

The background of the cover is a photograph of sunlight filtering through a dense canopy of green leaves. The light creates a bright, starburst effect in the center, with rays of light spreading outwards. The leaves are in various shades of green, some appearing darker and others lighter due to the light filtering through them.

**MODELAGEM MATEMÁTICA:
QUATRO MANEIRAS DE COMPREENDÊ-LA**

Vilma Candida Bueno

Universidade Federal de Ouro Preto

2011

**MODELAGEM MATEMÁTICA:
QUATRO MANEIRAS DE COMPREENDÊ-LA**

Vilma Candida Bueno

Universidade Federal de Ouro Preto

2011

Viver em sociedade é um desafio porque às vezes ficamos presos a determinadas normas que nos obrigam a seguir regras limitadoras do nosso ser ou do nosso não-ser... Quero dizer com isso que nós temos, no mínimo, duas personalidades: a objetiva, que todos ao nosso redor conhece; e a subjetiva... Em alguns momentos, esta se mostra tão misteriosa que se perguntarmos - Quem somos? Não saberemos dizer ao certo!!!

Agora de uma coisa eu tenho certeza: sempre devemos ser autênticos, as pessoas precisam nos aceitar pelo que somos e não pelo que parecemos ser... Aqui reside o eterno conflito da aparência x essência.

Clarice Lispector

APRESENTAÇÃO

A proposta da modelagem com fins educacionais emergiu no Brasil por volta da década de 1970 e nos últimos anos vem despertando maior interesse de professores e pesquisadores. Há vasto material (livros, revistas, sites especializados, anais de eventos, etc.) que mostra relatos da comunidade de educadores matemáticos que tiveram e/ou têm experiências com Modelagem Matemática desenvolvidas com estudantes desde os primeiros anos do ensino fundamental até cursos de pós-graduação. Tanto a literatura nacional quanto a internacional aponta exemplos de educadores que a adotam em suas aulas e acreditam que ela traz benefícios para o ensino e aprendizagem da matemática, como por exemplo, dar maior aplicabilidade aos conceitos matemáticos e oportunizar o debate sobre o papel dos modelos matemáticos na sociedade.

Modelagem Matemática: Quatro maneiras de compreendê-la é apresentado na forma de texto documental voltado para professores de Matemática, em especial aqueles que atuam no ensino Fundamental ou no Ensino Médio. Apresentamos uma compreensão geral de significados de Modelagem Matemática e de significados de modelo em consonância com as concepções de quatro pesquisadores da comunidade brasileira de educadores matemáticos, bem como os subsídios que essas concepções oferecem para o ensino e aprendizagem da matemática. O texto também traz alguns exemplos e considerações sobre a prática de fazer modelagem matemática na sala de aula e um pequeno histórico, em forma de apêndice, dos quatro autores referenciados: Maria Salett Biembengut, Dionísio Burak, Jonei Cerqueira Barbosa e Dale William Bean.

O documentário é fruto de uma pesquisa de dissertação desenvolvida por Vilma Candida Bueno sob orientação de professor Dale Bean no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade de Ouro Preto (UFOP – MG) no período de 2009 a 2011. A pesquisa partiu de um incômodo que foi se esboçando ao longo de nossas experiências docentes, nossa formação acadêmica e nosso interesse pela modelagem matemática na sala de aula. Com objetivo de apontar e esclarecer algumas percepções sobre Modelagem Matemática, compreender suas singularidades e contribuições para a Educação Matemática e, ainda, frente à expectativa de lançar um material que sirva de referência para outros professores, este trabalho, apesar de ser parte integrante da dissertação, resulta num produto apresentado à parte. Trata-se de um recorte e reformulação da dissertação onde procuramos

categorizar e descrever concepções da Modelagem Matemática em prol de quatro questionamentos:

- 1) O que é Modelagem Matemática?
- 2) O que é modelo matemático?
- 3) Como se faz Modelagem Matemática na sala de aula?
- 4) Quais são os objetivos para fazer Modelagem Matemática na sala de aula?

Tal temática parece pertinente para o debate da Modelagem Matemática na Educação Matemática e poderá contribuir com outros professores que queiram fazer modelagem em suas salas de aula. Acreditamos que quando nos propomos a trabalhar com determinado objeto ou método de ensino e aprendizagem é importante ter uma compreensão em que circunstâncias o objeto ou método está inserido e, sobretudo, que concepções o enraízam.

Antes de seguirmos com a escrita deste trabalho, ressaltamos que as concepções levantadas aqui não são únicas, pois foram identificadas de uma amostra de estudiosos, porém cada uma delas poderá ser aproveitada, em parte ou total, a vários contextos e a partir de novas experiências vividas, outras dimensões poderão ser experimentadas.

Com nosso cordial abraço,

Vilma Cândida Bueno

Dale Bean

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Concepção de Modelagem Matemática.....	16
Quadro 2: Concepção de Modelo Matemático.....	17
Quadro 3: Concepção da atividade de Modelagem Matemática na sala de aula	18
Quadro 4: Concepção dos objetivos de Modelagem Matemática na sala de aula	20

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	07
2 MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	10
2.1 Modelagem Matemática e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática.....	13
3 QUATRO PESQUISADORES DA MODELAGEM MATEMÁTICA: QUATRO MANEIRAS DE COMPREENDER MODELAGEM MATEMÁTICA.....	15
3.1 Modelagem Matemática segundo concepções de Biembengut.....	22
3.2 Modelagem Matemática segundo concepções de Burak.....	27
3.3 Modelagem Matemática segundo concepções de Barbosa.....	32
3.4 Modelagem Matemática segundo concepções de Bean.....	36
4 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES.....	40
REFERÊNCIAS.....	44
APÊNDICES.....	47

1 INTRODUÇÃO

Inicialmente abordamos a temática da Modelagem Matemática neste documentário com o intuito de desvendá-la de forma geral. Para iniciar nosso olhar às concepções de modelagem, apresentamos uma narrativa de um exemplo da elaboração de pratos culinários que se aproxima modelagem, quanto à criação de modelos. Vamos pensar na seguinte situação: quando um *chef* de culinária tem por objetivo criar um prato novo que combina sabores de forma diferente do que ele tem costume preparar, o prato pode ser concebido como o resultado do modelo que ele criou. Entendemos que o modelo, neste caso, é a combinação de ingredientes e a maneira de prepará-los a ser realizada pelo *chef* até se chegar ao prato desejado. Por sua vez, a atividade criativa para se chegar a esta combinação (receita ou modelo) é a modelagem feita pelo *chef*. Geralmente para se chegar ao "modelo final", vários artifícios culinários deverão ser testados e (re)testados dependendo da expectativa ou do objetivo de seu criador e dos resultados obtidos, como por exemplo: Quais ingredientes serão utilizados? Qual deverá ser a quantidade específica de cada ingrediente levando em consideração as quantidades dos outros? De que maneira tal combinação será preparada?

Quando esse *chef* chega à combinação e à maneira de preparação desejadas, ele criou um modelo de prato (uma receita). Se outra pessoa ou ele mesmo utiliza essa receita, estará usando ou “aplicando” a receita (modelo). Se essa pessoa acrescenta ou diminui uma quantidade de um dos ingredientes de acordo com seus gostos, um pouco de sal, por exemplo, está “ajustando” a receita em termos de uma quantidade de um ingrediente da receita e não a receita (ingredientes e maneira de prepará-los). Assim o modelo permanece o mesmo.

Já no caso de o *chef* supor trocar um ou mais ingredientes, por exemplo, substituir chocolate por morangos e, assim, criar um novo modelo de prato, pode-se dizer que fez modelagem. Modelagem, de acordo com esta concepção, significa uma atividade de criação. Se alguém utiliza essa receita para fazer o prato, ela está fazendo uma “aplicação do modelo”, um modelo criado por outro.

