Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

TRABALHANDO COM RELAÇÕES ENTRE IMAGENS E DEFINIÇÕES CONCEITUAIS DE LIMITES E CONTINUIDADE EM CÁLCULO I

Autor: Prof. Ms. Osvaldo Honório de Abreu

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Ouro Preto

2011

Ao Professor de Cálculo I ou Introdução ao Cálculo

Professor, este material apresenta uma proposta de trabalho com as imagens e definições conceituais de Limites e Continuidade para disciplinas de Cálculo I ou Introdução ao Cálculo em cursos de Licenciatura em Matemática ou outros cursos da área de Ciências Exatas.

A proposta inclui atividades relacionadas a conteúdos de Limites e Continuidade trabalhados em Cálculo:

Atividade 1) Limites;

Atividade 2) Continuidade.

As atividades aqui apresentadas foram desenvolvidas com alunos de duas turmas da disciplina "Introdução ao Cálculo" dos cursos de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto e objetivaram investigar as imagens e definições conceituais manifestadas nos processos de ensino e aprendizagem de Limites e Continuidade.

Também cabe ressaltar que o presente Produto Educacional é fruto da nossa Dissertação defendida junto ao Mestrado Profissional em Educação Matemática do programa de pós-graduação da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulada "Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de Limites e Continuidade em Cálculo I".

Esperamos que esse material contribua para a sua prática pedagógica e, de modo geral, para uma reflexão sobre o ensino de Cálculo I.

Osvaldo Abreu – agosto 2011

SUMÁRIO

1. Iniciando uma discussão sobre o ensino de Cálculo

Há muito que se pesquisar no ensino de Cálculo. Principalmente quando consideramos que na grande maioria das salas de aula o "fazer pedagógico" está, normalmente, direcionado a uma abordagem livresca e centrado no professor cuja função é unicamente transmitir conhecimento a partir de reprodução / memorização seguido de repetição à exaustão de exemplos.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, doravante denominada apenas Cálculo I, está presente no currículo das Engenharias em suas diversas modalidades e nas Licenciaturas em Matemática, Física e Química. O Cálculo I assume um papel fundamental dentro do ensino de Matemática Superior com inserção ainda nas ciências biológicas, com disciplinas de introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, e nas ciências econômicas e sociais, com disciplinas de Cálculo Aplicado.

O ensino de Cálculo tem sido tema de importantes trabalhos. Tradicionalmente ligado a um elevado número de reprovações, tem despertado o interesse de diversos pesquisadores. Frescki e Pigatto (2009, p. 911) citam a contribuição de diversos autores que se concentraram nas dificuldades envolvendo o ensino e a aprendizagem do Cálculo, tais como Cury (2005), Flemming e Luz (1999), Nascimento (2002), Soares e Sauer (2004), Barbosa (2004), os quais apontam problemas que vêm se acumulando desde o ensino básico até culminarem no ensino superior:

> Estes problemas, conforme os pesquisadores supracitados, resultam da forma como os conteúdos de Matemática são estudados nos ensinos fundamental e médio, com muitos "macetes" e fórmulas decoradas, sem compreensão dos conceitos básicos.

De quem é a culpa? Do sistema? Do professor? Do aluno? Dos livros didáticos? Não queremos aqui apontar quem é ou não o culpado, mas sim afirmar que a responsabilidade de mudar esse quadro que aí se encontra é, de fato, de todos que de alguma forma estão envolvidos nesses processos de ensino e de aprendizagem.

Também parece não haver um consenso sobre como significar, de maneira satisfatória, um número reconhecidamente elevado de reprovações nas disciplinas de Cálculo. A abordagem didática tradicional de alguns professores ("binômio quadro-giz") ou até mesmo uma preparação inadequada do aluno no Ensino Médio são temas recorrentes nessas explicações.

Em nossa concepção, qualquer uma dessas explicações, quando consideradas isoladamente, pode ser uma tentativa de reduzir a uma causa única um problema que pode e eventualmente tem, múltiplas explicações. Seria simples, ou até mesmo simplório, avaliarmos segundo apenas uma única perspectiva. O aspecto algorítmico e repetitivo do ensino de Cálculo também aparece na conclusão de alguns destes estudos. Segundo Frota (2001, p. 91):

> Parece haver consenso que o ensino da Matemática precisa libertar-se das amarras de um ensino passo a passo, que conduz a aprendizagem de procedimentos e não incentiva ao conhecimento matemático relacional que leva ao indivíduo a estabelecer, sempre mais, novas conexões entre os vários conceitos estudados.

Sobre esse aspecto, acreditamos que a repetição à exaustão de um exercício (ou um grupo deles) pode ser de pouca ajuda no desenvolvimento das habilidades do estudante; principalmente se esse procedimento estiver dissociado de algum contexto que seja significativo para o aluno.

