Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

(RE)CONSTRUINDO IMAGENS E DEFINIÇÕES CONCEITUAIS DE LIMITES:

Contribuições para Professores de Análise em cursos de Licenciatura em Matemática

Autor: Profª. Ms. Lílian Isabel Ferreira Amorim

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Ouro Preto

2011

Ao Professor de Análise em cursos de Licenciatura em Matemática

Professor, este material apresenta as contribuições de uma proposta de ensino de Limites em disciplinas de Fundamentos de Análise Real, a partir do trabalho com as imagens conceituais e definições conceituais construídas no Cálculo Diferencial e Integral. De acordo com as adaptações que podem ser feitas, a proposta pode até mesmo ser utilizada no ensino de Limites em Cálculo I.

Dentro das perspectivas aqui delineadas sobre a Educação Matemática no Ensino Superior, procuramos apresentar alguns questionamentos que têm gerado pesquisas em torno de diversos problemas no ensino de Cálculo e de Análise.

Dentro da temática específica sobre ensino de Limites, proporemos o desenvolvimento de 2 (dois) atividades que, a princípio, acreditamos ter um grande potencial didático no levantamento e categorização das imagens conceituais e definições conceituais dos alunos, (re)construídas do Cálculo para a Análise.

Atividade I) Identificando as imagens conceituais e definições conceituais de Limites construídas pelos alunos após cursarem Cálculo

Atividade 2) Identificando as imagens conceituais e definições conceituais de Limites (re)construídas pelos alunos após cursarem Análise

As atividades aqui apresentadas foram desenvolvidas com alunos de uma turma da disciplina “Introdução à Análise Real” num curso de Licenciatura em Matemática, no 2º semestre de 2010. A análise das atividades revelou que algumas imagens conceituais e definições conceituais de Limites construídas pelos alunos em Cálculo são equivocadas e/ou conflitantes e, portanto, necessitam ser reconstruídas ou até mesmo, construídas pelos alunos na Análise.

Ressaltamos que o presente Produto Educacional é fruto da nossa Dissertação defendida junto ao Mestrado Profissional em Educação Matemática do programa de pós-graduação da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulada “A (re)construção do conceito de Limite do Cálculo para a Análise: Um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática”.

Esperamos que esse material contribua para a sua reflexão e prática pedagógica!

SUMÁRIO

1. Destacando alguns trabalhos sobre o Ensino de Cálculo e Análise

Segundo a Sociedade Brasileira de Matemática – SBM (1995, p. 5), em um de seus boletins informativos:

> O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina.

Esse questionamento deve-se aos altos índices de reprovação e evasão nas universidades públicas brasileiras, desde aquela época até os dias atuais.

Muitos trabalhos de pesquisa, nacionais e internacionais, têm ressaltado as dificuldades dos alunos dos ciclos básicos das universidades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, segundo Lílian Nasser (2009). Levando em consideração esses dados, de fato, há muito que se pesquisar quanto ao ensino de Cálculo, considerando ainda que, de acordo com Dario Fiorentini (1995), o ensino na grande maioria das salas de aula, que deveriam ser tratadas como espaço de trabalho onde se estabelecem as múltiplas relações entre os sujeitos do fazer pedagógico, é livresco e centrado no professor, cujo papel, muitas vezes, é o de um mero transmissor de informações.

A "aprendizagem", então, torna-se passiva e consiste na memorização e reprodução (imitação / repetição) precisa dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor ou pelo livro.

Quem é (são) o(s) responsável(is) por essa situação ou esse estado de coisas?

Acreditamos que a responsabilidade de mudar esse quadro que aí se encontra é, de fato, de todos aqueles que, de alguma forma, estão envolvidos nesse processo de ensino e aprendizagem, concordando com Jonas Lachini (2001, p.146) ao afirmar que: "Na ação pedagógica, tanto o sucesso quanto o insucesso em uma disciplina específica, nascem das relações instituídas por professores e alunos, em torno do trabalho com conteúdos curriculares".

Outra possibilidade a se pensar quando se discutem os problemas no ensino de Cálculo recai sobre a prática pedagógica dos professores, de acordo com Reis (2001, p. 23):

> A prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver.

Neste ponto, temos a necessidade de questionar o ensino de Análise Real, uma vez que os tópicos fundamentais do ensino de Cálculo são os mesmos de um curso de Análise, disciplina obrigatória nos cursos de Licenciatura em Matemática e que concebemos como de fundamental importância para a formação do Professor de Matemática, por abordar formalmente, conteúdos trabalhados nos Ensinos Fundamental e Médio, como números e funções.

Uma discussão acerca da ementa, da bibliografia e do papel da disciplina Análise Real, nos cursos de Licenciatura em Matemática, já foi realizada por Plínio Moreira, Helena Cury e Carlos Vianna (2005) quando enviaram questionários para 80 matemáticos, pesquisadores titulares ou professores titulares de 16 instituições universitárias e de pesquisa brasileiras, com questões envolvendo os assuntos acima citados. Destes, obtiveram 31 respostas de matemáticos que representavam 14 destas instituições.

As questões da pesquisa versam sobre sugestão de ementa e bibliografia, bem como uma questão aberta, cuja segunda parte é a seguinte: "Se lhe coubesse defender a permanência da disciplina Análise na Reta como obrigatória para o curso de Licenciatura em Matemática, que argumentos você apresentaria"? (MOREIRA, CURY e VIANNA, 2005, p.15)

A 1ª categoria de respostas descrita pelos pesquisadores apontou a importância da Análise por se constituir numa possibilidade do aluno "tomar contato" com o significado e com as formas de se pensar Matemática. Moreira, Cury e Vianna (2005, p. 21) afirmam que, por isso:

> Desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de "pensar matematicamente", proporcionando, também, maior maturidade intelectual ao aluno. O trabalho na disciplina abrange métodos, técnicas, estruturas, concepções e valores fundamentais da matemática, constituindo-se, assim, em uma introdução ao que se poderia chamar de "cultura matemática" (grifos dos autores).

Uma 2ª categoria levantada por Moreira, Cury e Vianna (2005, p. 22) relaciona-se ao fato de que a disciplina proporciona uma compreensão "sólida e profunda" de conceitos que são considerados básicos na Matemática escolar e assim:

> [...] explica os "porquês" e dá mais segurança ao futuro professor da escola. Proporciona a construção de uma visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar, em substituição a uma visão que a concebe como um amontoado desconexo de fórmulas e regras (grifo dos autores).

Ainda uma 3ª categoria destacada por Moreira, Cury e Vianna (2005, p. 23) descreve que: "A disciplina constitui, para o aluno, um espaço de percepção da matemática como um instrumento que permite um entendimento profundo de certos fenômenos naturais e que tem aplicações em outras ciências".

Embora os autores da pesquisa critiquem algumas das respostas dadas, que questionam a necessidade de um professor da educação básica estudar Análise Real, acreditamos na importância dessa disciplina para a formação de Professores de Matemática, mas há que se repensar sua abordagem em sala de aula, na perspectiva de Alexandre Brito (2010, p. 25), ao pontuar:

> Concebemos a Análise como uma ponte entre a formalização dos conceitos e conteúdos que serão ensinados pelo Professor de Matemática em sua futura prática docente. Entretanto, acreditamos que, para que isto aconteça, a relação do conteúdo estudado em Análise com a Matemática da sala de aula dos Ensinos Fundamental e Médio, deve ser um elo fortemente trabalhado no curso de Análise Real.

Daí, deparamo-nos com uma série de problemas em relação ao ensino e à aprendizagem dessa disciplina. O aluno, quando tem o primeiro contato com a Análise, se vê diante dos aspectos formais da Matemática, até então desconhecidos para uma maioria dos estudantes, pois essa disciplina se encontra na grade curricular no final do curso de licenciatura, o que não deveria ser diferente, mas contrasta com o ensino da Matemática que o antecede, de um modo geral, privilegiando os aspectos computacionais e de manipulação simbólica, cujo objetivo é obter um resultado, uma resposta final, como no caso do Cálculo.