Quanto a Modelagem Matemática, às vezes existe um desconhecimento a respeito da diferenciação entre modelo matemático e modelagem matemática que exemplificamos, em termos de modelo / modelagem, pela receita do chefe e a atividade de criar a receita. Em termos gerais, o modelo é o resultado ou produto da atividade de sua construção, a modelagem.

A seguir, trazemos algumas ideias a respeito do que é um modelo matemático e do que é modelagem matemática para exemplificar como estes termos foram compreendidos em antecedência a sua transposição à sala de aula.

Se buscarmos entre as primeiras incidências lembradas de modelos matemáticos, recairemos a milênios. No domínio específico da Matemática, entre a primeira metade do século VI a.C. e o início do século V a. C, quando o matemático e filósofo grego - Pitágoras (e os pitagóricos) – comprovou o teorema que diz a respeito da relação entre os comprimentos dos catetos, a e b , e a hipotenusa, c , de um triângulo retângulo: $a^2 + b^2 = c^2$, o Teorema de Pitágoras, que até hoje serve de modelo para alguns cálculos geométricos. O mesmo pode-se dizer do estudo matemático-físico realizado pelo italiano Galileu Galilei, século XVII, referente à queda dos corpos que fundamentado em experimentos e pensamentos para a construção do modelo $s = \alpha t^2$ que relaciona a distância, s , da queda em termos do tempo t percorrido.

Um modelo matemático, segundo Bassanezi (2006), é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam, de forma simplificada, uma parte da realidade. Ao buscar definições de “modelo” do dicionário Aurélio, a palavra significa a representação em pequena escala de algo que se pretende reproduzir em grande; pessoa ou coisa que serve de exemplo ou norma. Partindo desta ótica, a modelagem pode ser entendida como o processo de criação do exemplar, que servirá para estudar determinada situação. Já para a ideia de modelagem matemática, o ato de modelar – ou ato de criação do modelo – pode ser entendido como uma atividade de formular estratégias e argumentos a respeito de uma situação e formalizá-los sob a forma de um sistema matemático que permita uma interpretação ou compreensão a respeito da situação.

Em princípio, para estudar um determinado fenômeno complexo, criam-se vários modelos. De acordo com Cifuentes e Negrelli (2007), um modelo é uma representação de um recorte da realidade formulado a partir de hipóteses e aproximações simplificadoras. De acordo com os autores, um modelo matemático é uma representação ou interpretação simplificada de uma situação problemática, ou uma interpretação de um fragmento de um sistema, segundo uma estrutura de conceitos mentais ou experimentais expressas em linguagem matemática. Os modelos matemáticos são utilizados praticamente em todas as áreas científicas, como, por exemplo, na Biologia, Química, Física, Economia, Engenharia e na própria Matemática.

O papel dos modelos matemáticos na sociedade é amplamente reconhecido devido às suas aplicações bem sucedidas, que têm impactos diretos ou indiretos sobre o comportamento

das pessoas. Eles servem de maneira satisfatória à tarefa de descrever e prever os fenômenos físicos, naturais e sociais, cabendo ao modelador a tarefa de criá-los e abordá-los conforme seus interesses e objetivos. Para (ARAÚJO, 2002, p.12-13), “modelo é uma representação simplificada de uma situação concreta feita com o objetivo de compreender a situação e prever suas configurações futuras ou de situações semelhantes”. Alguns autores sugerem que quanto mais se exige fidelidade ao real, tanto mais será complexa a sua criação e adequação. Muitas vezes, subjacente a esta ideia de fidelidade, ou aquela que modelos são aproximações a um mundo exterior, está a concepção da existência de uma única realidade objetiva desvinculada dos interesses de pessoas. Bean (2005), por sua vez, entende que:

Nossos modelos estão avaliados em termos de sua adequação às necessidades, interesses e aspirações dos membros das comunidades (sejam elas religiosas, científicas ou outras), fornece uma base para compreender perspectivas diferentes sem a necessidade de eleger uma perspectiva privilegiada. (BEAN, 2005, p. 9).

Para Bean (2005), existem múltiplas realidades, e a fidelidade, na criação de seus modelos, remete tanto às situações quanto aos interesses de cada comunidade.

Quanto à modelagem (processo de criação do modelo), de acordo com Bean (2009), de forma geral:

A modelagem é uma atividade humana na qual uma parte da realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente. O cerne da modelagem reside no recorte e na formulação de um isolado, ou seja, na conceitualização de um fenômeno com fundamento em premissas e pressupostos que remetem tanto ao fenômeno quanto aos objetivos do modelador (BEAN, 2009, p. 2).

Se tomarmos o termo modelagem em um contexto mais restrito, a conotação não será tão abrangente e sua compreensão requer caracterizações específicas de acordo com o cenário em que está inserido. Por exemplo, interpretar modelagem em Ciências Biológicas pode ser diferente de interpretar modelagem em Ciências Humanas. Dependerá do estudioso em questão e dos objetivos que se tem. Não temos a pretensão de realizar um estudo minucioso sobre as concepções da modelagem em seus vários campos, passando pelo campo científico, social, filosófico, físico, educacional, etc.. O nosso interesse neste trabalho é especialmente pela Modelagem Matemática na sala de aula de Matemática. Passamos então a discorrer sobre concepções da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática tem influências teóricas dos parâmetros da Matemática Aplicada como exemplificada na introdução, em que o ato de modelar é apresentado em termos da construção de um modelo matemático, traduzido em esquemas explicativos, podendo ser uma equação, um sistema de equações ou inequações algébricas, um gráfico, uma tabela, etc. Também, e ao mesmo tempo, na Educação Matemática, pode ser compreendida, no contexto das práticas escolares, como uma atividade em consonância com objetivos de uma educação matemática crítica. É na transição de base da prática do matemático aplicado à prática docente no campo de Educação Matemática que surgiram uma variedade de concepções de modelagem.

Segundo Bassanezi (2006), trabalhar com modelagem no ensino não é mera questão de ampliar conhecimento matemático, mas, sobretudo, de se estruturar a maneira de pensar e agir do aluno. Espera-se que, durante o processo de modelagem, educandos e professor adquiram e desenvolvam o senso crítico, ou seja, uma forma de cidadania baseada no entendimento comum. O processo de pesquisa no ensino e aprendizagem deve ser formulado para dar experiência aos modeladores (no caso professor e alunos). Para Bassanezi (2006), o aspecto do aprendido é importante, pois valoriza diversas maneiras de resolver problemas, que é uma das mais altas formas do desenvolvimento intelectual para todos os indivíduos. Desta perspectiva a modelagem no ensino é uma estratégia de aprendizagem, onde "o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas nas quais o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado" (BASSANEZI, 2006, p. 38).

Diversos autores propõem intervenções em salas de aula por meio da inclusão da Modelagem Matemática nas propostas de ensino. Assim, esses professores poderão experimentar no contexto de sua própria sala de aula esta ação, desenvolvendo seus conhecimentos práticos sobre a modelagem. Podemos afirmar que uma das dificuldades, e ao mesmo tempo, vantagens, para fazer a modelagem é que existem concepções diferentes sobre os objetivos e sobre a forma de conduzir este trabalho, ou seja, existem concepções diferentes sobre a Modelagem Matemática. Entendemos que na diversidade de concepções de modelagem, o professor terá uma variedade de subsídios para desenvolver suas próprias práticas com modelagem coerentes com diversos contextos e objetivos educacionais. De

forma geral, essas concepções se enquadram em duas categorias amplas: (1) Modelagem Matemática compatível com as raízes da Matemática Aplicada onde a construção de modelos está enfatizada e (2) Modelagem Matemática compatível a métodos e metodologias de ensino, ou seja, a prática pedagógica.

