspectos da informação;

6. Analisar o processo seguido ao longo de toda a sequência e das inter-relações criadas na aprendizagem.

Ao relacionar o problema eixo do trabalho com projetos e sua fundamentação teórica de "funcionalidade do que se deve aprender", Hernández e Ventura (1998) estabelecem, de certa forma, uma conexão com as situações-problema que são trabalhadas em Modelagem Matemática. Nesse sentido, acreditamos, como Burak (1987, p. 20-21), que deve ser dado ao aluno:

> [...] mais liberdade para raciocinar, conjecturar, estimar e dar vazão ao pensamento criativo estimulado pela curiosidade e motivação. O ensino através da modelagem procura propiciar o emergir de situações-problema as mais variadas possíveis, sempre dentro de um contexto fazendo com que a matemática estudada tenha mais significado para o aluno.

Na perspectiva de Burak (1987), as situações-problema favorecem um aprendizado seguindo a lógica do fazer para aprender contrapondo-se ao aprender para fazer, tornando significativo o conteúdo elencado da situação.

4.1 As questões do Tema e dos Cenários para Investigação

Uma questão central na discussão que até aqui trouxemos é o tema de um projeto a ser trabalhado. Para caracterizar a importância do tema, Hernández e Ventura (1998, p. 47) apontam que é "o tema ou o problema o que reclama a convergência de conhecimentos".

Tendo em vista a preocupação com o interesse do educando, Hernández e Ventura (1998, p. 67-68) recomendam que "o professorado e os alunos devem perguntar-se sobre a necessidade, relevância, interesse ou oportunidade de trabalhar um ou outro determinado tema", e que não há impedimento para "que os docentes também possam e devam propor aqueles temas que considerem necessários, sempre e quando mantenham uma atitude explicativa similar à que se exige dos alunos".

O tema serve para conduzir o ensino sem a preocupação com a rigidez na sequência dos conteúdos. Novamente, retomamos Burak (1987, p. 21) ao afirmar que: "a situação-problema determina o conteúdo a ser estudado e isto parece ser muito positivo, pois a sucessão de situações-problema experimentadas e vivenciadas pelo aluno acabarão por formar-lhe um espírito crítico e aberto às novas experiências".

Acreditamos que essa postura rompe com o cotidiano escolar tradicional e com a forma usual de se pensar o ensino de Matemática a partir dos conteúdos polarizadores e não a partir de temas problematizadores.

Baseando-se em Hernández e Ventura (1998), Malheiros (2008, p. 62) destaca, no cenário do tema:

> [...] o estabelecimento de hipóteses em termos do que deve ser investigado, quais questões devem ser respondidas, dentre outras delimitações necessárias. Com isso, o docente, em conjunto com os alunos, poderá especificar qual será o fio condutor do projeto e partir em busca de materiais, informações, dados, etc. Além disso, ele deverá ajudar os estudantes na seleção de informações e, para isso, muitas vezes, é necessário que ele estude o assunto que está sendo pesquisado, e também questione os estudantes sobre os dados, para possibilitar, com isso, que os discentes produzem novos conhecimentos sobre o tema. Neste sentido, o professor passa a ser o mediador do processo, estabelecendo o elo de ligação entre alunos e conhecimento.

Acreditamos que, ao trabalharmos com Projetos de Modelagem Matemática, a interação com o tema permite um melhor entendimento da situação-problema, favorecendo todo o processo de Modelagem. Essa familiarização com o tema também contribui para a criação de um cenário de investigação e para a interdisciplinaridade.

Segundo Skovsmose (2008, p. 21), "um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações". Nesse cenário constituído como ambiente de aprendizagem, o autor considera os alunos responsáveis pelo processo de explicação e exploração.

Dentro dessa perspectiva, o que importa é que "as referências são reais, tornando possível aos alunos produzir diferentes significados para as atividades (e não somente para os conceitos)". (SKOVSMOSE, 2008, p. 29-30)

4.2 As questões da Interdisciplinaridade e da Criatividade

Ao trabalharmos com Projetos de Modelagem Matemática, uma questão que sempre surge são as possibilidades de um trabalho interdisciplinar a partir de um certo tema.

Em relação ao aspecto interdisciplinar ao se investigar um tema, Tomaz e David (2008, p. 26-27) destacam a relação desse aspecto diretamente com a prática pedagógica, nos seguintes termos:

> Nossa concepção se aproxima mais da ideia de interdisciplinaridade como uma possibilidade de, a partir da investigação de um objeto, conteúdo, tema de estudo ou projeto, promover atividades escolares que mobilizem aprendizagens vistas relacionadas, entre as práticas sociais das quais alunos e professores estão participando, incluindo as práticas disciplinares. [...] A interdisciplinaridade assim é analisada na ação dos sujeitos quando participam, individualmente ou coletivamente, em sistemas interativos.

Ainda segundo Tomaz e David (2008), as normas, os efeitos e as relações existentes nesses sistemas interativos conduzem a possibilidades e restrições. Buscaremos levantar algumas destas possibilidades e restrições no trabalho com Projetos de Modelagem Matemática descritos a seguir.

Outro aspecto interessante relacionado não só ao tema, mas a todo o desenvolvimento de um projeto é a criatividade. Para que os projetos não percam sua potencialidade transformadora, muito mais do que leis e estabelecimento de planos de ação, deve-se propiciar a emersão da imaginação criadora.

Machado (2002, p. 65), ao relacionar projeto com a ideia de criação, destaca que a "ideia de design enquanto projeto em seu sentido mais legítimo deve ser associada à singular mediação realizada entre a criação individual e a intenção de reprodução, de imersão no imaginário coletivo".

Esta criação individual é fundamental para o desenrolar de um Projeto de Modelagem Matemática.

5. Apresentando Projetos de Modelagem Matemática

Dentro da temática "Transporte Público", propomos alguns temas para o desenvolvimento de Projetos de Modelagem Matemática.

5.1 O preço de uma corrida de táxi

Nessa problemática, podemos perceber uma possível convergência de conhecimentos a partir do “taxímetro”, favorecendo a interdisciplinaridade, de tal forma que o processamento das informações poderá permitir tanto conhecer o funcionamento técnico do equipamento, quanto saber relacionar as diversas informações, tendo em vista a produção do conhecimento matemático.