Então, o processo de ensino e aprendizagem da Análise nos cursos de graduação acaba não sendo muito diferente do Cálculo, embora privilegie aspectos diferentes; enquanto no Cálculo há um excesso de algoritmização e falta de compreensão e aplicação dos conteúdos, na Análise há um excesso de rigor e formalismo (REIS, 2009), o que faz com que a maioria dos alunos, recorra à memorização e reprodução precisa dos principais resultados e de suas demonstrações, sem que isto lhes faça algum sentido. Esta visão é corroborada por Márcia Pinto (1998, p.293), ao afirmar:

> O ensino de Análise Matemática tem demonstrado ser uma tarefa difícil. Estando no centro vital da transição dos estudantes do pensamento elementar para o pensamento avançado em Matemática, demandas conceituais são colocadas aos estudantes, como aquelas preocupadas com definições formais e prova formal.

Essa discussão sobre a "transição de pensamentos" é abordada pelos estudiosos do Pensamento Matemático Avançado, que passamos agora a destacar.

2. Destacando os trabalhos da linha *Advanced Mathematical Thinking*

Pensamos, então, que há muito que se pesquisar sobre o ensino de Análise Real; o aluno e suas "imagens conceituais" devem ser objeto de estudo e investigação.

Entendemos imagens conceituais, na perspectiva de David Tall e Shlomo Vinner (1981), como sendo os processos e imagens mentais relacionados à aquisição de um conceito.

Os estudos do *Advanced Mathematical Thinking*, cujos trabalhos resultaram em um livro publicado em 1991, com o mesmo título do grupo (Advanced Mathematical Thinking tendo como seu editor, David Tall) contêm diversos artigos relacionados ao ensino de Matemática avançada e são divididos em três focos principais:

1. A natureza do pensamento avançado, cujos tópicos incluem os processos envolvidos na concepção do Pensamento Matemático Avançado, a criatividade matemática e a prova matemática;

2. A teoria cognitiva do Pensamento Matemático Avançado, cujos tópicos incluem o papel das definições, o papel dos símbolos e a abstração reflexiva;

3. A pesquisa envolvendo o ensino e a aprendizagem do Pensamento Matemático Avançado, cujos tópicos incluem o desenvolvimento cognitivo e dificuldades conceituais relacionadas a funções, limites, Análise, infinito, prova e ainda, o uso do computador.

No Capítulo 1 – *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking,* Tall (1991, p. 3) caracteriza o Pensamento Matemático Avançado como aquele que dá "atitude produtiva de se considerar a contextualização de um problema, numa investigação matemática, leva à formulação produtiva de conjecturas e ao estágio de refinamento e prova" (tradução nossa).

Em relação ao Pensamento Matemático Avançado e o Pensamento Matemático Elementar, Tall (1991, p. 3) afirma que existe semelhança com os ciclos de atividades relacionados a esses pensamentos: "Muitas das atividades que ocorrem neste ciclo também ocorrem na resolução de problemas matemáticos elementares, mas a possibilidade de definição formal e dedução é um fator que distingue o Pensamento Matemático Avançado" (tradução nossa).

Mais do que a possibilidade da definição formal e dedução, acreditamos que a necessidade dessa postura formal é o que caracteriza / distingue o Pensamento Matemático Avançado, uma vez que, tal possibilidade também existe em níveis mais elementares, mas não se torna uma necessidade premente.

Ainda em relação às diferenças entre os Pensamentos Matemático Elementar e Avançado, Tall (1991, p. 20) descreve a transição de um para o outro como um processo baseado em "entidades abstratas" construídas pelo indivíduo por meio de deduções das definições formais:

> O movimento do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significante: de <u>descrever</u> para <u>definir</u>, de <u>convencer</u> para <u>provar</u> de uma maneira lógica baseada nas definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva, a qual é vista durante a luta inicial dos estudantes universitários com as abstrações formais, enfrentadas por eles no primeiro ano de universidade (grifos do autor; tradução nossa).

Outro aspecto interessante é destacado por Tall (1985), ao criticar os professores que, ao se questionarem "por que os alunos não aprendem Análise?", simplesmente reorganizam a disciplina, alterando alguns tópicos do conteúdo, sem primeiro investigar como os alunos pensam: "Para compreender por que os estudantes não conseguem aprender Análise, claramente se requer um estudo dos estudantes como o sujeito-problema / objeto da pesquisa" (TALL, 1985, p. 1)

.O pesquisador destaca também os conflitos causados pelas imagens conceituais nos estudantes, especialmente aqueles referentes a números reais e limites. Ainda, aponta para o problema da utilização de definições nas provas matemáticas como uma das maiores dificuldades na aprendizagem matemática de Análise, ao tratar das concepções dos estudantes sobre a teoria em que a Análise está construída.

Tais conflitos, em particular a aprendizagem dos números reais e limites, já haviam sido estudados por Tall e Schwarzenberger (1978). Os autores acreditam que as causas dos conflitos podem estar associadas a três fatores: uma "infelicidade linguística", que se refere à utilização inadequada / inapropriada de terminologias e/ou simbologias matemáticas por parte do professor e que poderia ser eliminada por uma escolha mais cuidadosa das motivações ou definições; "distinção genuína da Matemática" ou ainda "eventuais particularidades na experiência anterior do indivíduo", o que poderia ser sanado por um professor sensível ciente da situação. David Tall e Rolph Schwarzenberger (1978, p. 49) consideram ainda que: "Em todos os três tipos de conflito, o papel do professor em encontrar uma resolução adequada será crucial e mais decisivo do que fatores como a escolha da ementa, livro didático ou recursos audiovisuais".

Já Márcia Pinto e Eddie Gray (1998) destacam os efeitos do ensino da disciplina Análise Matemática para estudantes que serão professores da escola elementar e que a cursam no último ano do curso de Licenciatura em Matemática na universidade. A pesquisa realizada por esses autores foi feita na Inglaterra e lá, mesmo os professores da escola elementar devem cursar Licenciatura em Matemática para estarem habilitados. Esses autores questionam o sentido do ensino formalista de Análise, para aqueles que não serão matemáticos profissionais.

3. Mais alguns estudos de pesquisadores brasileiros

Em sua tese de doutorado, Reis (2001) discute como a relação tensional entre rigor e intuição acontece e se manifesta no ensino universitário de Cálculo e Análise, a partir dos estudos de manuais didáticos e de entrevistas semiestruturadas com quatro professores-pesquisadores que se destacavam nessa área à época, como autores de estudos e livros didáticos: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino – UNESP – Rio Claro; Prof. Dr. Geraldo Ávila – UFG; Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo – UNICAMP e Prof. Dr. Elon Lages Lima – IMPA – RJ.

No centro da obra, discutem-se aspectos rigorosos e intuitivos do ensino das disciplinas em questão e a relação dicotômica / não complementar entre rigor e intuição verificada no ensino atual. Reis (2001, p. 202) considera que:

> Talvez a melhor metáfora, que agora se nos apresenta, seja o de uma reta com dupla seta, onde, numa extremidade pode-se representar o rigor e, na outra a intuição [...] É claro que o ponto ideal é o do equilíbrio, mas esse ponto, na verdade, é difícil de ser conseguido. O trabalho do professor pode situar-se em qualquer um dos pontos dessa reta contínua. O professor tem autonomia para deslocar-se para qualquer ponto dessa reta. Se o deslocamento tender a ser, com mais freqüência, para a esquerda (intuição), isso pode denotar uma preocupação pedagógica mais voltada à produção de sentidos e significados e à formação de conceitos. Se o deslocamento for, com mais freqüência, para a direita (rigor), isso poderá significar uma preocupação e uma ação pedagógica mais sintático-procedimental. Essas tendências, mais à direita ou à esquerda, dependem, de um lado, das concepções, valores e conhecimentos do professor e, de outro, das condições intelectuais dos alunos e materiais (aqui entrariam os livros didáticos) da instituição.