Acreditamos que uma proposta educacional, seja ela qual for, justifica-se ou torna-se mais segura quando compreendemos os fundamentos conceituais que a embasam. Em conformidade com Burak (2010), toda prática educativa está atrelada a uma concepção de ensino e de aprendizagem, do seu objeto de estudo, da mesma forma que toda concepção de ensino e aprendizagem está atrelada ao tipo de pessoa que se deseja formar para o mundo. Assim quando um professor, seja de qualquer nível de ensino, diz que "faz Modelagem Matemática", é importante ao mesmo tempo levar em consideração sua própria concepção de Educação Matemática e as possibilidades que a modelagem traz dentro desta concepção.

De acordo com Araújo (2002), a Modelagem Matemática, independentemente do contexto em que está presente, tem como um de seus objetivos a resolução de algum problema da realidade, por meio do uso de teorias e conceitos matemáticos. Mas, ao ser levada à sala aula, sofre mudanças a partir das perspectivas dos envolvidos. Essas diferenças "se apresentam à medida que se define qual é o objetivo de resolver tal problema, qual é a realidade na qual o problema está inserido, como a matemática é concebida e se relaciona com essa realidade, etc." (ARAÚJO, 2002, p. 20).

Segundo Jacobini e Wodewotzki (2006), quando o professor concebe a modelagem como estratégia pedagógica na sala de aula, uma de suas intenções é de ensinar Matemática. Nesse caso, professores e alunos podem trabalhar a construção de modelos para significar conceitos matemáticos.

Ao explorar as aplicações matemáticas no dia-a-dia, a construção de modelos e o relacionamento entre a matemática utilizada na modelagem e o conteúdo programático, o professor oferece ao aluno a oportunidade de conviver com conteúdos vivos, práticos, úteis com bastante significado. (JACOBINI e WODEWOTZKI, 2006, p. 73).

Ainda de acordo com Jacobini e Wodewotzki (2006), essa ação de ensinar e de aprender deve ser vista como sendo apenas uma das possibilidades oferecidas pela modelagem na sala de aula e não a única. Ao restringir a ela suas pretensões pedagógicas, o professor mantém seu olhar exclusivamente em conceitos matemáticos e "deixa de considerar outras oportunidades tanto para o crescimento intelectual do estudante como para a sua formação crítica enquanto cidadão presente em uma sociedade altamente tecnológica,

globalizada e com forte presença da matemática” (p. 73). Dentre as oportunidades enfatizadas pelos autores destacam-se ações sociais e políticas possibilitadas pelo trabalho investigativo inerente à modelagem, com a expectativa de que despontem, em todos os atores participantes, novos olhares; quer sobre a Matemática ou as situações investigadas, quer sobre a realidade social que se encontra ao redor do ambiente educacional.

Desta forma, no âmbito educacional, temos objetivos educacionais, aprendizagem de Matemática e formação crítica ganhando espaço em atividades que na Matemática Aplicada foram a construção de modelos. Nota-se nas afirmações dos autores no parágrafo anterior sobre a questão do contexto da modelagem quando concebida como estratégia pedagógica, que ela oferece ao aluno a oportunidade de conviver com conteúdos úteis e com significados. Ao mesmo tempo, outros autores, como Bean (2007) diriam “fazer modelagem na sala de aula”, concebendo a modelagem como a atividade de modelar, ou seja, uma construção criativa de modelos.

Quando concebem Modelagem Matemática como um método ou uma metodologia de ensino e aprendizagem, Biembengut e Hein (2003) propõem que atividades devem partir de temas do cotidiano dos alunos. Afirmam que ao participarem de um trabalho com modelagem, no qual o conteúdo vincula-se à realidade, professores e alunos tornar-se-ão mais entusiastas no decorrer do processo de ensino e aprendizagem da Matemática e perceberão mais facilmente o papel que lhes cabem na preparação do indivíduo para atuar no meio circundante. A menção de que um trabalho com Modelagem Matemática deve partir de temas que façam parte da vivência dos alunos é também defendida por outros estudiosos da comunidade brasileira de educadores matemáticos (JACOBINI, 2004; BARBOSA, 2004; KLÜBER e BURAK, 2008; MALHEIROS, 2004; HERMINIO, 2009).

O foco da modelagem, neste estudo, está direcionado para os interesses da sala de aula. Assim, destacamos aspectos em que os PCN apresentam consenso com a Modelagem Matemática enquanto atividade educacional e indicam questões que geram reflexões no meio em que se vive. De acordo com Araújo (2002), a modelagem busca explicações para fenômenos sociais e naturais de outras áreas do conhecimento. Da mesma maneira, a proposta do ensino de Matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática estabelece como um de seus objetivos principais a adequação do trabalho escolar a diversos campos da atividade humana.

2.1 Modelagem Matemática e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática

Para mostrar pontos em que a Modelagem Matemática e os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam consonância, este documentário aponta alguns de seus princípios guias correlacionados com objetivos da Modelagem Matemática na sala de aula segundo alguns de seus proponentes.

(1) Segundo os PCN, a Matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, que são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais. Por sua vez há uma “solicitação natural pelo uso de computadores e/ou calculadoras quando se está desenvolvendo algum trabalho de Modelagem Matemática, e essa naturalidade já era apontada no contexto externo à Educação Matemática” (ARAÚJO, 2002, p. 43-44).

(2) Segundo os PCN, atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. Em relação à Modelagem Matemática, Caldeira (2004) afirma tratar-se de uma oportunidade que oferece aos professores e aos alunos condições para questionarem e entenderem a realidade, já que se faz por meio de ações e reflexões.

(3) De acordo com os PCN, o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, dedução, analogia, estimativa. Em consonância com Biembengut e Hein (2007), os objetivos da Modelagem Matemática como estratégia de ensino são: enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno; despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade; melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos; desenvolver a habilidade para resolver problemas; e estimular a criatividade.

Uma característica fortemente observada nos princípios norteadores pautados nos PCN é que a Matemática deve ter um aspecto de inserção social e política, o que certamente

conduzirá a uma maior aplicabilidade dos conceitos aprendidos. É preciso uma prática de ensino e aprendizagem que assegure a aprendizagem dos conceitos matemáticos, valorize o espírito de investigação, a formulação de conjecturas e a argumentação. Parece ser consenso entre os estudiosos que a Modelagem Matemática traz benefícios para a sala de aula de Matemática nestes aspectos. Segundo levantamento de informações de Bueno (2011), em termos de objetivos da Modelagem Matemática para fins educacionais, estes se encontram em consonância com os objetivos dos PCN para o ensino da Matemática.

Se a intenção é trabalhar Matemática de maneira a assegurar competências como aprendizagem de conceitos matemáticos, inserção social, cultural e política; podemos apontar modelagem matemática e modelos matemáticos, como uma das maneiras de desenvolver essas competências. De forma geral, educadores que a promovem, afirmam que ela tem propósitos de desenvolver linguagens matemáticas e modos de pensar que podem facilitar a compreensão do mundo físico e social onde vivemos.

Na impossibilidade de levar em consideração todas as concepções de modelagem que fazem parte do movimento da Modelagem Matemática, este documentário destaca na próxima seção as concepções de Modelagem Matemática de quatro autores da comunidade brasileira de educadores matemáticos: Maria Salett Biembengut (apêndice 1), Jonei Cerqueira Barbosa (apêndice 2), Dionísio Burak (apêndice 3) e Dale William Bean (apêndice 4) Estes autores foram escolhidos por meio dos seguintes critérios:

- 1) Ter uma concepção de Modelagem Matemática assumida na comunidade de educadores matemáticos;
- 2) Ter aspectos de sua concepção que a diferencia das concepções dos outros estudiosos escolhidos;
- 3) Ter trabalhos voltados para o Ensino Fundamental ou Ensino Médio e / ou ter orientado e / ou orientar trabalhos voltados para estes níveis de ensino;
- 4) Atuar com Modelagem Matemática no momento.

Sobre os critérios de escolha, estes foram adotados mediante objetivos da pesquisa e interesses do público-alvo para o qual o texto estaria voltado.