A capacidade de saber processar as informações ao interagir com o tema pode possibilitar, através da interdisciplinaridade, selecionar quais variáveis serão relevantes para analisar questões problematizadoras, permitindo também levantar outras questões a partir das primeiras. A interdisciplinaridade pode florescer em questões que envolvem desde mecânica de automóveis até questões econômicas.

Acreditamos que o projeto proporcionará um cenário para investigação que pode conduzir a possibilidades e restrições. As possibilidades referem-se a outras questões que podem ser respondidas com os novos conhecimentos que foram produzidos. Já as restrições podem aparecer ao longo do processo ou ao seu final, podendo se referir ao fato de se obter ou não respostas satisfatórias às questões levantadas.

Devido ao fato do projeto fazer referência a fatos reais e de relevância social e econômica, acreditamos que despertará o interesse que é essencial para gerar o gosto pela Matemática, uma vez que as questões investigadas mostrarão a sua aplicabilidade e as contribuições para o desenvolvimento da criticidade.

O projeto permitirá lidar com problemas simples ou mais sofisticados, o que vai depender do nível de ensino em que será implementado.

5.2 O preço do combustível na bomba

Nessa problemática, há também o favorecimento à interdisciplinaridade, uma vez que para responder às questões levantadas, haverá a necessidade de processar as informações de outras áreas do conhecimento. No caso, a partir da “bomba” de combustível, podemos buscar uma convergência de conhecimentos relacionando desde o preço dos combustíveis até questões ambientais.

Esse projeto, por proporcionar um convite para que investigações matemáticas sejam feitas com referência na realidade, caracteriza-se também como um cenário para investigação. Por fazer referência a fatos reais e de relevância social e econômica, acreditamos que o projeto contribuirá para desenvolver a criticidade, por envolver questões ambientais e financeiras na era de veículos *flex* que vivemos.

Dependendo do nível de escolaridade, o projeto também permitirá lidar com problemas simples ou mais sofisticados.

A flexibilidade em trabalhar com questões simples ou mais complexas também servirá para os primeiros contatos com Projetos de Modelagem na perspectiva de um Cenário para Investigação, na medida em que forem sendo implementados na sala de aula, contribuindo para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Descrevemos, agora, os relatórios dos Projetos de Modelagem Matemática elaborados pelos grupos de Professores de Matemática dos Ensinos Fundamental, Médio e /ou Superior, participantes de nossa pesquisa.

Cabe ressaltar que, em nossa opinião, nenhum relatório escrito consegue captar a toda a riqueza das discussões e do desenvolvimento das atividades.

Vale lembrar também que, em sua sala de aula, cada professor é livre para fazer as suas adaptações na implementação de um Projeto de Modelagem Matemática.

6. O Projeto de Modelagem Matemática “O preço de uma corrida de táxi”

Para a construção do modelo matemático, o grupo iniciou organizando as informações obtidas com um taxista da cidade de Belo Horizonte – MG, durante uma corrida de táxi realizada por um dos integrantes do grupo, na qual foram coletados dados fornecidos pelo taxímetro e por uma tabela de valores da BHTrans, órgão responsável pela fiscalização do trânsito e pela fixação dos valores das tarifas de transporte público.

As informações fornecidas pelo taxista estão descritas a seguir:

1. Preço do km rodado (na Bandeira 1, que vale de 06:00 às 20:00 h): R$ 2,10
2. Preço do km rodado (na Bandeira 2, que vale de 20:00 às 06:00 h): R$ 2,52
3. Bandeirada inicial: R$ 3,40
4. Preço da hora parada: R$ 19,90

Ao ser indagado sobre o fato de que as mudanças dos valores no taxímetro ocorrem de R$ 0,20 em R$ 0,20, o taxista informou que, no taxímetro, a cada 100 m é cobrado R$ 0,20. Esse valor foi estipulado para poder facilitar o troco para clientes que certamente reclamariam da inexatidão no troco dado pelos taxistas, caso as mudanças ocorressem de R$ 0,21 em R$ 0,21.

Entretanto, o integrante do grupo verificou na tabela da BHTrans fixada num dos vidros traseiros do táxi e, de fato, o valor do km rodado na Bandeira 1 era de R$ 2,10. O integrante logo pensou em trazer esta discussão para o grupo.

Outra informação "técnica" fornecida pelo taxista é que o taxímetro é ligado no diferencial e não no odômetro. Assim, a distância percorrida numa corrida é aferida de acordo com o "aro" da roda de cada veículo. Logo, cada táxi deve passar por uma fiscalização periódica em um órgão local filiado ao INMetro.

Ao serem compartilhadas essas informações, o grupo decidiu estabelecer a seguinte questão geral de investigação:

Como se calcula o valor da corrida de táxi?

Entretanto, o grupo decidiu também elaborar questões específicas para cada nível de ensino, pois chegou à conclusão de que o projeto poderia ser implementado nos níveis fundamental, médio e superior, obviamente, com diferenciações na exploração dos conteúdos e na elaboração dos modelos matemáticos.

Para o 9º ano do Ensino Fundamental, o grupo estabeleceu a seguinte questão motivadora:

O preço fornecido no taxímetro é compatível com as informações fornecidas pelo taxista e pela tabela estabelecida pela BHTrans?

Apresentamos a seguir, todos os cálculos que o grupo realizou para a construção de modelos matemáticos, visando responder às questões acima propostas.

Inicialmente, o grupo observou que, se o valor do km rodado na Bandeira 1 é, de fato, R$ 2,10 (conforme tabela da BHTrans) mas, que se as mudanças nos valores do taxímetro ocorrem de R$ 0,20 em R$ 0,20, então, tais mudanças não podem ocorrer a cada 100 m, pois isso faria com que o preço do km rodado fosse R$ 2,00 e não R$ 2,10.

Assim, uma regra de três simples mostra que as mudanças nos valores do taxímetro devem ocorrer, de fato, a cada 95 m (aproximadamente) e não a cada 100 m, pois:

<u>R$</u> **<u>m</u>**

0,20 — x
0,21 — 100

<u>$x \cong 95{,}24$ m < 100 m</u>

O grupo decidiu então, modelar duas funções diferentes para representar essa situação de discrepância entre valores informados e cobrados.