Por fim, destacamos ainda Pinto (2001), que relata uma pesquisa realizada com alunos do Departamento de Matemática e do Instituto de Educação da Universidade de Warwick – Inglaterra, que cursavam Análise ao final de seus cursos. A autora constatou que, apesar da complexidade envolvida nos problemas que os estudantes enfrentavam em seu primeiro contato com a Análise Real, é possível descrever um padrão permeando seu desenvolvimento durante este momento, daí relacionou dois tipos de aluno.

O primeiro tipo de estudante é aquele que usa seu conhecimento prévio essencialmente para "extrair significado", ou seja, para produzir um significado para a nova experiência dentro do contexto em estudo no momento; sua estratégia principal é a de "tornar rotina" o uso das novas ideias. O segundo tipo de aluno usa sua experiência para "atribuir significado" ao novo contexto em termos de seu conhecimento anterior. Sua estratégia principal é a de "explorar" o conceito novo, analogicamente, interpretando-o. A autora considera ainda que as dificuldades centrais para esses dois tipos de alunos não são as mesmas.

Para os que "extraem significado" o problema não está em trabalhar com uma nova noção de prova, que requer deduções a partir de definições. As dificuldades cognitivas ao estudar Análise Real parecem estar, de início, relacionadas à habilidade em coordenar os processos nas afirmações quantificadas apresentadas na teoria e trabalhar com a lógica proposicional. Na impossibilidade de produzir significado para o novo contexto, ou, às vezes, em decorrência de uma visão restrita da própria matemática, tais estudantes tendem a trabalhar o conteúdo de modo mecanizado, não reflexivo, sobrecarregando a memória e evocando inúmeros resultados que não sabem relacionar conceitualmente, em geral, estes estudantes não trabalham com independência.

Para os estudantes que “atribuem significado”, o vivenciar da nova experiência está íntima e invariavelmente ligado à reconstrução de experiências prévias; o que parece requerer do aprendiz um esforço cognitivo maior do que simplesmente compartimentalizar uma nova construção. Estudantes como esses podem ser derrotados por imagens conceituais restritas, não adequadas à exploração do conceito que pretendem desenvolver. Quando expostos a diferentes representações ou aspectos de um mesmo conceito, podem adicioná-los ao conhecimento que estão construindo como se fossem informações desconexas, ao invés de refinar sua imagem conceitual, focando gradualmente na definição formal.

Ainda em relação a esses dois tipos de aprendizes, Pinto (2001, p. 128) tece uma consideração que parece se encaixar perfeitamente no perfil dos estudantes de Análise, não só da Inglaterra, mas também do Brasil:

> [...] ambos os tipos de aprendizes recorrem à memorização para passar nos exames quando estão fracassando em produzir significado para a teoria formal. São também unânimes no reconhecimento do esforço requerido para acompanhar o curso. Os que extraem significado talvez precisariam de mais tempo para “encapsular” as definições e tornar o novo contexto familiar; e os outros talvez necessitariam de mais tempo para a reconstrução da estrutura cognitiva como um todo.

Concluindo, destacamos a perspectiva de Pinto (2001, p. 144) da qual nos valemos para justificar a relevância de nossa própria pesquisa: “Há que se investir em investigar meios de atenuar a transição dos Cálculos para a Análise. Neste sentido, esta investigação nos mostra que não há uma engenharia ou fórmula única para conduzir o ensino de Matemática avançada”.

4. Imagem conceitual e definição conceitual

Entre as teorias cognitivas relativas à construção dos conceitos matemáticos, daremos destaque aos trabalhos de Tall e Vinner (1981) como impulsionadores da discussão acerca da imagem conceitual e da definição conceitual, também chamados, por alguns autores, de conceito imagem e conceito definição, respectivamente.

Inicialmente, cabe destacar o que Tall e Vinner (1981, p. 152), concebem como imagem conceitual e definição conceitual:

> Nós usaremos o termo **imagem conceitual** para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados. Esta é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o individuo amadurece e se depara com novos estímulos [...] **definição conceitual** é a forma de palavras usadas para especificar o conceito.

É importante destacar que, embora Tall e Vinner (1981) concordem a respeito do que concebem como imagem conceitual e definição conceitual, eles entendem essas noções de forma diferente. Vinner (1991) apresenta uma distinção bastante nítida entre essas noções, usando inclusive imagens de células separadas para buscar entender as relações entre as noções, quando se refere à aquisição de um conceito, em contextos que ele chamou de "técnicos". Tall (2003), ainda que considere os conceitos citados anteriormente como distintos, não os vê como exclusivos, mas antes, que a definição conceitual deve ser concebida como uma parcela da imagem conceitual global que existe na nossa mente / cérebro.

Assumiremos, neste trabalho, essa consideração de Tall (2003) sobre imagem conceitual e definição conceitual, sem entretanto, deixar de destacar as contribuições de Vinner (1991).

Para Vinner (1991), os termos imagem conceitual e definição conceitual são fundamentais para a explicação do processo cognitivo da formação dos conceitos, termos estes que foram formulados por Vinner em 1980, ano em que Tall estava diante de uma grande quantidade de dados, recolhidos junto a alunos universitários, procurando fazer uma análise que fosse além do ponto de vista puramente matemático. A partir desses dados, Vinner e Tall publicaram, em conjunto, o texto de 1981, no qual definiram os termos imagem conceitual e definição conceitual.

Como já dissemos, existem algumas diferenças na forma como os termos são abordados por Tall e Vinner. De acordo com Tall (2003), para Vinner, a imagem conceitual, definida de maneira mais filosófica, é uma experiência mental do investigador, ao procurar analisar o que acontece quando os alunos se focam, de formas diferentes, nas imagens e nas definições, podendo induzir que, para ele, a mente está separada do cérebro. É nesse contexto que ele define a existência de células diferentes na estrutura cognitiva que servem de base ao seu modelo de formação dos conceitos.

Já para Tall (2003), a mente é pensada como a forma de o cérebro trabalhar, pois é uma parte indivisível da estrutura do cérebro. Assim, em vez de uma separação entre definição conceitual e imagem conceitual, como proposto por Vinner, Tall considera que a definição conceitual não é mais do que uma parcela da imagem conceitual total que existe na nossa mente. Para Tall, essa formulação tem uma base mais humana.

Dessa forma, a imagem conceitual para Tall é a mesma descrita anteriormente, enquanto a definição conceitual não se restringe à definição formal aceita pela comunidade científica, mas permanece com a mesma concepção já referida, como sendo a forma das palavras usadas para especificar o conceito. Sendo assim, Tall e Vinner (1981) afirmam que a definição conceitual pode ser aprendida pelo indivíduo, de maneira mecânica, ou mais provida de significado e relacionada ao conceito como um todo, num grau maior ou menor. É, portanto, pessoal e não necessariamente está de acordo com a comunidade matemática, podendo ainda variar, ao longo do tempo.

Segundo Tall e Vinner (1981), a definição conceitual pode ser uma reconstrução pessoal da definição feita pelo indivíduo ou dada a ele, assumindo a forma verbal que ele utiliza para explicar a sua imagem conceitual evocada, termo utilizado pelos autores para descrever a parte da memória evocada num dado contexto. Isso não é, necessariamente, tudo o que certo indivíduo sabe sobre certa noção. Uma vez que, de acordo com esses autores, a imagem conceitual não é necessariamente coerente em todos os momentos, ao longo do seu desenvolvimento, devido ao fato dos impulsos sensoriais excitarem certas partes neuronais que podem não ser as mesmas todas as vezes que há um estímulo ou estímulos diferentes: "Estímulos diferentes podem ativar partes diferentes da imagem conceitual" (TALL e VINNER, 1981, p. 152).

Assim, para cada indivíduo, a imagem conceitual gera a sua própria definição conceitual, pelo que Tall e Vinner (1981) consideram ser possível falar de "imagem da definição conceitual" e, portanto, esta pode ser considerada uma parte da imagem conceitual. Para alguns indivíduos, ela pode estar vazia ou não existir. Para outros, ela pode ou não estar coerentemente relacionada com outras partes da imagem conceitual.