3 QUATRO PESQUISADORES DA MODELAGEM MATEMÁTICA: QUATRO MANEIRAS DE COMPREENDER MODELAGEM MATEMÁTICA

Mestre é aquele que às vezes para, para aprender (Guimarães Rosa)

É em conformidade com o próprio conhecimento, com as experiências individuais, adequação de ideias e concepções do ensino e da própria Matemática que professores encontram experiências positivas e desafiadoras no campo da Modelagem Matemática. Para uns a experiência abre um novo olhar no espaço sala de aula. Para outros representa uma forma de facilitar o ensino e aprendizagem de Matemática. Para outros mais ainda oferece a oportunidade de refletir sobre questões da sociedade, sobre valores e objetivos.

Professores desenvolvem suas concepções com base nos seus objetivos e práticas. Desenvolvem suas atividades curriculares dentro dessa perspectiva. É neste sentido que o princípio desta seção é oferecer subsídios que sirvam de inspiração a professores desejosos em trabalhar Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem em suas respectivas realidades educacionais e assim possam compreender algumas maneiras e não a(s) maneira(s) de entender Modelagem Matemática na Educação.

Nos mesmos tratamentos se fazem as contribuições da modelagem para a Educação Matemática, em conformidade com o conhecimento e com as experiências individuais de cada pessoa. Concepções de Modelagem Matemática se formaram a partir de ideias da Matemática Aplicada e por meio das vivências e experiência de cada um. É de se esperar que seja por meio das concepções do ensino e da própria Matemática que professores e alunos da Educação Básica encontram experiências positivas e desafiadoras no campo da Modelagem Matemática.

Ao concordar que “a Modelagem Matemática é muito rica para ficar restrita a uma única forma de concebê-la” (BURAK, 1987, p. 59), interpretamos e descrevemos, neste documentário, concepções de modelagem assumidas por quatro pesquisadores selecionados da comunidade brasileira de educadores matemáticos, considerando seus pontos de partida, suas transições e experiências vivenciadas. Categorizamos as concepções destes autores de maneira a elucidar os questionamentos: (1) O que é Modelagem Matemática? (2) O que é Modelo Matemático? (3) Como se faz Modelagem Matemática na sala de aula? (4) Quais são os objetivos para fazer Modelagem Matemática na sala de aula? Na sequência, ampliamos e

exemplificamos as concepções de cada autor, com vistas a mostrar como eles compreendem a Modelagem Matemática no âmbito de Educação Matemática.

Concepção Estudioso	Modelagem Matemática na Educação Matemática
Biembengut	É uma estratégia usada para se chegar ao modelo matemático com intuito de ensinar conhecimentos acadêmicos que possam valer as pessoas viverem, sobreviverem, atuarem no meio, em comunidade.
Burak	É uma metodologia de ensino que se constitui em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões.
Barbosa	Um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade.
Bean	É uma atividade humana na qual uma parte da realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente. Consiste na formulação de um isolado, ou seja, na conceitualização de uma situação com fundamento em premissas e pressupostos que remetem tanto à situação quanto aos objetivos do modelador (o aluno).

Quadro 1: Concepção de Modelagem Matemática.

Fonte: Elaborado pela autora

Concepção Estudioso	Modelo Matemático
Biembengut	<p>É uma representação do mundo real por meio de linguagem matemática. Pode ser um conjunto de expressões aritméticas, fórmulas, equações algébricas, gráficos, representações ou programa computacional que leve a solução ou permita a dedução de solução.</p>
Burak	<p>Uma representação em linguagem matemática: geralmente sob a forma de uma equação, inequação, sistema de equações, a planta baixa de uma casa ou um mapa, uma tabela. Na Modelagem Matemática na Educação Matemática a ideia de modelo fica ampliada, constituindo-se como qualquer representação que permite uma tomada de decisão, como também uma lista de supermercado.</p>
Barbosa	<p>O modelo matemático é qualquer representação matemática da situação em estudo.</p>
Bean	<p>É uma construção simbólica conceitual (construto conceitual), expressa principalmente na linguagem matemática, que auxilia na interpretação/compreensão e/ou tomada de decisões.</p>

Quadro 2: Concepção de Modelo Matemático.

Fonte: Elaborado pela autora

<p style="text-align: center;">Concepção</p> <p>Estudioso</p>	<p style="text-align: center;">Como se faz Modelagem Matemática na sala de aula</p>
<p style="text-align: center;">Biembengut</p>	<p>_ Preferencialmente é trabalhada em grupo;</p> <p>_ O professor pode usar outro modelo e adaptá-lo ao contexto em questão (recriar o modelo), ou podem ser criados modelos inéditos a partir de uma situação problemática;</p> <p>_ Pressupõe estudo e interpretação de um tema de alguma área do conhecimento e segue três etapas básicas, subdivididas em duas cada uma:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) “Interação” <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecimento da situação-problema; • Familiarização com o assunto a ser modelado. 2) “Matematização” <ul style="list-style-type: none"> • Formalização do problema; • Resolução do problema em termos do modelo. 3) “Modelo Matemático” <ul style="list-style-type: none"> • Interpretação da solução; • Validação do modelo.
<p style="text-align: center;">Burak</p>	<p>_ Preferencialmente é trabalhada em grupo;</p> <p>_ Não exige a obrigatoriedade da criação de modelos, mas precisa resultar em tomada de decisões;</p> <p>_ O tema é de escolha dos estudantes;</p> <p>_ O processo segue cinco etapas:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) escolha do tema. (2) pesquisa exploratória. (3) levantamento dos problemas. (4) resolução dos problemas e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema. (5) análise crítica da(s) solução(es).

Quadro 3: Concepção da atividade de Modelagem Matemática na sala de aula.

Fonte: Elaborado pela autora

<p style="text-align: center;">Concepção</p> <p>Estudioso</p>	<p style="text-align: center;">Como se faz Modelagem Matemática na sala de aula</p>
<p style="text-align: center;">Barbosa</p>	<ul style="list-style-type: none"> _ Preferencialmente trabalhada em grupo; _ Não exige a obrigatoriedade da criação de modelos; _ Pode ser compreendida em consonância com a Educação Matemática Crítica, não se fechando na construção de modelos nem em conteúdos programáticos da Matemática; _ Não existe um caminho predeterminado. O professor pode começar pela forma que se sente seguro. Para isso classifica três possibilidades: <p><u>Caso 1:</u> O professor leva para a sala de aula uma situação problemática do dia a dia e os alunos juntamente com o professor buscam caminhos para solucioná-la. Não é preciso que eles procurem dados fora da sala de aula. Todo o trabalho se dá a partir da situação e do problema oferecido pelo professor.</p> <p><u>Caso 2:</u> O professor leva para a sala de aula uma situação problemática do dia a dia. Os alunos coletam as informações qualitativas e quantitativas necessárias para a resolução do problema e, juntos com o professor, simplificam e resolvem o problema.</p> <p><u>Caso 3:</u> Os alunos participam de todas as etapas, desde a escolha da situação problemática até a resolução desse problema. Os alunos formulam e resolvem problemas, juntamente com o professor. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.</p>
<p style="text-align: center;">Bean</p>	<ul style="list-style-type: none"> _ Preferencialmente trabalhada em grupo; _ Uma atividade que tem com intuito de construir modelos. Mas isto não implica a necessidade de chegar a um “modelo final”; _ Não define diretrizes preestabelecidas para o processo, mas pedagogicamente, defende a existência de múltiplos caminhos a serem construídos para que os alunos criem modelos. A escolha de um caminho depende da situação e das múltiplas relações envolvendo os estudantes e o professor e pode mudar de acordo com a dinâmica da atividade; _ É importante criar um ambiente ou cenário propício para que os estudantes possam elaborar conceituações criativas diante de uma problemática que abrem para a adoção de premissas e/ou a formulação de pressupostos e possam criar seus próprios modelos.

Quadro 3: Concepção da atividade de Modelagem Matemática na sala de aula.