Primeiramente, o grupo elaborou um chamado “modelo teórico”, construído com base naquilo que foi informado pelo taxista (no taxímetro, a cada 100 m é cobrado R$ 0,20) e que se verificou que não era condizente com a prática (a mudança ocorre, na realidade, a cada 95 m). Logo, “na teoria”, o valor a ser cobrado a cada 100 m deveria ser de R$ 0,20.

<u>Modelo Teórico:</u> $y_t = 0{,}20 \, \mathbf{.} \, (x/100) + 3{,}40$

<u>Significadores:</u>

x → Distância em metros
y_t → Preço cobrado em R$ (não considerando tempos de eventuais paradas)

<u>Cálculos:</u>

Se x = 0 → $y_t = 3{,}40$
Se x = 100 → $y_t = 3{,}60$
Se x = 200 → $y_t = 3{,}80$
Se x = 1000 → $y_t = 5{,}40$
Se x = 2000 → $y_t = 7{,}40$

Em seguida, o grupo elaborou um chamado “modelo prático”, construído com base naquilo que realmente acontece, isto é, independentemente do fato das mudanças nos valores do taxímetro ocorrerem de R$ 0,20 em R$ 0,20, o valor real do km rodado na

Bandeira 1 é de R$ 2,10. Logo, “na prática”, o valor a ser cobrado a cada 100 m é, exatamente, de R$ 0,21.

<u>Modelo Prático:</u> $y_p = 0{,}21 \textbf{ . } (x/100) + 3{,}40$

<u>Significadores:</u>

x → Distância em metros

y_p → Preço cobrado em R$ (não considerando tempos de eventuais paradas)