Para exemplificar, Tall e Vinner (1981) usam a definição formal de uma função que, em Matemática, pode ser considerada como "uma relação entre dois conjuntos A e B em que cada elemento de A está relacionado a um e um só elemento de B".

Entretanto, os alunos que estudaram funções podem ou não se lembrar da definição e a imagem conceitual pode incluir muitos outros aspectos, como por exemplo, que a função pode ser dada por uma regra ou fórmula, ou ainda pode ocorrer que diferentes regras podem aparecer em diferentes partes do domínio, nesse caso, o conjunto A.

Existe também a possibilidade da função ser vista como uma ideia de movimento, onde o elemento *a* é levado em *f(a)* no conjunto B e que a função pode ser representada pelo seu gráfico ou tabela de valores, etc. Todos ou nenhum desses vários aspectos podem fazer ou não parte da imagem conceitual do aluno.

É interessante observar que a maneira como Tall e Vinner (1981) tratam tais conceitos tem fundamento na questão pedagógica, pois eles acreditam que a formação da imagem conceitual pode ser fruto do tipo de ensino realizado ou do programa de ensino.

Aqui, mais uma vez, Tall e Vinner (1981) utilizam o exemplo de função, citando que o professor pode fornecer, por exemplo, a definição formal e trabalhar com esta definição durante algum tempo, mas posteriormente, enfocar exemplos que são sempre dados por fórmulas. Nesse caso, a imagem conceitual pode desenvolver uma noção mais restrita, apenas envolvendo fórmulas, enquanto que a definição formal permanece inativa na mente do aluno. Ele pode operar, de forma satisfatória, com essa noção restrita e pode até mesmo dar respostas com a definição formal correta, enquanto que a sua imagem conceitual permanece inapropriada, correndo o risco de se deparar, mais tarde, com o assunto em questão em contextos mais amplos e ser inábil para lidar com tal situação.

Esses autores afirmam que, em geral, é possível encontrar partes da imagem conceitual que entram em conflito com outras partes da própria imagem conceitual ou com a definição conceitual. Esses conflitos podem ou não ser conscientes e podem causar dificuldades ao lidar com conceitos mais formais. A parte da imagem conceitual ou da definição conceitual que pode entrar em conflito com outra parte da imagem conceitual ou da definição conceitual é chamada por Tall e Vinner (1981) de um "fator de conflito potencial". Esses autores consideram que esses fatores podem não ser evocados em circunstâncias que causem um real conflito cognitivo, mas, caso isso ocorra, os fatores daí resultantes serão chamados "fatores de conflito cognitivo".

Para exemplificar tal situação, os autores utilizam a definição de número complexo $x+iy$ como um par ordenado de números reais (x, y) e a identificação de $x+i0 = (x, 0)$, sendo número real x um fator de conflito potencial no conceito de número complexo. Isso acontece porque ele inclui um conflito potencial com a noção da teoria dos conjuntos de que o elemento x é distinto do par ordenado $(x, 0)$. Tall (1977) verificou, mediante um questionário, que os alunos veem o número real $\sqrt{2}$ como não sendo um número complexo e, no entanto, vários desses alunos definiram números reais como sendo "números complexos com parte imaginária zero". Nessa situação, $\sqrt{2}$ é visto como um número real e $\sqrt{2} + i0$ como complexo. Eles são considerados como sendo entidades distintas ou a mesma, convenientemente, dependendo das circunstâncias, sem causar nenhum conflito cognitivo. Apenas se tornam fatores de conflito cognitivo quando evocados simultaneamente.

Ainda conforme esses autores, em algumas situações, os fatores de conflito cognitivo podem manifestar-se apenas no subconsciente, por meio de um vago sentimento de insegurança. Eles sugerem que essa é a causa implícita quando um aluno está resolvendo um problema ou, em uma pesquisa, para o sentimento de que alguma coisa está errada em algum lugar e pode ser que, posteriormente, a razão para o conflito seja conscientemente entendida. Entretanto, Tall e Vinner (1981, p. 154) pontuam o que consideram mais grave na questão dos fatores de conflito potencial:

> Um fator de conflito potencial mais sério é aquele em que a imagem conceitual está em desacordo não com a outra parte do conceito, mas com a própria definição formal do conceito. Tais fatores podem impedir seriamente a aprendizagem de uma teoria formal, pois eles não podem se tornar fatores de conflito cognitivos reais a menos que a definição formal do conceito desenvolva uma imagem do conceito que poderá então, trazer à tona um conflito cognitivo. Estudantes possuindo semelhante fator de conflito potencial em suas imagens conceituais podem estar seguros em suas próprias interpretações das noções em questão e simplesmente considerar a teoria formal como não funcionando ou supérflua.

Assim, a postura do professor é fundamental na forma em que as definições deverão ser trabalhadas, pois para Vinner (1991, p. 65): "A definição representa, talvez mais do que qualquer coisa, o conflito entre a estrutura da Matemática, como concebida pelo matemático profissional, e os processos cognitivos de aquisição de conceito".

Ainda Vinner (1991, p. 68) admite que adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para si mesmo, ou seja, entender significa ter uma imagem conceitual acerca da noção em questão, reforçando que:

> A imagem conceitual é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. As representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais.

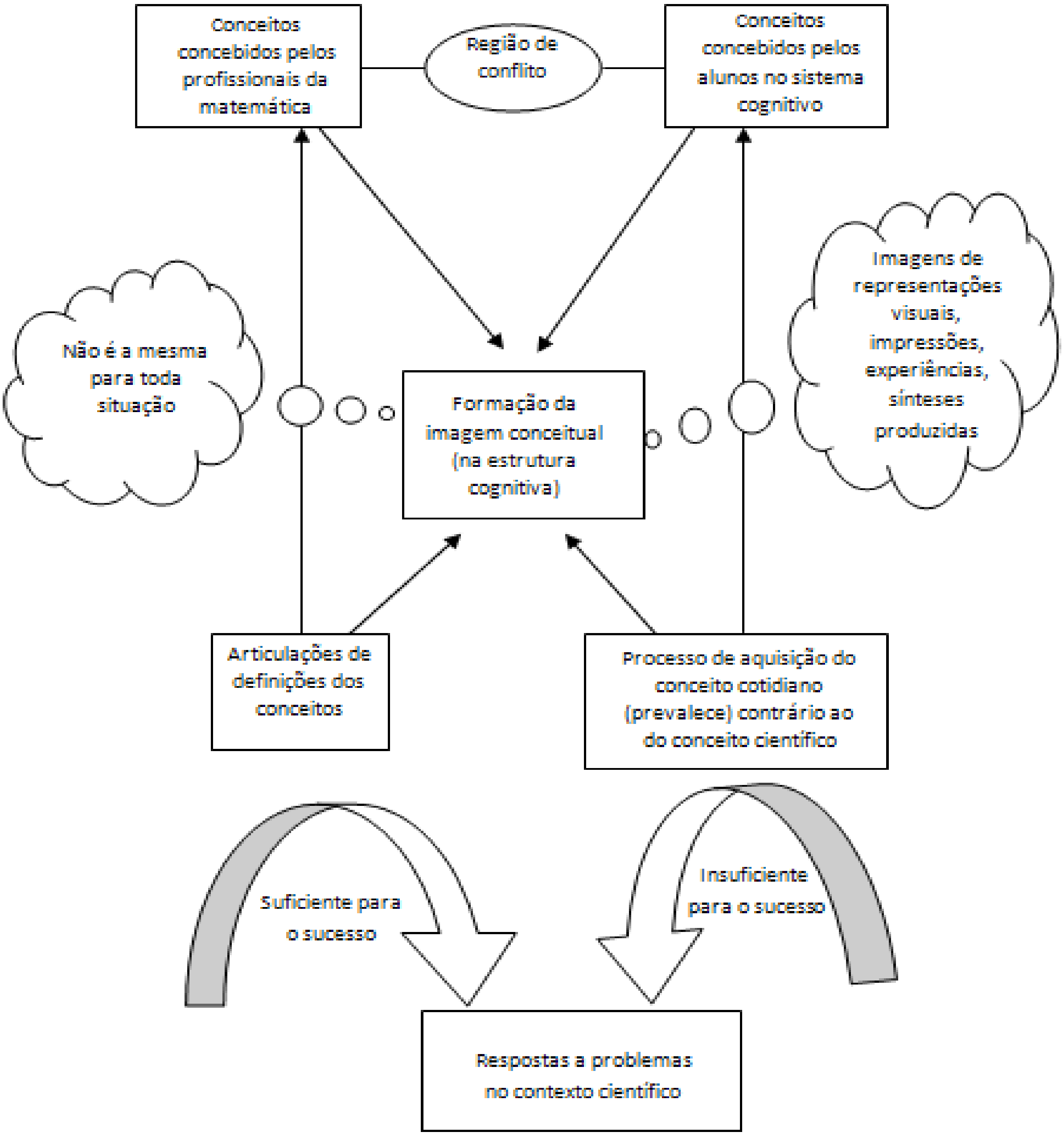
Assumindo também que as formas verbais não são a primeira coisa evocada em nossa memória, mas sim que ocorrem em estágio posterior, para exemplificar, ele utiliza novamente o conceito de função, afirmando que quando um aluno ouve a palavra "função", pode se lembrar da expressão *"y = f(x)",* pode ainda visualizar o gráfico de uma função ou pode pensar sobre funções específicas como "$y = x^2$ ou $y = sen(x)$, $y = lnx$" ou outras.