Ainda em relação ao procedimento, temos a contribuição de Barufi (1999, p. 162):

> A fim de minimizar o insucesso na construção do conhecimento significativo, a saída, muitas vezes adotada, é a de privilegiar a aplicação do cálculo, apresentando um grande número de problemas e exercícios, muitas vezes repetitivos, onde o aluno acaba memorizando, de alguma forma, processos de resolução. Nesse sentido, reduz-se a ideia, o conceito, ao algoritmo e sobra aquela eterna pergunta dos estudantes, não respondida e "odiada" pelos professores: Pra que serve isto?

Ainda preocupada com a questão do aspecto procedimental em detrimento do aspecto significativo da atividade, e focando em uma das múltiplas interpretações para o conceito de derivada, Meyer (2003, p. 4) destaca:

> Tenho observado que muitos de nossos alunos, após cursarem a disciplina Cálculo I, são capazes de determinar a função derivada de diversas funções, utilizando-se de regras e procedimentos algébricos, ou mesmo, de reproduzir a definição formal da derivada de uma função. Mas, freqüentemente, produzem significados para este conceito que não são compartilhados pela comunidade matemática e, portanto não correspondendo aos significados pretendidos pelo sistema educacional. Quando um estudante associa a aplicação de regras e procedimentos ao conceito de derivada, o que é bastante frequente em nossos cursos de Cálculo, tal processo de significação não o impede de ter sucesso na realização de tarefas ditas operatórias, mas pode contribuir para o insucesso na realização de tarefas que envolvam aspectos conceituais.

Destacamos essa dicotomia envolvendo o procedimento e a significação, pois como veremos adiante, ela será de crucial importância em nosso trabalho.

Em nossa experiência como professor e também como aluno, pudemos atestar em grande parte, os problemas aqui levantados. Atuando na docência de Cálculo I, percebemos que os alunos têm realmente uma grande facilidade com exercícios que requerem, para a sua resolução, tão somente a repetição do processo de um “exemplo resolvido”. Normalmente, após a explicação teórica temos, por parte dos alunos, a solicitação da resolução de um exemplo. Notamos que, aparentemente, a maior parte destes alunos não se apropriou dos conceitos envolvidos na resolução do exercício. O exemplo serve apenas como um “receituário” para que eles possam resolver outros exemplos semelhantes; e por “semelhante” nos referimos a praticamente o mesmo exercício, mudando apenas alguns poucos dados. Qualquer atividade que extrapole esta possibilidade se constitui em uma fonte de grandes dificuldades.

Tal prática se torna mais evidente em disciplinas onde os conceitos do Cálculo I precisam ser realmente aplicados e, mais ainda, interpretados. Na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, por exemplo, o conceito de “taxa de variação” é tratado pelo aluno de forma totalmente desvinculada do conceito de derivada. A maior parte dos alunos não relaciona a derivada, que foi previamente “aprendida” por repetição à exaustão, com o conceito de taxa de variação de uma função.

Ainda que tenhamos, como professor, a preocupação de, quando possível, evitarmos a aplicação de listas com exercícios repetidos à exaustão, notamos que os esforços neste sentido se tornam inócuos ou pouco efetivos. Quando as atividades propostas precisam ser contextualizadas e interpretadas, o que, em nosso entendimento constituem as atividades de maior possibilidade didática, alguns alunos simplesmente “copiam” a resolução dos exercícios. Normalmente, esses alunos assim o fazem como uma tentativa de solução reducionista pensando em generalizações que possam ser aplicados em exercícios que, no seu entendimento, possam ser semelhantes. A proposta do aluno seria a de se concentrar no método de resolução e não na idéia da solução.

Em atenção a esse comportamento dos alunos, temos a contribuição de Pinto (2001, p. 125) cuja pesquisa foi voltada para o ensino de Análise Real, mas que, em nosso entendimento, consegue depreender o comportamento típico de alguns alunos de Cálculo I que buscam no procedimento uma forma única de aprendizagem:

> Estudantes são provenientes de um sistema educacional onde o ensino de Matemática está principalmente centrado em cálculos e na manipulação de símbolos, bem como na exploração de conceitos a partir de suas propriedades. A análise formal passa a requerer dos alunos um trabalho com definições que envolvem quantificadores múltiplos e lógica proposicional. Estudantes podem fazê-lo como se estivessem iniciando uma construção nova, compartimentalizada das imagens prévias deixando a reconciliação com as experiências anteriores para depois, ou, partindo do conhecimento prévio, reconstruindo-o.

Como professores de Cálculo, não podemos também deixar de assumir a parcela de culpa que nos cabe neste processo. Onuchic (2009, p. 171) assim nos apresenta:

> Sempre houve muita dificuldade para se ensinar Matemática. Apesar disso, todos reconhecem a importância e a necessidade da Matemática para se entender o mundo e nele viver. Como elemento mais importante para se trabalhar a Matemática é o professor de Matemática e este não está sendo bem preparado para desempenhar bem suas funções, as dificuldades nesse processo têm aumentado muito.