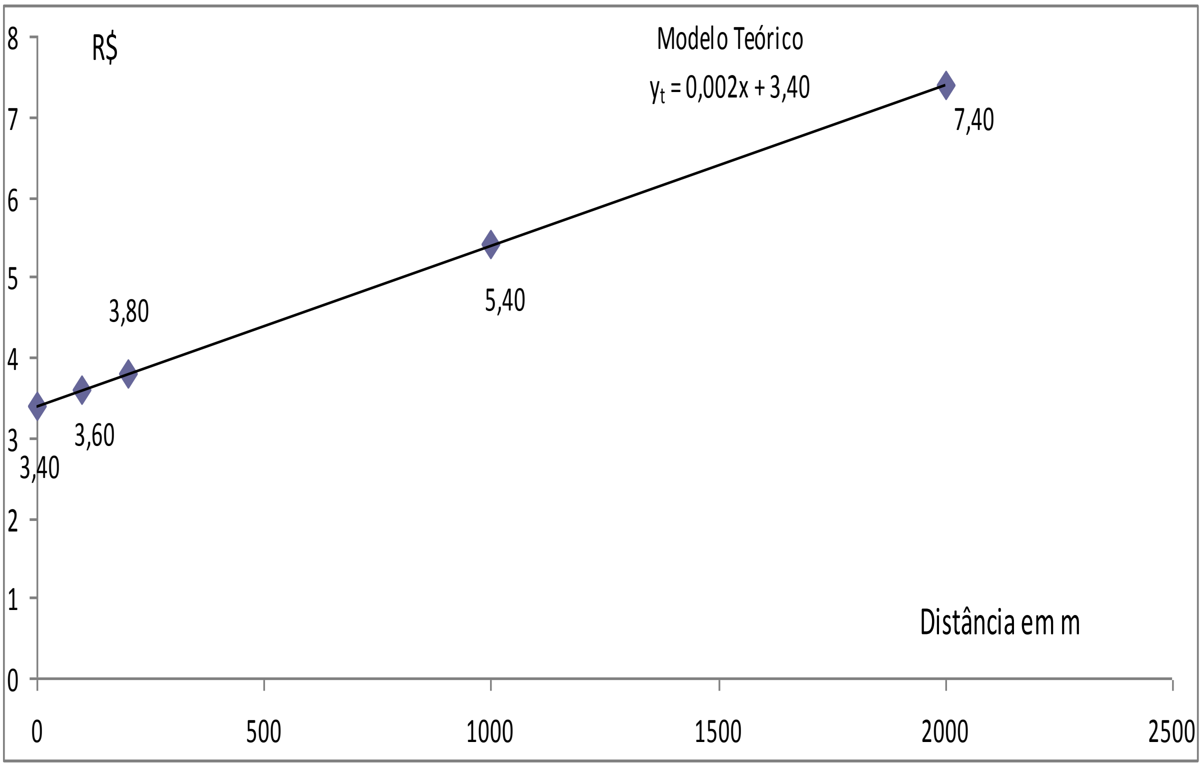
<u>Cálculos:</u>

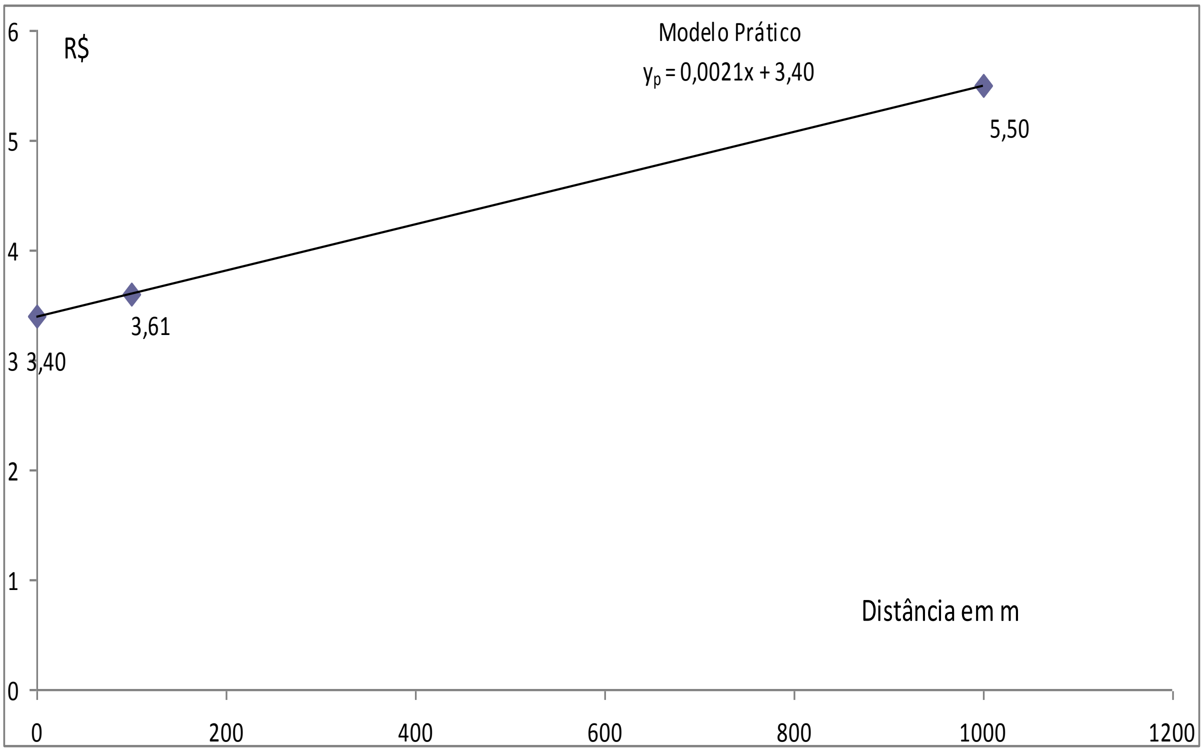
Se x = 0 → y_p = 3,40

Se x = 100 → y_p = 3,61

Se x = 1000 → y_p = 5,50

Na sequência, o grupo apresentou uma representação gráfica de cada um dos modelos (aqui apresentadas utilizando o Excel):





O grupo também buscou uma comparação entre os modelos construídos, de forma a obter uma diferença nos valores caso o modelo teórico fosse aquele realmente adotado, isto é, se no taxímetro, a cada 100 m rodados fosse cobrado R$ 0,20 (como informou o taxista).

<u>Diferença entre os modelos:</u>

x = 1000 m → Diferença = $y_p - y_t = 5{,}50 - 5{,}40 = 0{,}10$

x = 10000 m → Diferença = $y_p - y_t = 24{,}40 - 23{,}40 = 1{,}00$

Logo, se considerarmos que uma pessoa, por exemplo, pega um táxi 5 vezes por semana para ir ao seu trabalho, percorrendo por dia 10.000 m, ou seja, 10 km (sem considerar eventualmente, o tempo parado no trânsito), a diferença que é de R$ 1,00 por dia, passará a ser de:

5 dias (1 semana) → R$ 5,00

4 semanas (1 mês) → R$ 20,00

12 meses (1 ano) → R$ 240,00

Conclusão:

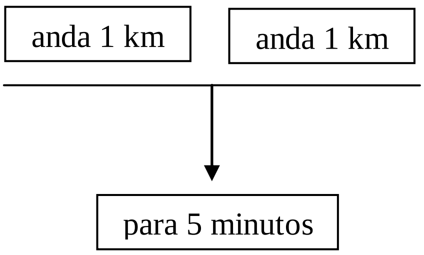
Esta diferença é bastante significativa considerando o número de pessoas que utilizam o serviço de táxi nas grandes cidades.

Já para o 1º ano do Ensino Médio, o grupo estabeleceu a seguinte questão motivadora:

Qual o preço que você pagaria por uma corrida de táxi da sua casa à escola com trânsito livre? E se você, no meio do trajeto, ficar parado por 5 minutos?

Para auxiliar nos cálculos, o grupo decidiu propor como dados para a sala de aula, a seguinte situação hipotética retratando o trânsito parado:

Situação hipotética: No trajeto de sua casa para a escola (que distam 2 km um do outro), o táxi anda 1 km, fica parado por 5 min e volta a andar mais 1 km.



Inicialmente, deve-se considerar que, em movimento, a velocidade média do táxi é de 40 km/h. Logo, para percorrer 1 km, o táxi levará:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{km}} & & \underline{\textbf{min}} \\ 40 & — & 60 \\ 1 & — & t \end{array}$$