Conforme já discutido em Tall e Vinner (1981), Vinner (1991, p. 68) diz que: "[...] só é possível falar de imagem conceitual em relação a um indivíduo específico. Além disso, o mesmo indivíduo poderia reagir de modo diferente a certo termo (nome do conceito) em situações diferentes".

Apresentaremos, a seguir, um esquema da imagem conceitual feito por Dias (2007, p. 18), elaborado a partir de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991).

Esse esquema permite uma visualização acerca da imagem conceitual como concebida por seus autores, no sentido de conseguir responder a problemas no contexto científico, ou seja, da aquisição do conceito.

Esquema de formação da imagem conceitual
Fonte: Dias (2007)



Tall e Vinner (1981) discutem alguns tópicos do currículo de Matemática em escolas inglesas que chamaram de "problemas práticos de currículo" afirmando existirem vários destes problemas, limitaram-se à discussão de três destes tópicos: limite de uma sequência $\lim_{n\to\infty} s_n$, limite de uma função $\lim_{x\to a} f(x)$ e continuidade de uma função $f : D \to R$.

Vamos nos limitar a apresentar alguns resultados referentes ao limite de uma função $\lim_{x\to a} f(x)$ que é o objeto de discussão do nosso trabalho.

Tall e Vinner (1981) iniciam mostrando como é feita a abordagem do conteúdo. Inicialmente, os limites de funções são abordados de uma maneira intuitiva, com uma explicação informal; então, em um estágio posterior, uma definição pode ser dada. O processo de limite é primeiramente introduzido a partir da diferenciação $\lim_{\delta x \to 0} \dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ ou em alguma outra notação. Eles afirmam que, muito cedo, as fórmulas usuais para a derivada são deduzidas e a notação geral de limite se reduz ao pano de fundo e, quando é discutida, leva os alunos a formar uma imagem conceitual restrita, considerando apenas o aspecto dinâmico "$f(x) \to c$ quando $x \to a$" ou "*f(x)* se aproxima de *c* quando *x* se aproxima de *a*". Esse tipo de raciocínio pode levar os estudantes a considerarem $f(x) \neq c$ como outra porção da sua imagem conceitual e daí, tais circunstâncias fazem com que o conceito de limite de uma função seja um conflito potencial.

Achamos conveniente, neste momento, destacar Natalia Maria Cordeiro Barroso e outros (2009, p. 106), ao se referirem aos resultados de sua pesquisa sobre definição intuitiva *versus* definição formal de limite:

> Os alunos tentaram encontrar a definição intuitiva dentro da definição formal. Naturalmente, nenhum aluno foi capaz de perceber que entre a definição formal e a definição intuitiva existe uma inversão do processo de aproximação. Na definição formal, não é a variável independente que produz uma aproximação da imagem da função ao limite. De fato, é o grau de aproximação (ao limite) desejado que impõe à variável independente uma condição de limitação a um intervalo.

Embora esses autores não mencionassem nada a respeito, nós inferimos que uma das razões para tal resultado é a formação de uma imagem conceitual restrita acerca do conceito de limite, conforme Tall e Vinner (1981).

5. Apresentando nossas atividades

5.1. Atividade I) Identificando as imagens conceituais e definições conceituais de Limites construídas pelos alunos após cursarem Cálculo

O objetivo desta atividade é levantar as imagens conceituais e definições conceituais construídas pelos alunos acerca do conceito de limite de funções reais de uma variável após cursarem Cálculo, bem como detectar eventuais falhas que porventura tenham ocorrido na construção do conceito e/ou de suas propriedades.

Para tanto, buscamos inicialmente explorar a linguagem natural, associada a expressões matemáticas e a linguagem matemática e gráficos ilustrativos, associados a formulações matemáticas. A seguir, exploramos a visualização e a habilidade gráfica sob condições limítrofes. Por fim, intentamos investigar as imagens associadas à definição formal, incluindo limites infinitos.

A realização da atividade pode ter a duração de 2 (duas) horas/aula, sendo que o Professor de Análise deve procurou não intervir em momento algum. A atividade é composta das seguintes questões:

1) O que você entende pelas expressões?

a) Tender a: ____
____
____

b) Ter limite: ____
____
____

2) Explique com suas próprias palavras o que significa cada formulação matemática abaixo. A seguir, ilustre graficamente cada formulação na reta real:

a) $x \to a$____

b) $x \to a^+$____

c) $x \to a^-$____

d) $x \to \infty$____

e) $x \to -\infty$ ____

3) Explique com suas próprias palavras o que significa cada formulação matemática abaixo. A seguir, esboce um gráfico de uma função que ilustre cada formulação.

a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ____
____

b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$____
____

c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ ____
____

d) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ____
____

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ ____
____

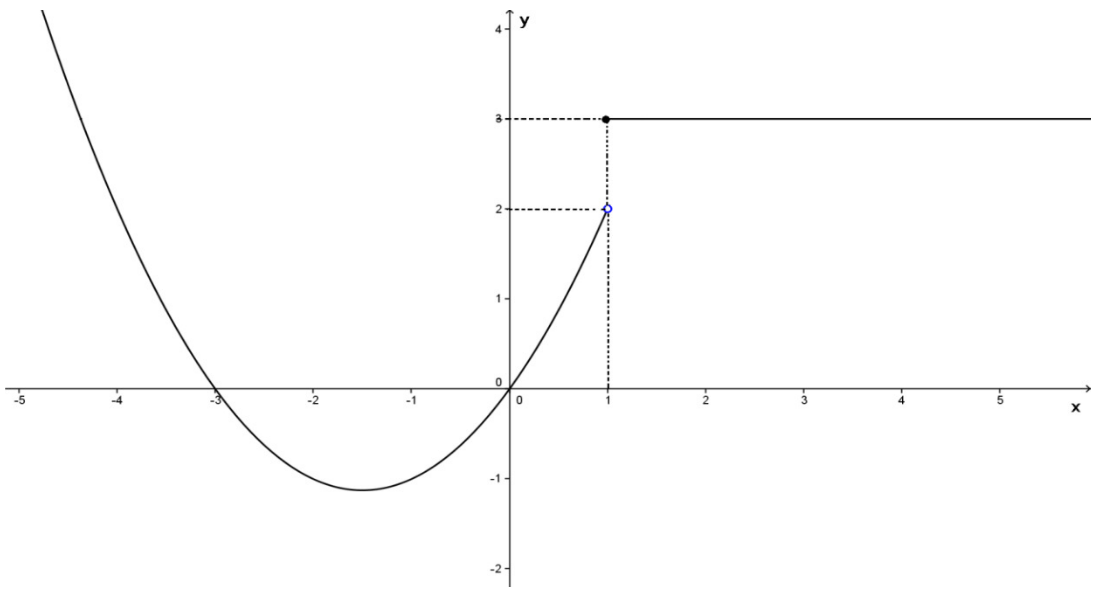
4) Esboce o gráfico de uma função que satisfaça às seguintes condições:

a) $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

5) Com base nos gráficos esboçados abaixo, determine, caso exista:

5.1)



a) $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

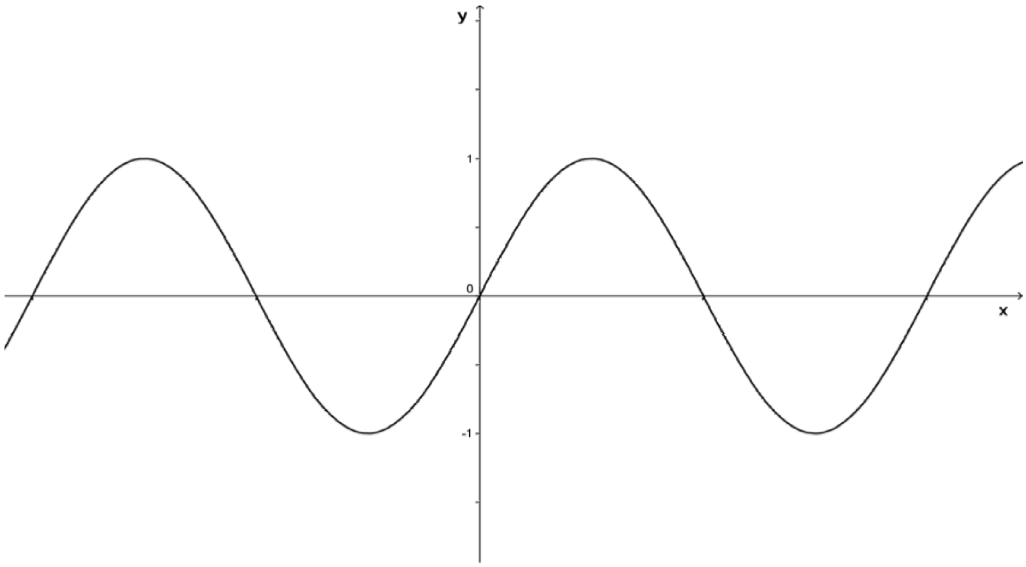
c) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

d) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

f) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

5.2)



a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

6) O que significa cada uma das afirmações abaixo?

a) $Dado\ \varepsilon > 0, real\ qualquer, existe\ \delta > 0\ tal\ que$:
$0 < \left|x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right| < \delta, então\ \left|f(x) - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon.$

b) $Dado\ k > 0, real\ qualquer, existe\ N > 0, tal\ que: x > N \Longrightarrow f(x) > k$

5.2. Atividade 2) Identificando as imagens conceituais e definições conceituais de Limites (re)construídas pelos alunos após cursarem Análise

Após a realização da Atividade I, é fundamental fazer uma avaliação das respostas dadas pelos alunos e, pelo menos nas 8 (oito) horas/aula seguintes, trabalhar os aspectos relacionados ao conceito e às propriedades de limites nos quais os alunos manifestaram maior dificuldade, procurando evidenciar os conflitos potenciais, até que chegue à definição formal de limite.

O objetivo desta atividade é levantar as imagens conceituais e definições conceituais (re)construídas pelos alunos acerca do conceito de limite de funções reais de uma variável após cursarem Análise, bem como ainda tentar detectar eventuais falhas que porventura tenham ocorrido na construção do conceito e/ou de suas propriedades.

Para tanto, inicialmente exploramos a abordagem gráfica sob condições limítrofes. A seguir, buscamos evidenciar os diversos aspectos da definição formal de limite, desde formulações algébricas até interpretações gráficas. Por fim, investigamos a habilidade de uma demonstração simples a partir da definição formal.

A realização da atividade também pode ter a duração de 2 (duas) horas/aula, sendo que o Professor de Análise novamente deve procurar não intervir em momento algum. A atividade é composta das seguintes questões:

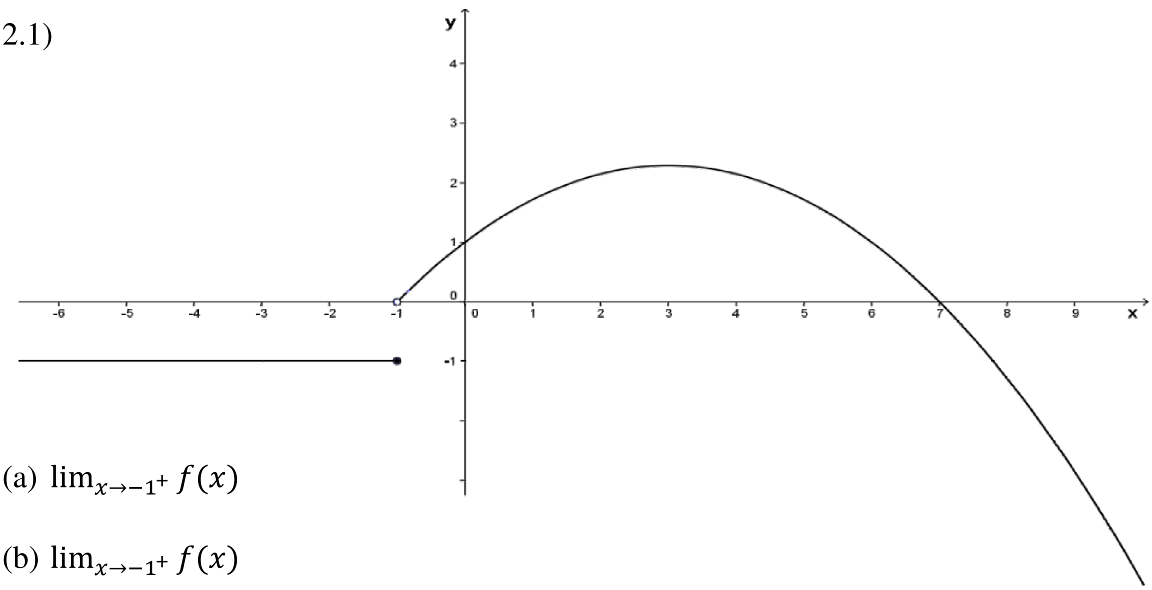
1) Esboce o gráfico de uma função real de uma variável que satisfaça às seguintes condições:

a) $\lim_{x\to -3} f(x) = -1$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = -\infty$

2) Com base nos gráficos esboçados abaixo, determine, caso exista:

2.1)



(a) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

(b) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

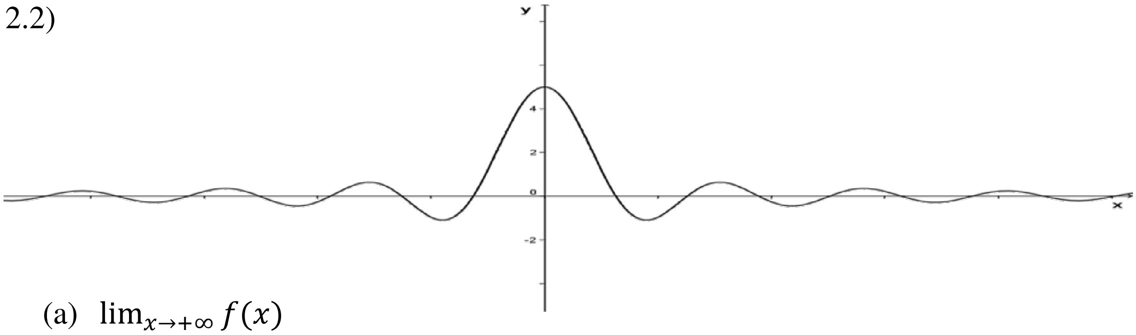
(c) $\lim_{x\to -1} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

(f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

2.2)



(a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

3) O que significa cada uma das afirmações abaixo?