Novamente Onuchic (2009, p. 173) retorna à prática pedagógica de alguns professores e, em especial, à sua possibilidade de capacitação, de forma ainda mais incisiva:

> Sabe-se que a visão da sala de aula de Matemática, apresentada pelos documentos e que promove mudanças radicais na prática, requer uma forte re-educação dos atuais professores. Embora uma implementação adequada requeira mudanças políticas e estruturais, a natureza do desenvolvimento profissional do qual os professores participam, fortemente determinará a extensão da mudança que os alunos experimentaram em sala de aula.

Ainda questionando a prática pedagógica dos professores de Cálculo, Reis (2001, p. 23) reafirma:

> A prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver.

Acreditamos que tais questões devem ser objeto de reflexão por parte de todos os “atores” dos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo: nós, professores, que devemos refletir / repensar o papel do Cálculo na formação matemática de nossos alunos; e alunos, que devem refletir / reconhecer a importância da construção dos conceitos do Cálculo para sua formação matemática.

2. Alguns estudos sobre o ensino de Cálculo e de Limites e Continuidade

Não tendo a pretensão de esgotar o assunto, vamos apresentar alguns trabalhos sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Após uma breve abordagem em nossa introdução, retomamos esta discussão selecionando alguns trabalhos que julgamos representativos frente às dificuldades do ensino e da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo aqui é destacar as dificuldades com o Cálculo e, principalmente, mostrar como o assunto vem sendo discutido de forma recorrente em trabalhos e como tema em congressos. Concluímos com alguns trabalhos relacionados especificamente ao ensino e aprendizagem de Limites ou Continuidade.

Cury (2009, p. 223), ao comentar as dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo, o faz de maneira direta e contundente associando àquelas o alto índice de evasão dos alunos em alguns cursos:

> As dificuldades encontradas por professores e alunos de Cálculo Diferencial e Integral estão entre as principais causas apontadas para a excessiva desistência e evasão encontradas em curso superiores da área de Ciências Exatas. Pesquisas sobre o ensino de Cálculo vêm sendo apresentadas em comunicações, dissertações e teses ao longo das últimas décadas, mas seriam necessários mais estudos sobre o tema para que pudéssemos vislumbrar mudanças nos cursos.

Cury (2009, p. 223) também destaca a quantidade de trabalhos voltados para as questões que envolvem as dificuldades no ensino e na aprendizagem do Cálculo:

> Fiorentini (1993) mostrou que, na produção brasileira de pós-graduação em Educação Matemática até 1991, apenas 19% das dissertações ou teses enfocavam o ensino superior. Dos 65 estudos sobre tópicos específicos do currículo, identificados por Fiorentini (1993), 15 envolviam o estudo de disciplinas do ensino superior e, destes, 10 tratavam do Cálculo Diferencial e Integral. A partir de então, com o aumento do ingresso de estudantes em instituições de ensino superior nos últimos dez anos, as dificuldades relativas à aprendizagem de Cálculo foram se tornando mais freqüentes e preocupantes, pois evidenciavam a falta de conhecimentos prévios ou a compreensão equivocada de assuntos estudados nos níveis anteriores. A divulgaão dos anais de congressos das áreas de Matemática Aplicada, Engenharia e Educação Matemática permite analisar os assuntos abordados e nota-se que a maior parte dos trabalhos sobre ensino superior se relacionam ao Cálculo.

Destacamos essa contribuição com o intuito de mostrar que o tema, de acordo com a autora, já se apresentava de forma recorrente em vários estudos. Notemos ainda que, apesar dessas contribuições, não se nota uma mobilização dentro da sala de aula. Estamos cientes das dificuldades e dos problemas envolvidos, mas aparentemente impotentes para promovermos mudanças substanciais em nossa prática pedagógica.

Algumas instituições que mantêm cursos na área de Ciências Exatas já sinalizam com mudanças. A disciplina de Cálculo I, normalmente ministrada no primeiro período, já tem sido precedida pelo chamado “Cálculo 0” (como uma disciplina específica, deslocando o Cálculo I para o semestre seguinte, ou até mesmo como um curso de nivelamento em horário extra curricular). Entendemos essa mudança como extremamente benéfica para o aluno e para o curso e apenas lamentamos que ainda não seja adotada em instituições que , devido ao alto índice de reprovação em Cálculo I, talvez pudessem se beneficiar dessa prática.

Nasser (2009, p. 43) cita diversos pesquisadores como Baldino (1995), Giraldo (2004), Tall (1991), Cury (2003) e Igliori (2003), e destaca a preocupação deles com o desempenho dos estudantes nas séries iniciais dos cursos que envolvem o estudo do Cálculo:

> Muitos trabalhos de pesquisa, nacionais e internacionais, têm ressaltado as dificuldades dos alunos nos ciclos básicos das universidades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. No grupo de Educação de Matemática no Ensino Superior (GT4) do I, II e III Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), houve uma predominância de artigos de pesquisa sobre a aprendizagem de Cálculo. Os índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo são, em geral, muito altos, prejudicando o rendimento dos estudantes e atrasando seu curso universitário. Rezende (2003) e Baruffi (2009) estão entre os pesquisadores brasileiros que se preocupam com o baixo desempenho dos alunos em Cálculo, mas isso não é prerrogativa dos universitários brasileiros: há uma preocupação mundial com o fracasso em Cálculo, a qual deu origem ao movimento conhecido como “Calculus Reform”, na década de 80.