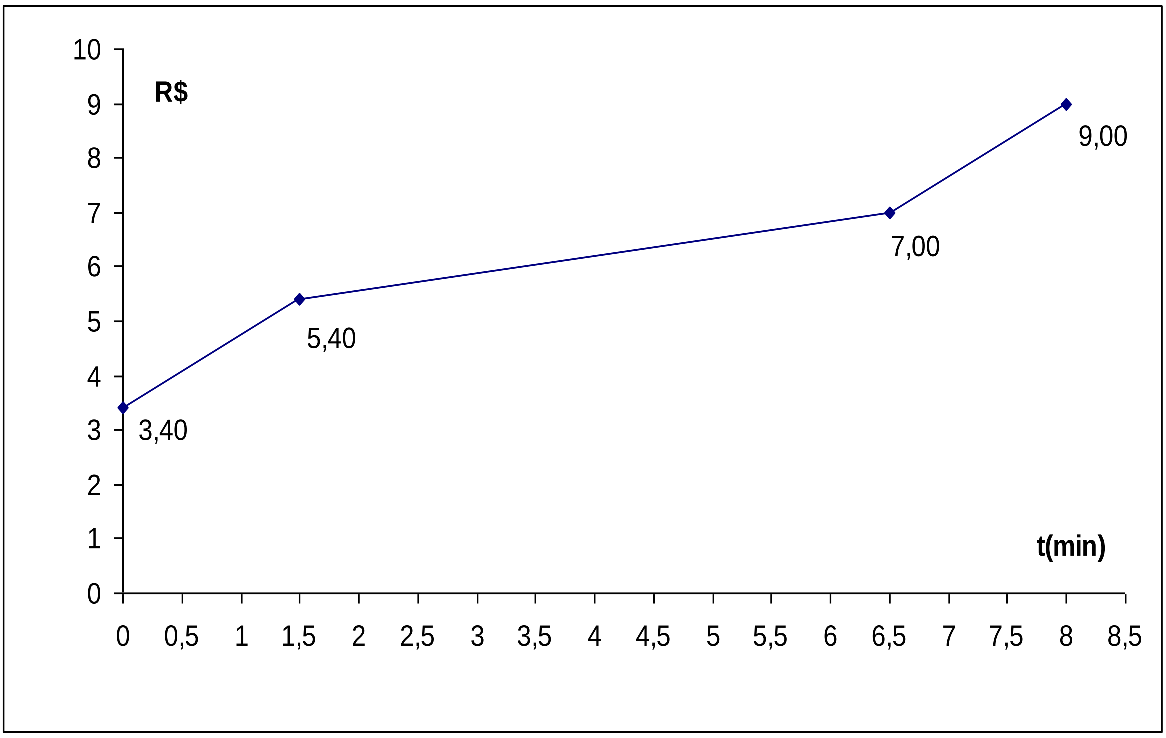
$$\underline{\mathbf{t = 1{,}5\ min}}$$

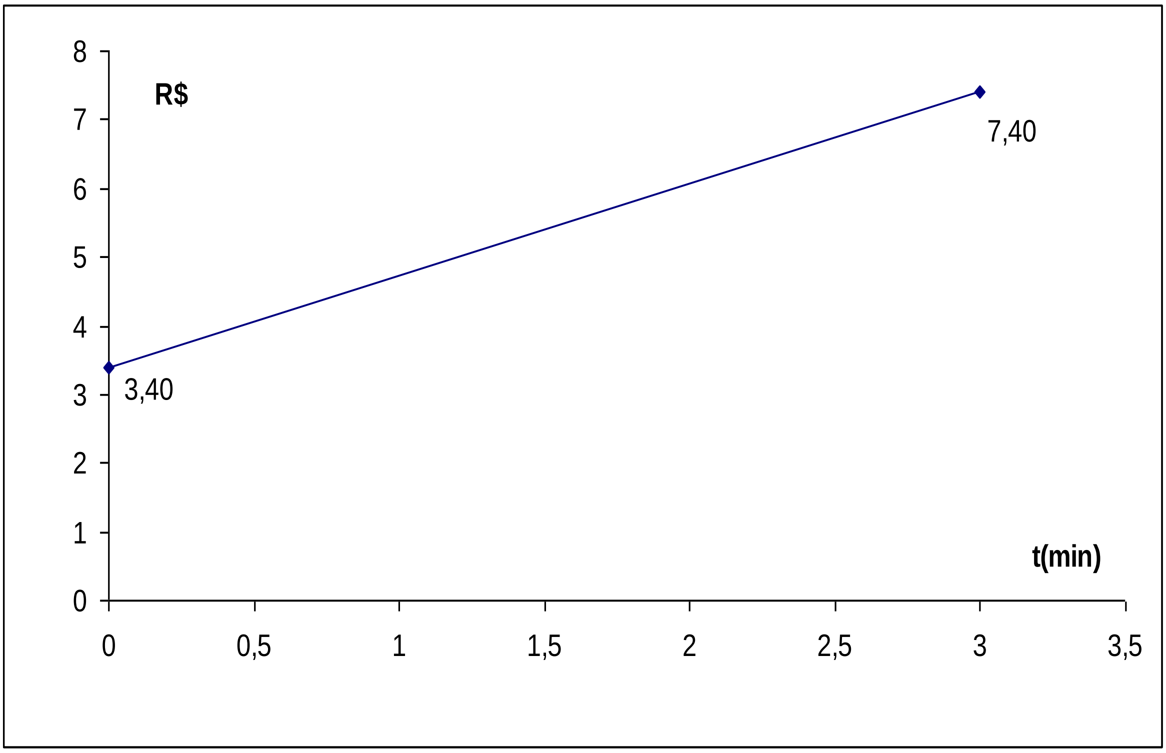
Outro fator a ser considerado é de que a hora parada é de R$ 19,90. Logo, se o táxi fica parado no trânsito por 5 min, o valor da corrida aumentará de, aproximadamente:

min		**R$**
60	—	19,90
5	—	v

v ≅ 1,60

Assim, estimando em R$ 2,00 o preço do km rodado na Bandeira 1, tem-se as seguintes representações gráficas da situação hipotética e de outra situação (também hipotética), caso o táxi não ficasse parado, notando que o preço é uma função do tempo:

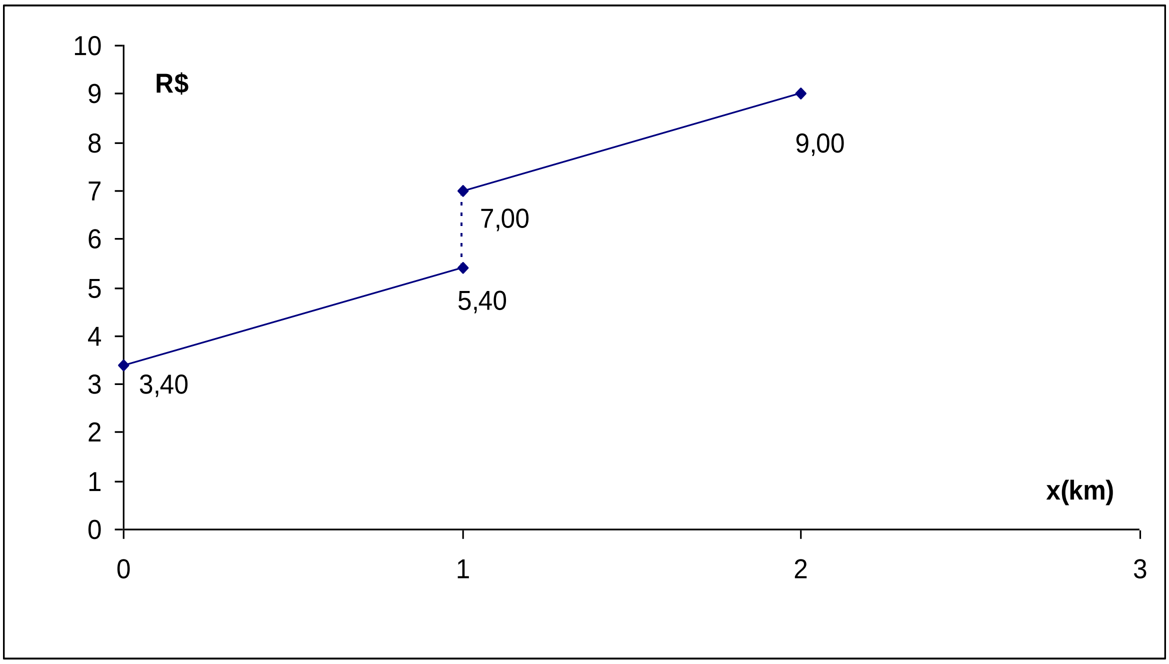




Conclusão:

Ficando parado o prejuízo é duplo: no tempo e no preço, pois, com base nos valores obtidos, perde-se 5 min a mais e gasta-se R$ 1,60 a mais.