Fonte: Elaborado pela autora

Concepção Estudioso	Objetivos para fazer Modelagem Matemática na sala de aula
Biembengut	<ul style="list-style-type: none"> _ Ensinar conteúdos matemáticos; _ Ensinar ao aluno a fazer pesquisas sobre assuntos de seu interesse; _ Promover a criatividade e um bom conhecimento matemático; _ Dar maior aplicabilidade à Matemática; _ Integrar a Matemática a outras áreas do conhecimento; _ Despertar maior interesse pelo ensino e aprendizagem nos estudantes.
Burak	<ul style="list-style-type: none"> _ Integrar a Matemática com outras áreas do conhecimento; _ Contextualizar os conteúdos matemáticos – entendida aqui como a relação entre os conteúdos e temas nos diversos contextos, sejam eles, o social, o econômico ou o cultural; _ Favorecer o trabalho em grupo; _ Romper com a visão linear do currículo – se constitui em umas das características mais importantes da Modelagem Matemática, pois, com ela, não são os conteúdos que determinam o problema, mas o contrário; _ Despertar nos estudantes a habilidade de comparar e relacionar os fenômenos do cotidiano com a Matemática e assim fazer uso de suas ferramentas, de suas linguagens, fazer previsões e tomar decisões.

Quadro 4: Concepção dos objetivos da Modelagem Matemática na sala de aula

Fonte: Elaborado pela autora

Concepção Estudioso	Objetivos para fazer Modelagem Matemática na sala de aula
Barbosa	<ul style="list-style-type: none"> _ Potencializar a intervenção dos estudantes nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvam aplicações matemáticas; _ Alargar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades democráticas a partir de uma análise sobre o papel dos modelos matemáticos nas ciências e na sociedade, de onde extraem implicações para as práticas pedagógicas; _ Desenvolver nos estudantes habilidades para reconhecer, compreender, analisar e avaliar exemplos de usos da Matemática na sociedade; _ Desenvolver nos estudantes a percepção do caráter cultural da Matemática; _ Teorizar as implicações dos estudos críticos sobre o papel da Matemática na sociedade, ou seja, oportunizar a reflexão sobre o poder formatador da Matemática (priorizado pelo autor).
Bean	<ul style="list-style-type: none"> _ Promover a criação de uma consciência de valores das práticas sociopolítico-culturais ao considerar as premissas e os pressupostos dos modelos; _ Promover nos estudantes a capacidade de modelar de forma compatível com as necessidades, os interesses e as aspirações. Ou seja, ensiná-los, que é necessário, além de ajustar os modelos, questionar as premissas, pressupostos e valores que os fundamentam e se não são adequados, propor premissas e/ou pressupostos diferentes; _ Promover a capacidade tanto de reproduzir quanto criar, ou seja, transformar situações da realidade.

Quadro 4: Concepção dos objetivos da Modelagem Matemática na sala de aula

Fonte: Elaborado pela autora

3.1 Modelagem Matemática segundo concepções de Biembengut

A arte de ensinar encontra-se no mais amplo sentido na arte de aprender a ensinar a cada dia. Aprender com as pessoas que estão ao nosso redor e, numa espécie de troca de saberes, vamos pouco a pouco aquilatando nossos saberes. Isso pode nos proporcionar todo encantamento por esta profissão – ser professor – que faz parte da vida ordinária das pessoas. E, por assim, ser lembrado, o que implica em estar em constante interação de ser pessoa, tornar-se lembrado por si e por outros. (Biembengut, 2011).

Com uma concepção de Modelagem Matemática que distingue entre o que está entendido no contexto na Matemática Aplicada e o contexto da sala de aula, a autora Biembengut é referência nacional e internacional nesta área. Seus trabalhos apontam que atividades de modelagem, no âmbito educacional, podem ser adaptadas a qualquer nível, desde o fundamental até o superior. Dois de seus livros¹ trazem uma série de possibilidades para professores de Matemática interessados em realizar modelagem em suas salas de aula. O mesmo pode-se dizer em relação a vários artigos publicados pela autora.

Pesquisadora da área desde 1986, Biembengut concebe a Modelagem Matemática em termos semelhantes à Matemática Aplicada, mas entende que os objetivos [para a Matemática Aplicada e para a sala de aula] são distintos e que é preciso entendê-los. A autora explica que “se utiliza a modelagem quando há uma situação-problema cujos dados disponíveis não são suficientes para aplicá-los num modelo matemático já existente” (BIEMBENGUT, 2011). O objetivo fundamental da modelagem na Matemática Aplicada é extrair parte essencial da situação problema e criar um modelo matemático de forma simplificada para solucionar uma situação e aprimorar uma teoria, uma técnica, uma tecnologia, um produto, etc.. Já “na educação escolar o objetivo é promover ou ensinar conhecimentos acadêmicos que possam valer as pessoas viverem, sobreviverem, atuarem no meio, em comunidade” (BIEMBENGUT, 2011).

Para a autora, na educação escolar formal há um programa curricular a ser seguido de acordo com a fase escolar, o curso e um propósito da instituição; e não cabe discutir a validade e viabilidade destes programas e quando um professor se propõe a utilizar a Modelagem Matemática na Educação precisamos ter claro qual é a sua intenção. “Nos dias

¹ BIEMBENGUT, M. S, HEIN, N.; Modelagem Matemática no Ensino. 3ª ed – São Paulo. ed. Contexto, 2003. 128 p.

BIEMBENGUT, Maria Salett. Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática. 2. ed. Blumenau: Edifurb, 2004. 134 p.

atuais há várias concepções de MM [Modelagem Matemática] na Educação e por consequência, intenções. Minha intenção é a de *ensinar o estudante* em qualquer fase de escolaridade a *fazer pesquisa*” (BIEMBENGUT, 2011, grifos da autora).

Ao defender a inclusão da Modelagem Matemática no currículo de Matemática, Biembengut entende que fazer modelagem nas aulas de Matemática implica ensinar ao estudante a pesquisar e também ensinar os conteúdos programáticos. Assim, a autora concebe que o processo de Modelagem Matemática próprio das Ciências Naturais seja adaptado para a sala de aula, como metodologia de ensino. Desta forma, o estudante aprende a fazer pesquisa e ao mesmo tempo aprende os conteúdos matemáticos, programáticos e não programáticos, de acordo com o número de estudantes e as intenções e tempo disponível do professor. Segundo Biembengut, fazer com que os estudantes aprendam a fazer pesquisa enquanto aprendem conteúdo, “inclui ensiná-los a julgar, avaliar, decidir tendo como referência que um ‘trabalho’, ou uma ‘criação’ ou uma ‘ação’ vale a pena quando possa ser útil a outrem” (BIEMBENGUT, 2011).

Além de ensinar conteúdos matemáticos e ensinar a fazer pesquisas, a proposta de Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino e aprendizagem também aponta como objetivo para a sala de aula, despertar o interesse dos alunos tanto para a própria Matemática, quanto para outras áreas do conhecimento.

Ressalta-se que, em consonância com a compreensão de Biembengut, a Modelagem Matemática na Educação Matemática possui objetivos distintos daqueles da Matemática Aplicada. Em ambas o processo de modelagem exige a chegada a um modelo, mas no caso da sala de aula pode haver a criação de um modelo inédito ou a recriação de um modelo já existente. Os passos seguidos neste processo são descritos por Biembengut e Hein (2003, p.13), em três etapas, subdividida em duas subetapas cada (ver quadro 3).

A etapa da interação, além de ser responsável pela identificação do trabalho a ser desenvolvido e da motivação para tal, trata da coleta de dados. Uma vez decidida a situação a ser modelada, deve ser feito um estudo sobre o assunto, seja por meio de mecanismos diretos, seja por meio de mecanismos indiretos, a fim de obter o máximo de informações possíveis sobre a situação-problema. Quanto maior o número de informações obtidas, melhor será para o prosseguimento da etapa seguinte.