Ainda que a dificuldade da aprendizagem do Cálculo possa ter diversas causas, Igliori (2002) remete-se a Brousseau, que distingue três tipos de obstáculos à aprendizagem: um que se refere a limitações do próprio sujeito, que o autor se refere como sendo de origem ontogênica; outro que o autor diz como sendo de origem didática e que depende das experiências de aprendizado vivenciadas; finalmente aqueles de ordem epistemológica e que seriam inerentes ao conhecimento.

A partir desse trabalho de Igliori (2002), Nasser (2009, p. 43) destaca ainda, algumas reflexões acerca dos obstáculos na aprendizagem:

> - as concepções que ocasionam obstáculos no ensino da matemática são raramente espontâneas, mas advindas do ensino e das aprendizagens anteriores;
>
> - os mecanismos produtores de obstáculos são também produtores de conhecimentos novos e fatores de progresso;
>
> - o obstáculo está relacionado a um nó de resistência mais ou menos forte segundo os alunos, de acordo com o ensino recebido, pois o obstáculo epistemológico se desmembra frequentemente em obstáculos de outras origens, notadamente didáticos.

A apresentação desses trabalhos nos permite acreditar na relevância de nossa pesquisa. A preocupação com o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral é tema recorrente e objeto de estudo de várias pesquisas, como evidenciamos.

Especificamente, agora tentaremos delinear alguns estudos focados no ensino de Limites e Continuidade, tema específico de nossa investigação.

Começaremos destacando a dificuldade no ensino de Limites a partir da dificuldade, até mesmo histórica, de conceituá-lo de maneira formal. Conforme apresentado anteriormente, a noção intuitiva para limite acompanhou todo o desenvolvimento do Cálculo desde os trabalhos na Grécia Clássica até Newton. Não devemos esquecer que, até este último, apesar de sua inegável contribuição para o desenvolvimento do Cálculo, também teve dificuldade em apresentar a noção de limite e, nos seus primeiros trabalhos, teve que enfrentar duras críticas às suas primeiras publicações que tratavam do assunto.

Grosso modo, o ensino de Limites apresenta uma dificuldade que Cornu (1983) chamou de epistemológica. Neste primeiro contexto, temos o que poderíamos chamar de dificuldade inerente ao conceito de limite. Independente de qual maneira ou até o mesmo qual público pretendemos alcançar, o conceito de limite é, em si, complexo ao ser ensinado. Por sua vez, Tall (2002) destaca que os processos mentais requeridos para esta compreensão demandam certo amadurecimento cognitivo. Posteriormente, vamos destacar a chamada *deep intuition* (intuição profunda, em tradução livre) que, ao ser aplicada ao conceito de limite, irá requerer do aluno, uma compreensão que transcende sua definição pura e simples.

Normalmente, o conceito de limite aparece no primeiro período nos cursos de Licenciatura em Matemática e em cursos de Engenharia e, invariavelmente, são abordados como um pré-requisito necessário para a compreensão do cálculo das derivadas e das integrais. Vamos avaliar alguns livros de Cálculo oportunamente, mas vemos que, normalmente, o assunto é introduzido de maneira bastante intuitiva e, posteriormente, apresenta-se a definição formal. Naquele primeiro momento, costuma-se trabalhar conceitos como “estar próximo de” ou “tender para” e a representação gráfica é a mais utilizada.

Notemos que, se não abordada de maneira adequada, podemos pecar aqui com um excesso de informalidade e contribuir para a construção de uma imagem conceitual por vezes equivocada pelo aluno. Os termos utilizados nesta exposição costumam, quando utilizados no cotidiano, diferirem sobremaneira quando aplicados a conceitos matemáticos. Celestino (2008) nos traz a seguinte contribuição:

> Nós usamos palavras ou frases como convergência, fronteira, arbitrariamente próximo, tende a, e limite, quando trabalhamos com limites de funções. Os significados cotidianos dos termos podem influenciar as percepções dos estudantes sobre estes termos em um contexto matemático. Há uma ambigüidade na maneira como o conceito de Limite pode ser percebido. Pode-se focar no processo de aproximar o limite e, então, considerá-lo como um procedimento que nunca chega ao fim. Mas pode-se pensar no Limite como uma entidade estática com a quais funções podem ser comparadas.

Quando apresentamos o conceito de limite, utilizando a definição formal $\varepsilon - \delta$, não há como negar a complexidade que essa notação apresenta e, principalmente, o que o aluno necessita para compreendê-la. Zuchi (2005, p. 19), por exemplo, refere-se à noção de limite como sendo abstração forte e que esta deveria ser adiada para momento mais oportuno.