Por fim, o grupo apresentou uma possibilidade de extensão das questões levantadas para o Ensino Superior. Isso poderia acontecer em disciplinas que antecedem ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, como é o caso de muitas universidades que têm criado disciplinas como Introdução ao Cálculo ou mesmo na tradicional disciplina de Cálculo I, integrante da estrutura curricular de cursos da área de Ciências Exatas. Foi sugerida, então, uma abordagem do projeto no ensino dessas disciplinas, uma vez que a função obtida do preço em função da distância pode ser representada graficamente por uma função descontínua, como se segue:



Ao longo de toda a apresentação, houve uma preocupação do grupo em explicar como ocorreu a coleta de dados, o significado das variáveis envolvidas no modelo e o processo de sua construção.

Destacam-se também, as surpresas que surgiram ao longo da investigação. Um dos participantes, ao relatar a entrevista com o taxista durante a coleta de dados, ficou impressionado ao tomar conhecimento de alguns dados técnicos como, por exemplo, o fato de que os taxímetros são aferidos de acordo com o diâmetro das rodas de cada veículo.

A interação dos participantes durante a apresentação proporcionou o desenvolvimento de aspectos críticos na tomada de decisões, bem como o apontamento das potencialidades didáticas do projeto, tanto no Ensino Fundamental como nos Ensinos Médio e Superior, pois vários conceitos podem ser trabalhados, tais como: funções, gráficos, comprimento de circunferência, escalas, regra de três, além de conhecimentos de Física (velocidade, espaço, tempo) e de outras áreas dentro de um contexto social (legislação de trânsito, segurança do táxi, consciência e cidadania).

Também foi destacada a importância da representação gráfica, favorecendo o trabalho em um ambiente informatizado, principalmente no Ensino Fundamental, onde a visualização contribui na construção do conhecimento de forma intuitiva.

As discussões envolvendo os modelos “teórico e prático” contribuíram para uma análise crítica envolvendo aspectos econômicos e éticos.

Ao final da apresentação do projeto pelo grupo, houve ainda uma sugestão de um modelo que combinasse a distância percorrida com o tempo parado no trânsito, o que se aproxima bastante de uma situação real ao se pegar um táxi.

A função modelada (de 2 variáveis), então, pode ser representada através da adição de sentenças que envolvem a distância percorrida (x) em metros e o tempo parado (t) em minutos, descrita a seguir:

<u>Modelo Misto:</u>

y = 3,40 + (0,21/100) **.** x (caso não ocorra parada no trânsito)

ou y = 3,40 + (0,21/100) **.** x + (19,50/60) **.** t (caso ocorra parada no trânsito)

<u>Significadores:</u>

y → Preço cobrado em R$
x → Distância em metros
t → Tempo em minutos

7. O Projeto de Modelagem Matemática “O preço do combustível na bomba”

O grupo iniciou destacando que, a partir das informações obtidas sobre consumo de álcool e gasolina, decidiu investigar o seguinte:

Quando é mais vantajoso economicamente substituir um combustível pelo outro, independente do tipo de veículo?

Essa questão nos surpreendeu, pois esperávamos uma questão bem mais simples, que buscasse relacionar o preço da bomba com o preço do litro de cada combustível, originando uma função linear. Entretanto, como demos liberdade para os grupos formularem questões de investigação dentro dos temas por nós propostos, consideramos um grande avanço a questão formulada pelo grupo.

A motivação que o grupo apresentou para se chegar à questão de investigação foi de que hoje, na era dos carros *flex*, devemos saber nos posicionar ao nos depararmos com o anúncio abaixo:

Os dados que o grupo trouxe foram obtidos inicialmente do manual de um carro popular (Gol 1.0) e de um posto de gasolina da cidade de Ouro Preto – MG e seguem descritos abaixo. Os cálculos realizados apontam quando é mais vantajoso utilizar álcool ao invés de gasolina, a partir do consumo de combustível e da relação entre os preços do litro de cada um desses combustíveis.

Consumo de combustível (km/litro) segundo o manual:

Local onde se roda	Gasolina	Álcool
Cidade	13,6 km/litro	9,8 km/litro
Estrada	17,0 km/litro	12,2 km/litro
Média	**15,1 km/litro**	**10,9 km/litro**

Preço do combustível:

Gasolina: R$ 2,67

Álcool: R$ 1,89

Distância = Volume x Consumo

$Dg = V_g \,.\, 15{,}1$ (distância percorrida com gasolina)
$Da = V_a \,.\, 10{,}9$ (distância percorrida com álcool)

<u>Gasto para uma distância fixa:</u>

$G_g = V_g \,.\, P_g$ (onde Pg é o preço do litro de gasolina)
$G_a = V_a \,.\, P_a$ (onde P_a é o preço do litro de álcool)

Para compararmos os combustíveis, supomos que ambos percorram a mesma distância. Assim:

$D_g = D_a$
$V_g \,.\, 15{,}1 = V_a \,.\, 10{,}9$

Portanto, para termos $G_g = G_a$, devemos ter:

$V_g \,.\, P_g = V_a \,.\, P_a$

Como $V_g = (10{,}9/15{,}1) \,.\, V_a$, temos:

$\cancel{V_a} \,.\, P_a = (10{,}9/15{,}1) \,.\, \cancel{V_a} \,.\, P_g$ (O cancelamento mostra que a decisão independe de quantos litros foram abastecidos)
$P_a = (10{,}9/15{,}1) \,.\, P_g$
$\mathbf{P_a = 72{,}1\% \,.\, P_g}$

<u>Desenvolvimento:</u>

1. Definimos que nossa decisão estaria pautada no fato de que queremos percorrer a mesma distância gastando menos dinheiro;

2. Consultamos o manual de um Gol, motor 1.0, para obter o consumo de combustível e daí, chegar às fórmulas que nos permitem calcular as distâncias que um automóvel percorrerá com álcool ou gasolina;

3. Obtivemos as fórmulas dos gastos com cada tipo de combustível;

4. Obtivemos uma relação entre os volumes de álcool e de gasolina para se percorrer a mesma distância;

5. Usando 3 e 4 chegamos (via equação), à relação que deve existir entre os preços desses combustíveis para tomarmos a decisão.