a) Dado $\varepsilon > 0$, real qualquer, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - \pi| < \delta, \text{ então } \left| f(x) - e^{\sqrt{2}} \right| < \varepsilon$$

b) Dado $k < 0$, real qualquer, existe, $N < 0$, tal que:

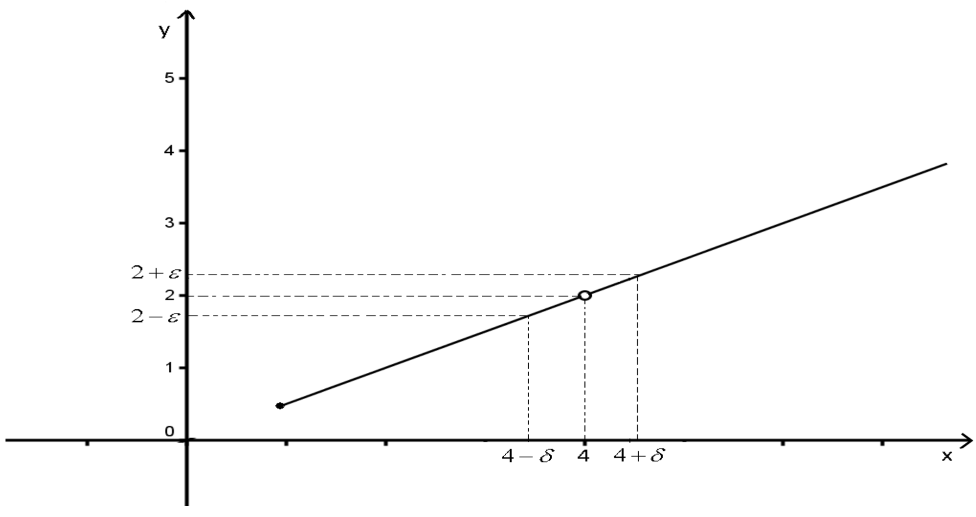
$$x < N \Rightarrow f(x) < k$$

4) Na definição de limite de uma função de uma variável, o que significa:

a) $\varepsilon > 0$, real qualquer

b) $\delta > 0$, real qualquer

5) O que você entende pelo gráfico abaixo, sendo $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, reais quaisquer?



6) Utilizando a definição de limite de funções, mostre que: $\lim_{x \to 4} (2x - 1) = 7$

6. Contribuições para o Professor de Análise

Apresentamos agora, algumas considerações com base em nossa pesquisa de mestrado que originou este trabalho, como forma de elencar algumas contribuições de uma proposta de ensino baseada nas imagens conceituais dos alunos para nós, Professores de Análise em cursos de Licenciatura em Matemática.

6.1. A contribuição para o Professor de Análise entender e situar o momento e a aprendizagem de seus alunos

Como já havíamos discutido, as relações entre professores e alunos, em torno do trabalho com os diversos conteúdos matemáticos, é fundamental, tanto para o sucesso como para o insucesso em uma disciplina (LACHINI, 2001). Também consideramos fundamental a reflexão e compreensão do papel de um determinado conteúdo na formação matemática dos alunos (REIS, 2001), especialmente o conceito de limite, tanto no Cálculo quanto na Análise.

A pesquisa mostrou que o trabalho com as imagens conceituais dos alunos permite a nós, professores, entender e situar o momento em que os alunos se deparam com o ensino de limites agora em Análise e avaliar a bagagem trazida do Cálculo. Os dados evidenciaram que os alunos perpassam todo o curso de Matemática, manifestando dificuldades com as demonstrações e desembocam em Análise, ainda com dificuldades na leitura e interpretação da simbologia matemática.

6.2. A contribuição para o Professor de Análise perceber a importância de identificar e ressignificar imagens conceituais equivocadas e/ou conflitantes

Como já havíamos discutido, há um grande descompasso entre calcular limites e entender seu significado (CORNU, 1991), que já pode ser percebido, ao longo do ensino de Cálculo. Especificamente, no caso de expressões como “tender a” e “ter limite”, a diferença de significados, tanto para alunos quanto para professores, pode aflorar radicalmente no ensino de Cálculo e novamente no ensino de Análise (TALL e SCHWARZENBERGER, 1978).

A pesquisa mostrou que, a partir do trabalho com as imagens conceituais dos alunos, podemos perceber a importância de identificar eventuais imagens conceituais equivocadas que os alunos trazem, as quais podem gerar situações de conflitos, face uma nova possibilidade de aprendizagem. Os dados evidenciaram a necessidade de se ressignificar tais imagens relacionadas aos conceitos de limites, limites laterais, limites infinitos e no infinito.

6.3. A contribuição para o Professor de Análise reconhecer a necessidade de (re)construir imagens conceituais coerentes e que explorem elementos intuitivos

Como já havíamos discutido, questões como rigor e intuição precisam ser levadas em consideração pelos professores, quando se trata de processos de ensino e aprendizagem de conceitos que evocam um pensamento matemático mais elaborado (TALL, 1991). Por outro lado, destacamos a importância da intuição, em complementariedade ao rigor, na formação desse pensamento (REIS, 2009), tanto no Cálculo como na Análise.

A pesquisa mostrou a necessidade de uma (re)construção das imagens conceituais dos alunos, tornando-as coerentes, a partir de elementos intuitivos significativos, especialmente aqueles presentes nos aspectos gráficos. Os dados evidenciaram a possibilidade e os benefícios de se trabalhar com a análise de gráficos também em Análise, já que, tradicionalmente, esse trabalho é realizado somente em Cálculo.

6.4. A contribuição para o Professor de Análise trabalhar na perspectiva de se construir definições conceituais de acordo com as definições formais

Como já havíamos discutido, a definição conceitual, sendo uma forma de palavras utilizadas para especificar um conceito (TALL e VINNER, 1981), representa um elemento importante a ser considerado nos processos de ensino e aprendizagem de matemática, em geral. Por outro lado, consideramos fundamental, especialmente em Análise, o trabalho com a definição formal de limite (BARROSO e OUTROS, 2009) e sua significação.

A pesquisa mostrou o quão é relevante se trabalhar com as definições conceituais, especialmente oferecendo oportunidades aos alunos para que eles escrevam e falem sobre os conceitos. Os dados evidenciaram que, a partir dessas oportunidades, pode-se contribuir para uma evolução da escrita dos alunos com vistas a um processo de ressignificação das definições formais, tal como a definição “epsilônica” de limites.

6.5. A contribuição para o Professor de Análise repensar sua prática pedagógica e planejar suas ações

Como já havíamos discutido, o ensino de Análise tem se caracterizado como uma difícil tarefa (PINTO, 1998) que demanda dos professores uma reflexão sobre seus objetivos e metodologias. Também não se pode perder de vista, especialmente no planejamento da disciplina para o curso de Licenciatura em Matemática, que a Análise é uma ponte entre a formalização dos conceitos e conteúdos que serão ensinados pelo futuro Professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio (BRITO, 2010).

A pesquisa mostrou a urgência de se pensar num ensino de Análise que privilegie a aprendizagem dos alunos e não somente a execução de uma sequência de definições, propriedades e teoremas consistentemente elaborada por autores de livros didáticos. Os dados evidenciaram quão relevante é um planejamento didático-metodológico realizado / implementado nessa perspectiva de um ensino para a aprendizagem.

6.6. A contribuição para o Professor de Análise incentivar uma postura mais crítica e ativa em seus alunos e, assim desmistificar o "horror" à Análise

Como já havíamos discutido, em geral, os alunos recorrem à memorização como forma de "sobrevivência" em Análise (PINTO, 2001), especialmente quando estão fracassando em produzir significados para a teoria formal. Também parece consenso que, no ensino de limite, os alunos se deparam com obstáculos de diversas naturezas relacionados ao infinito, às funções e até mesmo a fundamentos lógico-geométricos (SIERPINSKA, 1985).