Já em relação ao ensino de Continuidade, na perspectiva do Cálculo, alguns pesquisadores (REIS, 2001, 2009) destacaram também as dificuldades em relação à abordagem do conceito e a definição formal, mesmos pontos já apontados no ensino de Limites.

3. Sobre Imagem Conceitual e Definição Conceitual

Diferentemente do que o senso comum nos apresenta, a construção de uma ideia ou a apropriação de um novo conceito não se dá de forma completamente linear em nosso cérebro. Ainda que o cérebro tenha uma identificação estreita com uma estrutura puramente lógica, seu funcionamento não é propriamente lógico. Quando evocamos um conceito qualquer ou quando vamos nos apropriar de uma nova informação, e aqui podemos incluir os conceitos e as informações matemáticas, o fazemos de maneira complexa e acionamos diferentes partes de nosso cérebro ao mesmo tempo. Existe toda uma estrutura cognitiva extremamente complexa para a apropriação desta nova informação. Nosso cérebro evoca diferentes imagens para se apropriar deste novo conceito, acionando toda uma rede complexa de imagens, definições pré-estabelecidas e saberes prévios para compreendermos esta nova informação.

Vamos recorrer às idéias de David Tall e Shlomo Vinner para lançarmos uma luz sobre esta complexa rede de informação acionada pelo nosso cérebro, ainda que nosso trabalho não pretenda elucidar todo o aspecto cognitivo que implica essa aquisição do conhecimento. Nosso objetivo é tão somente evocar os conceitos de “imagem conceitual” e “definição conceitual” conforme propostos por esses pesquisadores, para uma melhor compreensão da forma como nos apropriamos de um novo conceito matemático.

Consideraremos, no presente trabalho, as ideias de Tall e Vinner (1981) sobre imagem conceitual nas quais nos apoiaremos fortemente:

> Usaremos o termo *imagem conceitual* para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Esta é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo amadurece e se depara com novos estímulos e amadurece.

Cabe destacar que a imagem conceitual é individual e dinâmica e vai sendo modificada com o tempo. A forma como cada um de nós constrói sua imagem para um dado conceito é muito particularizada e está sempre impregnada de valores e referências que são pessoais. Por outro lado, ela é também dinâmica e varia com o tempo. Novas imagens vão sendo agregadas às anteriores modificando-as e revestindo-as de um caráter dinâmico.

Consideraremos também, no presente trabalho, as ideias relacionadas à definição conceitual de Meyer (2003, p. 6), a qual também se baseou em Tall e Vinner (1981):

> O termo definição conceitual é utilizado para indicar a forma verbal utilizada pelo indivíduo para especificar um conceito. Esta definição conceitual pode ser aprendida pelo indivíduo de uma forma rotinizada ou de uma forma mais significativa, relacionando-a em maior ou menor grau com a definição formal do conceito científico. Pode também constituir uma reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenham

> necessariamente significados coincidentes. Neste caso, a definição conceitual é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua imagem conceitual (evocada).

Interessante é que, principalmente em função de como foi processada a imagem conceitual, a definição conceitual pode diferir da definição apresentada formalmente. O aluno (re)constrói sua definição conceitual permeada pelas suas imagens conceituais previamente estabelecidas.

Notemos que a definição conceitual é uma forma de descrever em palavras um conceito. Podemos então evocar, para uma dada definição conceitual, imagens conceituais diferentes e, mais ainda, até mesmo conflitantes. O aluno pode sem o perceber, ter construído imagens conceituais conflitantes para uma mesma definição conceitual e não detectar o equívoco até ter a oportunidade de evocar as duas imagens em uma mesma situação.

No ensino de Cálculo, várias vezes nos deparamos com situações de sala de aula que evocam diferentes manifestações de intuição e de rigor e várias perspectivas de construção de imagens e definições conceituais.

Especificamente, no ensino de limites podemos destacar os cálculos procedimentais que muitas vezes são guiados intuitivamente, mas sem a construção de significados para as operações envolvidas. Seria esta uma situação em que falta o "rigor"?

Também no ensino de continuidade, vale destacar os inúmeros exemplos e gráficos trabalhados visando a reelaboração da imagem conceitual. Entretanto, nesse processo estaria ocorrendo também uma reelaboração da definição conceitual?

Intentando buscar algumas respostas a tais questões, apresentamos algumas atividades que visam identificar algumas imagens e definições conceituais relacionadas a Limites e Continuidade.

4. Apresentando nossas atividades

Como as noções de rigor e intuição permearão a análise dos resultados para que possamos estabelecer, se possível, uma relação entre os conceitos (imagem e definição) e os tratamentos (intuitivo ou rigoroso) desprendidos pelos alunos, a proposta de nossas atividades envolve habilidades em que poderemos avaliar tais noções.

Nessas atividades, em função da questão de investigação proposta, partimos de aspectos que envolvem / evocam a intuição dos alunos para aspectos que descrevem /

demonstram o rigor dos alunos na construção dos conceitos de “Limites e Continuidade”. Isto pode ser notado quando exploramos, ao final de cada atividade, a capacidade dos alunos de, não mais “descrever” os conceitos envolvidos, mas de “defini-los” formalmente.