Conclusão:

Se o preço do litro do álcool for até 72, 1 % do preço do litro da gasolina, então, é vantajoso abastecer com álcool.

Entretanto, um dos integrantes do grupo, ressaltou que o seu carro era um Gol 1.0 e ele observava outros valores para o consumo de combustível (km/litro) de seu veículo. Em média, ele calculava em 16 km/litro o consumo com gasolina e em 13 km/litro o consumo com álcool. Refazendo os cálculos, o grupo obteve os seguintes dados:

Cálculos:

1. $D_a = 13 \cdot V_a$; $D_g = 16 \cdot Vg$
2. $D_a = D_g \leftrightarrow 13 \cdot V_a = 16 \cdot Vg \leftrightarrow V_a = 1{,}23 \cdot Vg$
3. $P_a = x \cdot Va$ e $P_g = y \cdot V_g \rightarrow P_a \leq P_g \leftrightarrow 1{,}23\, x \cdot V_g \leq y \cdot V_g \rightarrow x \leq y/1{,}23$
   $\rightarrow$ **$x \leq 81{,}25\%\ y$**

Significadores:

D_a = distância percorrida com álcool
D_g = distância percorrida com gasolina
P_a = gasto com o abastecimento com álcool.
P_g = gasto com o abastecimento com gasolina.
x = preço do litro de álcool
y = preço do litro de gasolina

Logo, para o veículo em questão, será mais vantajoso abastecer com álcool, se o preço do litro do álcool for até 81,25 % do preço do litro da gasolina.

O grupo concluiu que o modelo matemático apresentado nos relatórios indica a necessidade de cada consumidor conhecer o consumo por litro utilizando combustíveis diferentes, fazendo os cálculos necessários, o que lhe proporcionará uma tomada de decisão.

Durante as discussões, além do tratamento algébrico apresentado, também foi sugerido um tratamento gráfico, principalmente se a implementação em sala de aula acontece no 9º ano do Ensino Fundamental.

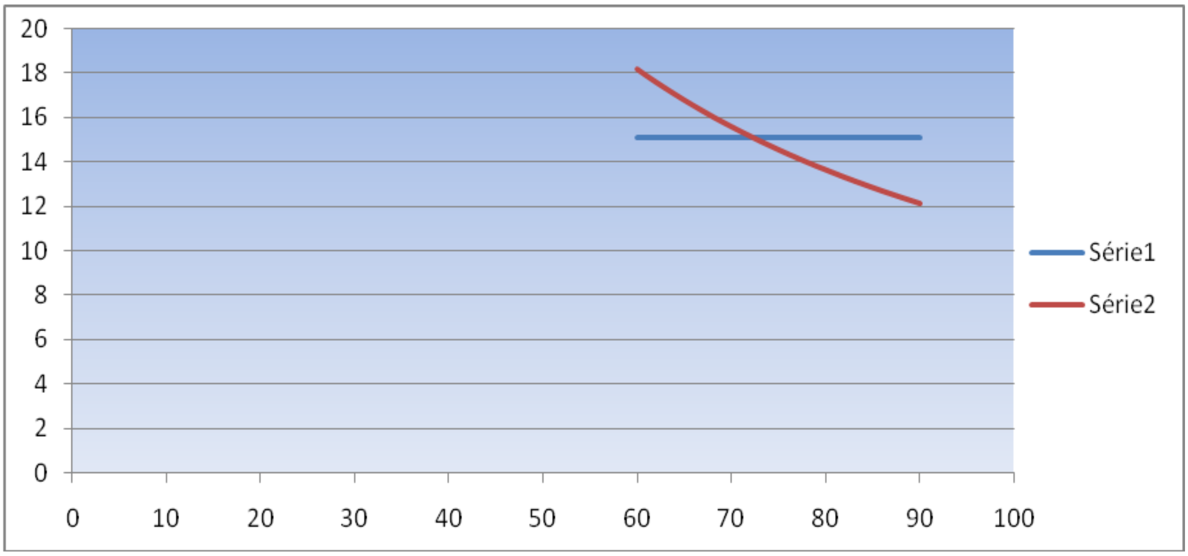
Essa discussão levou o grupo a trabalhar da seguinte forma: foi fixado o preço do litro de gasolina em 1 (que significa 100 %) e variou-se o preço do litro do álcool percentualmente em relação ao preço do litro da gasolina.

Foi construído um quadro que traz na 1ª coluna o percentual do preço do álcool em relação ao preço da gasolina; a 2ª coluna traz o número de km rodados por cada unidade do preço do litro de gasolina; a 3ª coluna traz o número de km rodados por cada unidade do preço do litro de álcool. Quando o valor da 2ª coluna for maior que o valor da 3ª coluna, deixa de ser vantajoso utilizar álcool.

Porcentagem	Gasolina	Álcool
60	15,1	18,16667
61	15,1	17,86885
62	15,1	17,58065
63	15,1	17,30159
64	15,1	17,03125
65	15,1	16,76923
66	15,1	16,51515
67	15,1	16,26866
68	15,1	16,02941
69	15,1	15,7971
70	15,1	15,57143
71	15,1	15,35211
72	15,1	15,13889
73	15,1	14,93151
74	15,1	14,72973
75	15,1	14,53333
76	15,1	14,34211
77	15,1	14,15584
78	15,1	13,97436

79	15,1	13,79747
80	15,1	13,625
81	15,1	13,45679
82	15,1	13,29268
83	15,1	13,13253
84	15,1	12,97619
85	15,1	12,82353
86	15,1	12,67442
87	15,1	12,52874
88	15,1	12,38636
89	15,1	12,24719
90	15,1	12,11111

Logo, tanto pelo quadro acima, construído no Excel, como pelo gráfico abaixo, também construído no Excel, conclui-se que se o preço do litro do álcool estiver entre 72 % e 73 % do preço do litro da gasolina, então, é vantajoso abastecer com álcool.



Houve uma preocupação do grupo em explicar o significado das variáveis envolvidas no modelo. Além desse modelo, um dos participantes apresentou discussões iniciais para elaboração de um modelo que levem em consideração a mistura de combustíveis.