A pesquisa mostrou que uma postura mais crítica e ativa dos alunos pode contribuir para a criação de uma nova sala de aula que se constitua num espaço de trabalho, no qual se podem estabelecer novas relações entre professor e aluno. Os dados evidenciaram que os participantes de nossa pesquisa reconheceram um desenvolvimento pessoal, a partir da superação de dificuldades, o que certamente corrobora para uma desmistificação da Análise como disciplina formadora de conceitos fundamentais, tais como números, funções e limites.

Esperamos que este trabalho seja útil para que nós, Professores de Análise, convençamo-nos de que já tarda a necessidade de se repensar / ressignificar o seu ensino, visando a aprendizagem de nossos alunos!

Referências / Bibliografia Recomendada

AVILA, G. S. S. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

BACHELARD, G. **La formation de l´espirit scientifique**. Paris: J. Vrin, 1983.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo.** Brasília: UnB, 1985.

BARROSO, N. M. C.; SOARES, J. M.; MOTA, J. C. M.; NETO, H. B. **Limite: definição intuitiva versus definição formal.** In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 99-109, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 2002.

BRITO, A. B. **Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, 1996.

CORNU, B. **Limits.** In: TALL, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 153-166, 1991.

DIAS, M.S. **Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica.** Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, 2007.

DREYFUS, T. **Advanced Mathematical Thinking Processes.** In: TALL, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 25-41, 1991.

FIGUEIREDO, D.G. **Análise I.** Campinas: UNICAMP, 1996.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil.** In: Zetetiké, ano 3, n. 4. Campinas, p. 1- 37, 1995.

GRAY, E. M.; PINTO M; PITTA, D; TALL, D. **Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary and Advanced Mathematics.** Disponível em: http://dx.doi.org/10.1023/A:1003640204118, 1999. Acesso eletrônico em 12/01/2011.

LACHINI, J. **Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo.** In: LACHINI, J.; LAUDARES J. B. (Orgs.) Educação Matemática: A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, p. 146-190, 2001.

LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica.** Volume 1. São Paulo: Harbra, 1994;

LIMA, E. L. **Análise Real.** Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

LIRA, A. F. **O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com a utilização de objetos digitais.** Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. **Por que Análise Real na licenciatura?** In: Zetetiké, v. 13, n. 23. Campinas, p. 11-42, 2005.

NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos.** In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 43-58, 2009.

PINTO, M. M. F. **Student's Understanding of Real Analysis.** Tese de Doutorado. University of Warwick. England, 1998.

PINTO, M. M. F. **Discutindo a transição dos Cálculos para a Análise Real.** In: LACHINI, J.; LAUDARES J. B. (Orgs.) Educação Matemática: A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, p. 123-145, 2001.

PINTO, M. M. F.; GRAY, E. M. **Difficulties teaching Mathematical Analysis to non-specialists.** Reunião do PME. Recife, Brasil, 1998.

PONTE, J. P. **Investigar a nossa própria prática.** In GTI (Org). Reflectir e investigar sobre a prática profissional. Lisboa: APM, p. 5-28, 2002.

REIS, F.S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado**.** Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

REIS, F. S. **Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise.** In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

REZENDE, W. M**. Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite**. Dissertação de Mestrado. Universidade Santa Úrsula. Rio de Janeiro, 1994.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

SIERPINSKA, A. **Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite.** Recherches em Didactique des Mathèmatiques, 1(6), p. 5-67, 1985.

STEWART, J. **Cálculo.** Volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1994.

TALL, D. **Conflits and catastrophes in the learning of mathematics**. Mathematical Education for Teaching, 2(4), p. 2-18, 1977

TALL, D. O. **The Psychology of Advanced Mathematical Thinking**. In: TALL, D. O. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 3-21, 1991.

TALL, D. O. (Ed.) **Cognitive difficulties in learning Analysis**. Mathematical Association Committee on University Mathematics Teaching. University of Warwick. England, 1985.

TALL, D. O. **Concept image and concept definition**. In: David Tall Home Page. Disponível em: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/conceptimage.html, 2003. Acesso eletrônico em 13/09/2010.

TALL, D. O.; SCHWARZENBERGER, R.L.E. **Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits**. Mathematics Teaching, 82, p. 44-49, 1978.

TALL, D.O.; VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity**. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, 1981.

THOMAS, G, B. **Cálculo**. Volume 1. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

TROUCHE, L. **A Propos de l'Apprentissage des limites de functions dans um environnement calculatrice. Etudes des rapports entre processus d'Instrumentation.** Tese de Doutorado em Didática da Matemática. Université Montpellier II. Sciencies et Techniques du Languedoc, 1996.

VINNER, S. **The role of definitions in the teaching and learning of mathematics**. In: TALL, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer Academic Publisher, p. 65-81, 1991.

ZEICHNER, K.; NOFKE, S. **Practitioner research**. In: RICHARDSON, V. (Org.) Handbook of research on teaching. Washington, DC, p. 298-330, 2001.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via sequência Didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional.** Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2005.

ZUIN, E. S. L. **Cálculo, uma abordagem histórica.** In: LACHINI, J.; LAUDARES J. B. (Orgs.) Educação Matemática: A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, p. 13-38, 2001.

APÊNDICES

Apêndice A – Lista de Exercícios sugerida para o trabalho com Limites baseada nos livros de Cálculo estudados na Dissertação

1) Explique com suas palavras o significado da equação $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$.

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que f(2)= 3?

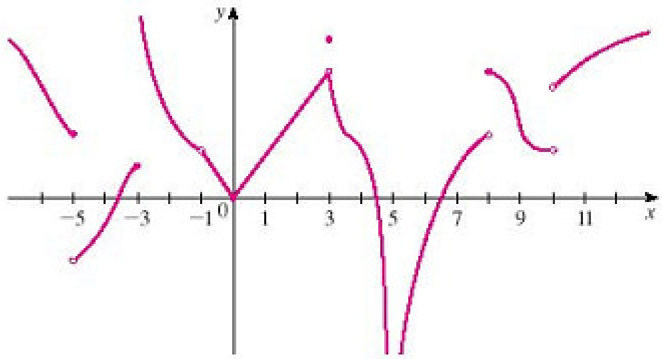
2) Explique o que significa dizer $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 7$. Nesta situação, é possível que $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista?

3) Explique o significado de cada uma das notações a seguir:

a) $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$

4) Use o gráfico da função *f* para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



a) $\lim_{x\to -5^-} f(x)$ d) $\lim_{x\to -3} f(x)$ g) $\lim_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim_{x\to -5^+} f(x)$ e) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ h) $\lim_{x\to 3} f(x)$

c) $\lim_{x\to -5} f(x)$ f) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ i) $\lim_{x\to 5} f(x)$

5) Esboce o gráfico de uma função que satisfaça às seguintes condições:

c) $\lim_{x\to 3} f(x) = -2$; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$;

d) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = -\infty$;

Apêndice B – Lista de exercícios sugerida para o trabalho com Limites

1) O que significa cada uma das afirmações abaixo?

a) $Dado\ \varepsilon > 0, real\ qualquer, existe\ \delta > 0\ tal\ que$:
$0 < |x-5| < \delta, então\ \left|f(x) - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon.$

b) $Dado\ k > 0, real\ qualquer, existe\ N > 0, tal\ que{:}\ x > N \Rightarrow f(x) > k$

Nos exercícios de 2 a 4 são dados f(x), a e L, bem como $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

(a) Determine um δ > 0 para o € dado, tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) Usando as propriedades das desigualdades, determine um δ > 0 tal que a afirmativa acima seja verdadeira para o valor dado de ε.

2) $\lim_{x\to 4}(x-1) = 3\,;\ \varepsilon = 0{,}2$

3) $\lim_{x\to 3}(2x+4) = 10\,;\ \varepsilon = 0{,}01$

4) $\lim_{x\to -1}(3-4x) = 7\,;\ \varepsilon = 0{,}02$

Nos exercícios de 5 a 7, prove que o limite é o número indicado.

5) $\lim_{x\to 4}(2x+1) = 9$

6) $\lim_{x\to -1}(5x+8) = 3$

7) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} = -2$

8) Qual o significado dos termos ε, δ >0, reais quaisquer, na definição de limite?