4.1 Atividade 1 – Limites

Questão 1: Escrevendo com suas palavras...

Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números nem simbologia matemática, o que você entende por:

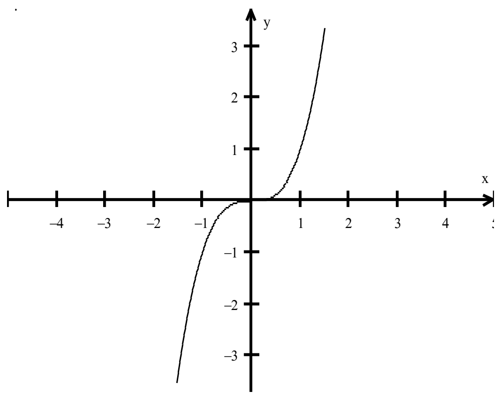
a) uma função tem limite quando a variável independente tende a um certo valor.

b) uma função tem limite infinito quando a variável independente cresce indefinidamente.

Questão 2: Do gráfico para o cálculo...

Com base nos gráficos determine, caso exista:

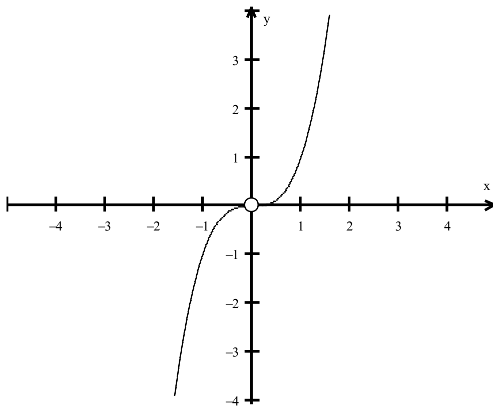
a)



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

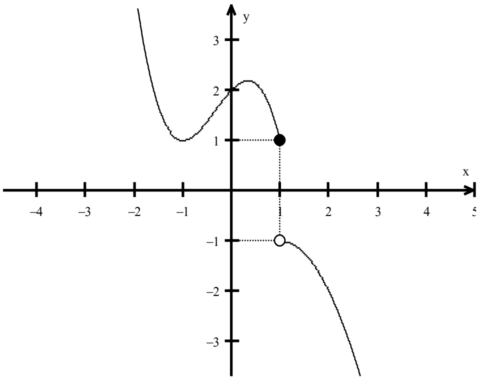
b)

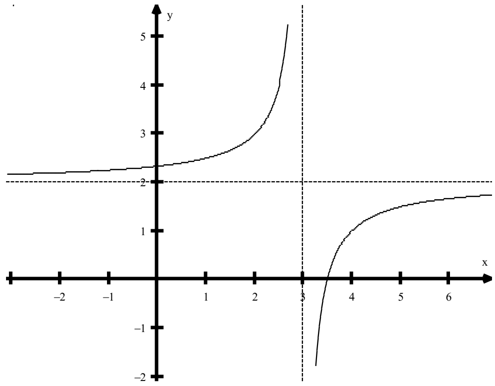


$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

c) d)





c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

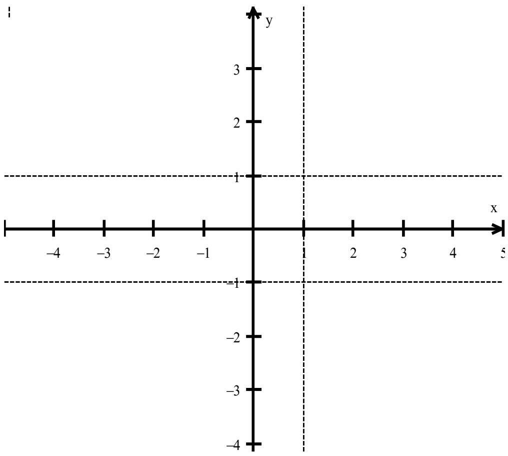
Questão 3: Do cálculo para o gráfico...

Construa o gráfico de uma função com as seguintes propriedades:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$



Questão 4: Tentando escrever rigorosamente...

De acordo com as definições precisas de limites, o que significam as afirmações:

a) para todo $\varepsilon > 0$ real dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $0 < |x - 4| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

b) para todo $M > 0$ real dado, existe $N > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $x > N$, então $f(x) > M$.

4.2 Atividade 2 – Continuidade

Questão 1: Escrevendo com suas palavras...

Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números nem simbologia matemática, o que você entende por:

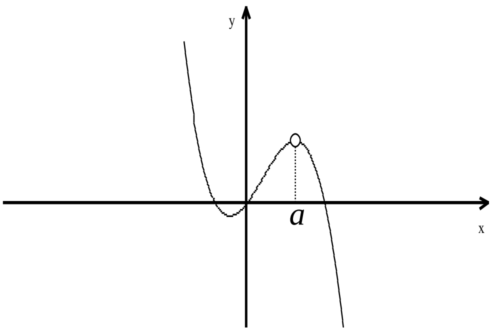
a) uma função é contínua para um certo valor da variável independente.

b) uma função é contínua.