A interação dos participantes durante a apresentação proporcionou o apontamento das potencialidades didáticas do projeto, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, pois vários conceitos podem ser trabalhados, tais como: funções, gráficos, escalas, equações, inequações, razões, proporções, porcentagem, tabelas estatísticas e Matemática Financeira.

O grupo também destacou a importância fundamental de se trabalhar em um ambiente informatizado, principalmente no Ensino Fundamental, onde o tema proposto pode ser trabalhado antes da sistematização do ensino de funções.

Além de aspectos econômicos, foram discutidas também questões ambientais, como a importância da tomada de decisões difíceis como, por exemplo, ter de abrir mão de benefícios financeiros para poluir menos o meio ambiente.

Referências / Bibliografia Recomendada

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. **Uma Aproximação Socioepistemológica para a Modelagem Matemática.** In: Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p. 117-134, 2009.

ANDRADE, P. F. **Aprender por Projetos, Formar Educadores**. In: VALENTE, J. A. (Org.) Formação de educadores para o uso da informática na escola. Campinas: UNICAMP/NIED, p. 58-83, 2003.

ARAÚJO, J. L. **Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica**. In: Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p. 55-68, 2009.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores.** Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática**: **contribuições para o debate teórico**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, p. 1-14, 2001.

BARBOSA, J. C. **Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica**. In: Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p. 69-85, 2009.

BARROSO, J. M.; LEONARDO. F. M.; GAY, M. R. G.; SILVA, M. C.; MATHEUS, A. R.; LIMA, C. A. R.; BENTIVEGNA, C. E. B.; MACHADO, C. A. V. B.; ALMEIDA, F. R. P.; SILVA, L. M.; GODOI, L. G.; LASELVA, R. C.; ABDOUNUR, O. J. A. **Projeto Araribá**: **Matemática –** 8ª série**.** São Paulo: Moderna, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2006.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino.** São Paulo: Contexto, 2005.

BIEMBENGUT, M. S. **30 Anos de Modelagem na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. In: Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p. 7-32, 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. UNESP – Rio Claro, 1987.

_______. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação – UNICAMP. Campinas, 1992.

_______. **Critérios norteadores para a adoção da modelagem matemática no ensino fundamental e secundário.** Revista Zetetiké. Campinas, v.1, ano 2, p. 47-60, 1994.

_______. **Formação dos pensamentos algébricos e geométricos: uma experiência com modelagem matemática.** Pró-Mat. Curitiba, vol. 1, n.1, p. 32-41, 1998.

_______. **A Modelagem Matemática e a sala de aula.** In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, I, Londrina, 2004. Anais... Londrina: UEL, p. 1-10, 2004.

_______. **Modelagem Matemática: avanços, problemas e desafios.** In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, II, Apucarana, 2006. Anais... Apucarana: FAP, p. 1-9, 2006.

_______. **Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula.** Revista de Modelagem na Educação Matemática. v.1, n.1, p. 10-27, 2010.

_______. **Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática.** In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Orgs.) Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica. Ponta Grossa: UEPG, p. 15-36, 2010.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica numa perspectiva de Educação Matemática**. In: BURAK, D.; PACHECO, E. R.; KLÜBER T. E. (Orgs.) Educação Matemática: Reflexões e Ações. Curitiba: CRV, p. 147-166, 2010.

CALDEIRA, A D. **Educação Matemática e Ambiental: Um contexto de mudanças.** Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação – UNICAMP. Campinas, 1998.

_______. **Modelagem Matemática: um outro olhar.** In: Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p. 33-54, 2009.

_______. **Etnomodelagem e suas relações com a Educação Matemática na infância.** In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) Modelagem Matemática na Educação Matemática: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, p. 81-97, 2007.

CASTRUCCI, B.; CASTRUCCI JR., B. **A Conquista da Matemática** – 9º ano**.** São Paulo: FTD, 2009.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática** – 9º ano**.** São Paulo: Ática, 2009.

FIORENTINI, D.; LORENZATO S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** São Paulo: Autores Associados, p. 133-146, 2009.

HERNÁNDEZ, F.; VENTURA, M. **A Organização do Currículo por Projetos de Trabalho**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L. **Uma reflexão sobre a Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática Crítica.** Bolema, n.25, p. 71-88, 2006.

IEZZI, G.; DOLCE, O. ; MACHADO, A. **Matemática e Realidade –** 9º ano**.** São Paulo: Atual, 2009.

KLÜBER, T. E. **Modelagem Matemática e Etnomatemática no contexto da Educação Matemática: Aspectos filosóficos e epistemológicos.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG. Ponta Grossa, 2007.

MACHADO, N. J. **Cidadania e Educação: Sobre a ideia de projeto**. São Paulo: Escrituras Editora, 2002.

MALHEIROS, A. P. S. **Educação Matemática *online*: a elaboração de Projetos de Modelagem.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. UNESP – Rio Claro, 2008.

MORI, I. M.; ONAGA, D. S. **Matemática: Ideias e desafios** – 9º ano**.** São Paulo: Saraiva, 2009.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. **Matemática –** 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC / SEF, 1998.

PEREIRA, E. **A modelagem matemática e o papel do professor de Matemática para o desenvolvimento da criatividade**. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Orgs.) Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básic**a**. Ponta Grossa: UEPG, p. 115-125, 2010.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

REIS, F. S. **A Modelagem Matemática na Educação Matemática: algumas considerações e perspectivas.** In: Encontro Regional de Educação Matemática, I, Ipatinga, 2008. Anais... Belo Horizonte: SBEM, p. 1-6, 2008.

REIS, F.S.; CAMARGOS, C.B.R.; GARCIA, M.M.; MACHADO, C.M.; SANTOS, C.A.M. **Descobrindo a Modelagem Matemática: de professores em formação inicial a professores em formação continuada.** In: Conferência Nacional de Modelagem e Educação Matemática, IV, Feira de Santana, 2005. Anais... Feira de Santana: UEFS, p. 1-5, 2005.

SANTOS, A. **Didática sob a ótica do pensamento complexo**. Porto Alegre: Sulina, 2003.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação**. In: Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 13, n.14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade**. São Paulo: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Critica**. Campinas: Papirus, 2008.

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M. **Interdisciplinaridade e Aprendizagem Matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.