A etapa da "matematização" está relacionada à organização dos dados levantados e criação do modelo. Trata-se, segundo Biembengut e Hein (2003), do momento de maior complexidade da Modelagem Matemática, já que é nesse momento que ocorre a tradução (entenda tradução no sentido de transformação) da situação-problema em linguagem

matemática. Pode-se dizer que a criatividade, a maleabilidade e a capacidade de argumentação são imprescindíveis nessa fase da atividade de Modelagem Matemática. A linguagem (ou escrita) matemática é uma imagem voltada para uma lógica formal. Seu uso exige uma sistematização de forma concisa.

Na formulação do problema, ou hipóteses, deve-se segundo Biembengut e Hein (2003), observar os seguintes procedimentos: (a) classificar as informações (relevantes e não relevantes), identificando fatos envolvidos; (b) decidir quais os fatores a serem perseguidos, levantando hipóteses; c) selecionar símbolos apropriados para essas variáveis; e, (d) descrever essas relações em termos matemáticos. Depois de formulada a situação-problema, passa-se à resolução do problema em termos do modelo, utilizando-se de todo o "ferramental matemático de que se dispões" (p. 14).

Depois de criado o modelo, é hora de voltar à pergunta inicial e verificar a validade do modelo obtido na solução da situação-problema. Esse processo de validação é o que garante a sua aplicabilidade ou não. Caso o modelo não responda de forma condizente à pergunta inicial (pergunta geradora), deve-se retomar os dados da matematização para melhorar ou reelaborar o modelo. Isso significa que "se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa – matematização – mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis, etc." (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 15).

Segundo Biembengut e Hein (2003), não há restrições para a Modelagem Matemática como método de ensino aprendizagem, sendo que pode ser trabalhada em qualquer nível de ensino, desde as séries iniciais até cursos de pós-graduação. No livro dos autores, intitulado *Modelagem Matemática no Ensino* (2003), os autores apresentam sete propostas-modelo como norteadores do ensino de alguns conteúdos matemáticos em sala de aula, intitulados: embalagens, construção de casas, a arte de construir e analisar ornamentos, razão áurea, abelhas, cubagem de madeira e criação de perus.

Para efeito ilustrativo, o recorte de uma das propostas de Modelagem Matemática apresentada por Biembengut e Hein (2003) pode ser apontado aqui para descrever as etapas da atividade de modelar. A temática pode ser adaptada desde o ensino fundamental até o ensino superior e permite desenvolver vários conteúdos de Matemática como superfície, volume, capacidade, massa, função do 2º grau, matemática financeira, matemática comercial, dentre outros que podem ser adaptados pelo professor conforme o nível de conhecimento dos seus alunos. Trata-se de uma proposta com o tema "embalagens" subdividida em quatro questões: "que formas geométricas estão presentes nas caixas e nas latas?", "como se faz uma caixinha?", "Qual a quantidade de material utilizada em uma embalagem?" e "qual a forma

ideal para uma embalagem?”. Estas questões podem ser expandidas em outras, conforme critérios do professor.

Exemplo de uma atividade de Modelagem Matemática com o tema embalagens

Essa proposta será reproduzida aqui como um recorte para o estudo de equações do 2º grau – máximos e mínimos, com o objetivo de explicitar as etapas para a realização de Modelagem Matemática descritas por Biembengut e Hein (2003). A intenção é fazer uma apreciação de cada etapa para exemplificar a atividade de modelagem na concepção de Biembengut. Se a ideia é trabalhar o conceito de máximos e mínimos, a atividade pode partir de uma pergunta geratriz, como “qual deve ser o tipo de embalagem utilizado para o armazenamento do produto X?”

Etapa 1: Interação

- **Reconhecimento da situação-problema**

O professor pode fazer uma exposição sobre o assunto, propor aos alunos que faça uma pesquisa sobre tipos de embalagem utilizados para a embalagem do tal produto X, convidar uma terceira pessoa ligada à temática para conversar com os alunos sobre a importância das embalagens, os tipos de materiais utilizados nas embalagens, os custos, as consequências para o meio ambiente, os critérios de escolhas das empresas, etc. Este é um momento de grande importância, pois se trata de despertar nos alunos o interesse pelo assunto a ser estudado.

- **Familiarização com o assunto a ser modelado**

Este é o momento de levantamento dos questionamentos e os alunos devem ser instigados a participarem com sugestões. O que deve ser levado em conta na escolha das embalagens? Vários questionamentos devem ser apreciados neste ponto como: custos, benefícios, facilidade de transporte, danos para o meio ambiente.

Etapa 2: Matematização

- **Formalização do problema**

Dentre as questões levantadas são selecionadas aquelas que se desejam obter respostas. Por exemplo, que tipo de embalagem deve ser usado de forma a conseguir o menor preço? Qual material oferece maior tempo de conservação do produto? Como conciliar as duas coisas? Formulam-se as questões de forma a levar os alunos a proporem soluções. As questões são levantadas e o conteúdo matemático necessário às respostas vai sendo trabalhado.

- **Resolução do problema em termos do modelo**

Após o desenvolvimento do conteúdo necessário para responder as questões, os alunos retornam à questão problema que gerou os questionamentos, criam uma representação matemática que possa solucionar a questão. Exemplos análogos podem ser trabalhados para que o conteúdo não se restrinja ao modelo específico.

Etapa 3: Modelo Matemático

- **Interpretação da solução**

A partir do modelo criado, os alunos apresentam a solução para a questão, segundo o modelo apresentado.

- **Validação do modelo**

Esta é a etapa para analisar a solução obtida e comprovar a validade do modelo segundo os dados da questão norteadora. As respostas obtidas devem ser confrontadas a perguntas do tipo: o modelo criado é passível de aplicação para outras situações análogas? A solução obtida faz jus à realidade? Se a solução encontrada não satisfaz à pergunta geradora, o modelo deve ser reelaborado. Por exemplo, se a solução apresentada é para o material de menor custo, mas a capacidade de conservação é muito pequena, talvez não seja a melhor opção e novas alternativas devem ser testadas.

No exemplo de atividade que acabamos de transcrever a dinâmica de modelagem pode ser vista como uma forma de interligar a matemática acadêmica com a realidade do aluno.

Outros trabalhos de Biembengut e seus colaboradores sugerem diversas abordagens, teóricas e práticas, como alternativa de ensino que busca o equilíbrio entre currículo e aplicabilidade do conhecimento matemático por acreditar que essa estratégia viabiliza a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática bem como o interesse do aluno pela pesquisa. De acordo com Biembengut (2011), propor Modelagem Matemática na Educação implica que há um conteúdo programático a ser ensinado. Assim, quando o professor propõe aos estudantes reelaborarem um modelo matemático, poderá despertá-los para o interesse em saber mais sobre outras áreas não matemáticas envolvidas no modelo e ainda, se interessarem em saber mais sobre o próprio conteúdo matemático, indo além do proposto no programa.

Biembengut utiliza dos termos ao descrever atividades de Modelagem Matemática: *modelagem* e *modelação*. De acordo com Biembengut e Hein (2003), a diferença entre modelagem e modelação é que na modelagem não dá para prever inicialmente em que modelo se chegará nem se a matemática exigida está ao alcance do nível desejado. A modelagem “parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema” (id, p. 28). Já a modelação, “o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo sua recriação em sala, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em questão, além de obedecer ao currículo inicialmente proposto” (id, p. 29).

Nos vários trabalhos de Biembengut, podemos perceber que a inter-relação entre Matemática e realidade do aluno é apoiada pela perspectiva tanto da modelagem quanto da modelação na Educação Matemática, que é importante nas discussões do papel da Matemática na sociedade.

3.2 Modelagem Matemática segundo concepções de Burak

Nenhuma prática educativa está isenta de uma concepção de ensino e de aprendizagem, de educação, do seu objeto de estudo e, ainda mais do que se pretende com essa prática e, então vista dessa forma também não se subtrai uma concepção de homem que se deseja formar para este século XXI.