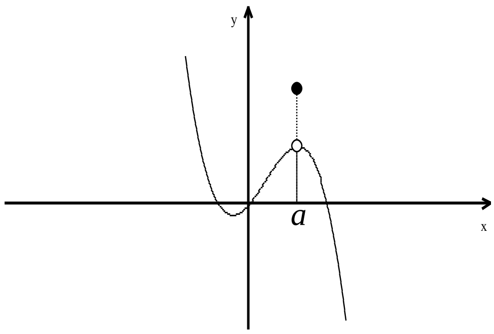
Questão 2: Do gráfico para o cálculo...

Determine se a função é contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$. Caso seja descontínua, justifique.

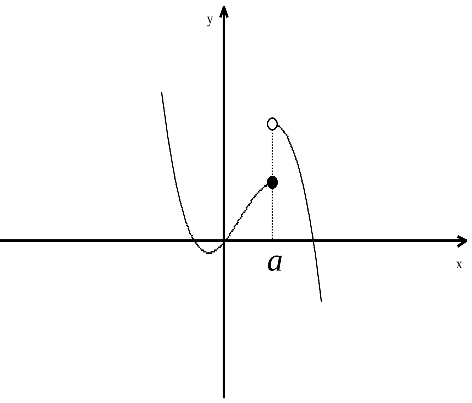
a)



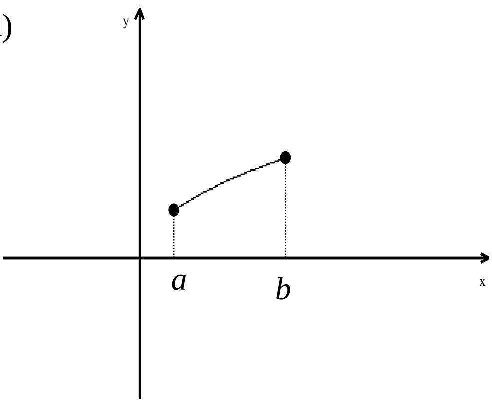
b)



c)



d)



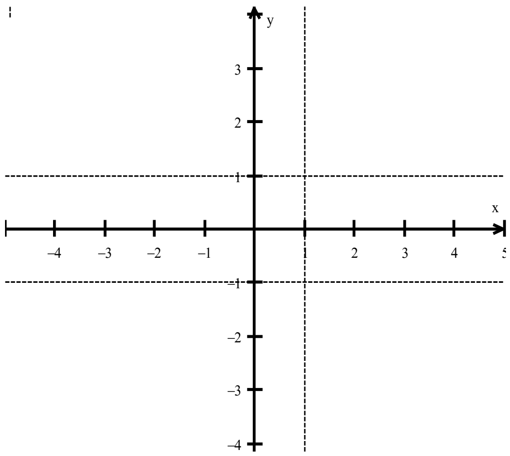
Questão 3: Do cálculo para o gráfico...

Construa o gráfico de uma função com as seguintes propriedades:

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ $f(1) = -1$

$f(-1) = 1$ *f(x)* é contínua em *x=0*



Questão 4: Tentando escrever rigorosamente...

De acordo com as definições precisas de continuidade, o que significam as afirmações:

a) existe $f(\pi)$, existe $\lim_{x \to \pi} f(x)$ e $\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi)$.

b) para todo $\varepsilon > 0$ real dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D(f)$ e $|x - 4| < \delta$ então $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$.

5. Algumas sugestões feitas aos Professores de Cálculo I

Cientes que devemos respeitar a autonomia do profissional do Ensino Superior em sala de aula, incluindo a capacidade de repensar sua metodologia de acordo com a necessidade de seus alunos, ainda assim, a partir dos resultados apresentados em nossa pesquisa, julgamos procedente apresentar algumas considerações que intentam servir como uma fonte de reflexão para o Professor de Cálculo:

- Procure sempre revisitar as imagens conceituais que estão sendo construídas pelos seus alunos, ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, propondo atividades que primem pela diversidade de abordagens. Nesse sentido, ainda que acreditemos ser oportuno em algumas situações, a realização de exercícios de um padrão mais repetitivo, propomos uma reflexão no sentido de evitá-los, quando possível, estimulando de maneira criativa uma maior transição entre as diversas representações (gráfico-algébrica e algébrico-gráfica), a fim de enriquecer as imagens conceituais evocadas pelos alunos durante os processos de sala de aula;

- Procure fazer com que seus alunos escrevam sobre aquilo que estão entendendo, evidenciando assim suas definições conceituais e estimulando-os a explicar "como" aplicam a teoria na resolução de problemas/exercícios. Isso possibilita ao professor uma maior flexibilidade ao abordar a definição formal, além de incentivar os alunos a consultar a "célula" da definição conceitual envolvida nas atividades e até mesmo modificá-la quando necessário, em caso de conflitos com definição formal;

- Valorize a realização de atividades que abordem a transição algébrico-gráfica como forma de valorizar as diversas vertentes intuitivas presentes na abordagem dos temas e que, tradicionalmente, não são exploradas pelos livros didáticos. Atividades nesse sentido podem ajudar o aluno a compreender a importância de se evocar uma definição conceitual e confrontá-la com suas imagens conceituais, evitando assim, obstáculos na aprendizagem. Exercícios que exploram aspectos construtivos de limites e continuidade podem ser uma grande fonte de inspiração para a valorização de uma intuição profunda, no sentido de compreender os conceitos matemáticos com multiplicidade de significados e propriedades;

- Não exagere nas definições e demonstrações rigorosas, principalmente se essas forem apresentadas de maneira mecanizada e sob um aspecto totalmente procedimental. Se uma demonstração não puder ser significativa para os alunos e, mais importante ainda, ser ilustrada, até mesmo com exemplos numéricos, tal demonstração pode ser muito mais um "exercício de ensino" para o próprio professor do que uma "atividade de aprendizagem" para os alunos. Especificamente, em limites e continuidade, as definições e demonstrações envolvendo a notação $\varepsilon - \delta$, mostram-se totalmente incapazes de evocar imagens conceituais significativas.

Por fim, lembramos a reflexão de Reis (2009, p. 93) acerca do chamado "rigor acadêmico" o qual, segundo o autor, é dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos científicos, mas que não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino:

> Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é, rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos; etc).

Assim, concluímos nosso produto, esperando que ele seja uma fonte agradável de leitura para Professores de Cálculo que querem e ousam refletir sobre sua prática pedagógica.

Referências / bibliografia sugerida

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário nicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. USP. São Paulo, 1999.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Coleção Tendências em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BICUDO, I. **Análise não-standard**. Boletim de Educação Matemática (8), p. 60-67, 1992.

BRITO, A. J.; CARDOSO, V. C. **Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do Cálculo Diferencial: reflexões metodológicas**. Zetetiké, 5 (7), p. 129-144, 1997.

CELESTINO, M. R. **Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior**. Tese de Doutorado em Educação. PUC-SP. São Paulo, 2008.

DOMINGOS, A.M.D. **Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados – A Matemática no Início do Superior**. Tese de Doutorado em Ciência de Educação, Universidade Nova de Lisboa. Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking processes**. In: TALL,D.O. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer, p. 95-123, 1991.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1995.

FLEMMING, D. M.; BUSS, M. **Cálculo A**. São Paulo: Makron Books, 2006.

FRESCKI, F. B.; PIGATTO, P. **Dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: proposta de um curso de nivelamento**. In: Simpósio Nacional de Iniciação Científica, I, Curitiba, 2009. Anais... Curitiba: UTFPR, p. 910-917, 2009.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

FREUDENTHAL,H. **Mathematical Rigour**. In: Mathematical as an Educational Task. Netherlands: D. Reidel Publish, 1973.

FROTA, M. C. R. **Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo**. In: LACHINI, J.: LAUDARES, J. B. (Orgs.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, p. 89-121, 2001.

HERSCOVICS,N.;BERGERON.J.C. **A Constructivist vs. Formalist approach in the Teaching of Mathematics**. In: B. Sowthwell et all. Proceeding of the Seventh Internacional Conference of PME. Sydney: University of Sydney, p. 190-196, 1984.

HUGHES-HALLET, D. et all. **Cálculo de uma variável** .Rio de Janeiro,2004.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual**. Tese de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP. São Paulo, 2003.

NEVES, J.L. **Pesquisa Qualitativa: Características, Usos e Possibilidades**. Caderno de Pesquisas em Administração. São Paulo, v. 1. n. 3, 1996.

NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos**. In: FROTA, M.C.; NASSER, L. (Orgs.). Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 43-58, 2009.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Formação de Professores: mudanças urgentes na Licenciatura em Matemática**. In: FROTA, M.C.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 169-187, 2009.

PINTO, M. M. F. **Discutindo a transição dos Cálculos para a Análise**. In: LACHINI, J.: LAUDARES, J. B. (Orgs.) Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, p. 123-145, 2001.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. UNICAMP. Campinas, 2001.

REIS, F. S. **Rigor e Intuição no Ensino de Análise**. In: FROTA, M.C.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

SEMADENI, Z. **Deep intuition as a level in the development of the concept image**. Educational Studies in Mathematics, v.68, n.1 p. 1-17, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume I. São Paulo: Pioneira, 2005.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

TALL, D. O.; VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematical with particular reference in Limits and Continuity**. Londres: Kluwer, p 151-169, 1981.

TALL, D.O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer, 1991.

VINNER, S. **The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics**. In TALL, D.O. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer, p. 65-81, 1991.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via seqüência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção. UFSC. Florianópolis, 2005.