(BURAK, 2010, p.12).

Autor de várias publicações na área de Educação Matemática sobre Modelagem Matemática, Burak aponta a Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino voltada para a prática educativa, com fundamentos estabelecidos nas Ciências Humanas. Nesta perspectiva, concebe a Matemática como um instrumento importante para a formação do jovem estudante em nível de educação básica e suas respectivas modalidades. Seus trabalhos consideram a importância da Modelagem Matemática em qualquer nível de ensino, mas mantém foco na educação básica.

Na ótica de Burak a Modelagem Matemática na Matemática Aplicada constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões (BURAK, 1992, p.62). No contexto da Educação Matemática concebe-a como uma metodologia de ensino que procura dar ao aluno mais liberdade para raciocinar, conjecturar, estimar e dar vazão ao pensamento criativo estimulado pela curiosidade e motivação. Sobre sua concepção, Burak afirma que está relacionada à sua maneira de conceber a Educação Matemática e também à forma de conceber o conhecimento. “Metodologia de Ensino, pois contém premissas e essas premissas são da Filosofia, então ao se constituir uma metodologia carrega uma concepção de ciências, de ensino e aprendizagem, de educação de da própria matemática” (BURAK 2011).

Na educação básica, objeto de referência de suas pesquisas, Burak afirma que a construção de modelos não se faz necessária nem é o fim único da modelagem. A maior importância neste tipo de atividade está focada no processo de construção do conhecimento matemático, ou seja, no ensino e aprendizagem. Desvincilhando-se da obrigatoriedade da construção do modelo, o autor sugere que o processo de modelagem se desenvolva seguindo cinco etapas:

- 1) Escolha do tema;
- 2) Pesquisa exploratória;
- 3) Levantamento dos problemas;
- 4) Resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema;

5) Análise crítica da(s) solução(es).

Duas características bastante perceptíveis na Modelagem Matemática na concepção de Burak estão relacionadas à escolha do tema e desenvolvimento do conteúdo. O tema que dá origem às situações-problema, as mais variadas possíveis, é por escolha dos alunos. Esta metodologia de ensino se fundamenta em uma compreensão de ciências, incluindo a Matemática, de ensino e aprendizagem e de Educação. É neste sentido que Burak une a reflexão de aspectos relativos à Matemática, à modelagem e contexto pedagógico. Quanto ao conteúdo matemático a ser ensinado, este não determina o tema de estudo e sim o contrário, ou seja, os conteúdos ensinados são aqueles pedidos pelo assunto escolhido pelos alunos. Neste aspecto pode-se dizer que é difícil adotar esta metodologia quando existe um currículo linear preestabelecido.

Como o tema faz parte da escolha dos alunos e os conteúdos são determinados pelas atividades desenvolvidas, os questionamentos devem ser levantados no contexto de suas vivências. De acordo com Burak (2010), a construção do conhecimento sobre determinado conteúdo torna-se mais eficiente quando parte do conhecimento que cada aluno, cada grupo (ou grupo) já possui sobre o assunto. Com o intuito de melhor apreciar o processo de se fazer modelagem segundo concepções de Burak, transcrevemos a seguir um exemplo de atividade com modelagem desenvolvida por Burak em um curso de formação continuada para professores de Matemática da Educação Básica, no estado do Paraná.

Atividade de Modelagem Matemática para a sala de aula: Transporte de barro para fabricação de telhas e tijolos

O exemplo apresentado foi reatado por Burak (2004) e trata-se de uma atividade de modelagem cujo tema, *transporte de barro para fabricação de telhas e tijolos*, foi escolhido por um dos grupos que participavam do curso de formação continuada ministrado pelo autor. A transcrição da atividade será feita segundo o relato no artigo de Burak (2004). Entretanto para facilitar a leitura omitiremos referência a citações diretas.

1ª etapa: escolha do tema

Esta é a etapa que desencadeia o processo e deve ser levado em conta o interesse dos alunos, o nível de conhecimento matemático destes e o tempo disponível para desenvolver o trabalho. Cada grupo pode escolher um tema ou, em comum acordo, escolher um tema único para toda a sala, mas que seja trabalhado por cada grupo formado.

No exemplo do “transporte de barro”, não consta no artigo de Burak (2004) porque este tema foi escolhido e nem a dinâmica da escolha. A descrição começa com a segunda etapa. O problema consistia em calcular o custo de transporte do barro até o local onde se fabricava telhas e tijolos.

2ª etapa: pesquisa exploratória

O problema do transporte do barro para fabricação dos tijolos e telhas ensejou a discussão e o levantamento dos seguintes aspectos: a) Qual a distância do local onde se encontra o barro até onde são fabricadas as telhas e tijolos? b) Qual(ais) é(são) o(s) meio(s) de transporte, possíveis de serem usados?

Esta fase pode ser feita em conjunto por alunos e professor e constitui-se na obtenção de informações sobre o assunto em seus diversos aspectos. É neste momento que acontece a coleta dos dados para que os alunos possam se inteirar sobre o assunto escolhido. Os meios utilizados podem ser diversos: revistas, sites, jornais, livros, entrevistas, palestras, entre outros. Aconselha-se que as informações coletadas sejam anotadas por meio da construção de texto com informações sobre o tema tratado.

No caso do tema do exemplo em questão, “transporte do barro” o histórico pode conter informações como: Qual é o tipo de barro utilizado na fabricação de tijolos? O barro utilizado na fabricação de telhas é o mesmo utilizado na fabricação de tijolos? Qual foi a primeira fábrica de telhas ou tijolos no Brasil? Quantos tijolos e telhas são necessários para atender a demanda da região? No Brasil qual produto é mais consumido: tijolos ou telhas? A venda dos tijolos e telhas é específica para a região ou é feita para outras regiões? Qual a importância da produção de telhas e tijolos para a economia da região? Estas e outras que a grupo achar pertinente. Já no caso de o tema escolhido ser outro, como futebol, por exemplo, então pode ser feito um texto que contenha as informações: onde começou a ser praticado o futebol? Quando começou a ser praticado? Quais são as modalidades de campeonato de futebol? Quando acontecem? Quantos times participam? Como é construído um campo de futebol? Quantos jogadores são? E outros aspectos julgados importantes pelo grupo.

3ª etapa: levantamento do(s) problema(s)

Esta é a etapa do delineamento do problema, que inicialmente é formulado em linguagem corrente ou natural e depois transferido para linguagem matemática. Os dados coletados na pesquisa exploratória dão sustentação à etapa de levantamento do problema ou dos problemas relativos ao tema. Na qualidade de mediador, o professor é de importância fundamental neste trabalho, pois esse é o momento em que se pode contribuir de forma significativa com o estudante no desenvolvimento de sua autonomia, na formação de um espírito crítico.

No caso da atividade do transporte do barro essa questão pode ensejar o levantamento de várias hipóteses, tais como: caminhão, carroça, vagonete, sistema mecânico e outros. A análise de cada uma das hipóteses levantadas pode ensejar outras hipóteses. O grupo assumiu a hipótese de que o transporte fosse feito por caminhão. Naturalmente surgem novas questões. Qual a capacidade do caminhão? Qual a necessidade da indústria? Qual o combustível utilizado? Qual o consumo de combustível do caminhão: Quando carregado? Quando vazio? Qual o tempo gasto na locomoção? No carregamento? Percebe-se que a cada hipótese colocada, novas questões e oportunidades de discussões surgem em relação à situação colocada.

4ª etapa: resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema

Nesta fase se faz o equacionamento do problema, ou seja, traduz-se o problema em linguagem matemática e se apontam as relações entre as variáveis que constituem o modelo. Geralmente o equacionamento resulta na forma de uma equação, inequação, sistema de equações, mas também pode resultar em um gráfico, na planta baixa de uma casa, em um mapa, em uma tabela, entre outros. Todavia, Burak põe ênfase maior no uso de matemática em prol do equacionamento. Nesta etapa, o professor deve ficar atento, pois às vezes o conteúdo necessário à resolução do problema, pode ainda não ter sido trabalhado. Então é um momento oportuno para que o professor introduza esse conhecimento.

Observação: Neste exemplo do transporte do barro o autor não apresenta a que resultado os alunos chegaram, preferindo chamar a atenção para as várias possibilidades de resultados.

5ª etapa: análise crítica da(s) solução(es)

De acordo com Burak (2011) a “análise crítica do(s) resultado(s) tem um objetivo maior que é o verificar a coerência, a aplicabilidade e adequabilidade à situação em estudo”. Para o autor a análise crítica das soluções deve ser feita no sentido de verificar se uma determinada resposta está de acordo com a situação estudada e também levantar novas hipóteses - matemáticas ou não - sobre a questão em estudo. “Se estamos comparando a viabilidade de se utilizar o álcool ou a gasolina por questão de preços pode-se levantar a questão do meio ambiente, questão da produção da cana sob vários pontos de vistas, social, econômico, cultural, histórico, entre outros” (BURAK, 2011).

De acordo com o autor sua concepção de Modelagem Matemática foi construída ao longo dos anos, em conformidade com as experiências vividas e também nos cursos que ministrou para professores da educação básica. Para Burak (2011), “[...] não há uma visão melhor ou pior, depende daquilo que cada um dos pesquisadores viveu e vive em relação à Modelagem”. Também depende da concepção de mundo, de sociedade, de ensino e de aprendizagem, de educação e da própria Matemática.

3.3 Modelagem Matemática segundo concepções de Barbosa

Para uma atividade ser definida ou não como modelagem, é necessário que ela seja um problema para os alunos, ou seja, eles não devem ter estratégias prontas “às mãos”, e ela tenha referência na realidade (ou seja, extraída do dia-a-dia ou de outras ciências. (BARBOSA, 2008, p. 48).

Referência nacional e internacional em Modelagem Matemática, Barbosa concebe-a no contexto educacional como um ambiente de aprendizagem. Em vários de seus trabalhos, o autor afirma a Modelagem Matemática na Educação Matemática veio da Matemática Aplicada, mas existem diferenças explícitas entre uma modelagem e outra. De acordo com Barbosa (2011), “a principal das diferenças refere-se ao propósito, ou seja à intenção. Enquanto o modelador profissional possui o objetivo mais pragmático, o de resolver um problema, os professores e os alunos estão envolvidos em ambiente pedagógico, portanto, com propósitos de aprendizagem”. O autor também entende que no caso da modelagem com

fins de ensino e aprendizagem ocorre em ritmos diferentes e a importância maior está no processo em vez do modelo matemático final.

Segundo Barbosa (2011), com relação à linguagem matemática, o controle das ações na atividade de Modelagem Matemática na sala de aula não é tão rígido quanto àquele exigido do modelador profissional. Em relação à concepção de “Matemática” o autor afirma que a utilização da expressão “referência na realidade” sugere uma diferença em relação à expressão “mundo real”, ou seja, quando utiliza referência na realidade está concebendo a Matemática como parte da realidade. Contudo por compreender que esta nomenclatura pode gerar uma dificuldade filosófica de compreensão, ultimamente adota as expressões “situações do dia a dia, do mundo do trabalho e das ciências”.

Em relação às diferentes maneiras de conceber a Modelagem Matemática no cenário nacional, Barbosa (2011) afirma que, mais importante que entender o que é Modelagem Matemática, é o professor compreender “o que acontece quando implementamos modelagem matemática [na sala de aula], seja lá o que se entenda por isto. Precisamos deixar de sermos prescritivos e sermos mais descritivos em relação à conceitualização do ambiente”. A afirmação do autor sugere que mais importante que entender Modelagem Matemática como um método, uma metodologia, ou qualquer outra concepção, é entender os propósitos educacionais que ela apresenta.

Quanto ao modelo matemático, Barbosa (2007, p. 161) concebe-o como “qualquer representação matemática da situação em estudo”. Mas afirma que, na sala de aula, o importante nas atividades de Modelagem Matemática não é chegar a um modelo matemático, mas sim o processo de investigação por meio da Matemática. Isso significa que ao conceber Modelagem Matemática como ambiente de aprendizagem em termos de convite para a investigação; o aceite do convite pelos estudantes e a subsequente investigação utilizando matemática, mesmo não chegando a uma representação matemática, é Modelagem Matemática. Porque o ambiente de aprendizagem está instaurado em termos do convite proposto pelo professor. A forma como os alunos respondem a isto pode ser diversa” (BARBOSA, 2011).

Favorável à inclusão da Modelagem Matemática na proposta curricular de Matemática para a educação básica, Barbosa (2011) reconhece existir vários objetivos para essa inclusão e sublinha um deles como fundamental, que é oportunizar a “reflexão da natureza e do papel dos modelos matemáticos na sociedade”. O autor afirma, “Particularmente, prefiro sublinhar esta última”. Ainda na concepção de Barbosa, “o professor pode começar a implementar modelagem da forma que se sente seguro”, apontando a classificação de três maneiras para

organizar o trabalho pedagógico na sala de aula em termos de casos 1, 2 e 3 (ver quadro 3). Sugere ainda que nas primeiras experiências iniciar pelo caso 1 pode dar maior segurança ao professor antes de avançar para os casos 2 e 3.

Atividade de Modelagem Matemática para a sala de aula:

Os exemplos a seguir estão relacionados com as três possibilidades para trabalhar modelagem na sala de aula segundo os casos 1, 2 e 3, enumerados por Barbosa (2004 p.76-77). Trata-se de um recorte de sugestões discutidas pelo autor no artigo. Para facilitar a leitura omitiremos referência a citações diretas.

Caso 1

O professor apresentou um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação de informações fornecidas pelo professor. Aqui, os alunos não precisaram sair da sala de aula para coletar novos dados e a atividade não foi muito extensa. O professor solicitou aos alunos que investigassem sobre os planos de pagamento disponíveis no mercado para ter acesso à internet. Os preços a seguir foram coletados pelo professor de uma companhia que oferece o serviço de internet, como mostrado na tabela abaixo. Foi pedido aos alunos que decidissem pelo melhor plano.

	Assinatura mensal(R\$)	Tempo de acesso incluído (h)	Tempo adicional	Por hora (R\$)
Plano 1	17,95	-	0,73	
Plano 2	27,95	15	0,53	
Plano 3	49,95	60	0,35	
Plano 4	75,95	150	0,35	

Esta atividade ofereceu aos alunos a oportunidade de trabalhar “um problema” que qualquer pessoa poderia enfrentar no dia-a-dia. A investigação tomou pouco tempo, cerca de 150 minutos (ou 3 aulas), incluindo a discussão dos resultados.

Caso 2

No caso 2, o professor propôs aos alunos a mesma atividade, mas os alunos se depararam apenas com o problema para investigar. Eles tiveram que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, coube apenas a tarefa de formular o problema inicial. “Quanto custa ter acesso à internet?” O problema foi discutido pelo professor, porém sem dar nenhuma tabela de preços e os grupos ficaram responsáveis pela coleta daqueles dados que julgaram necessários para resolverem o problema. Também precisaram selecionar as variáveis importantes e traçar estratégias de resolução. Essa atividade demandou mais tempo que a anterior, consumindo algumas semanas. Durante esse tempo, os alunos trabalharam fora da sala de aula e discutiram com o professor o desenvolvimento da tarefa. O projeto pôde ser concluído com uma apresentação oral de cada um dos grupos e subsequente discussão. Nesse caso, o professor teve menos controle sobre as atividades dos alunos e esses tiveram maior oportunidade de experimentar todas as fases do processo de Modelagem.

Caso 3

O caso 3, trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas “não matemáticos”, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução foram tarefas dos alunos. Os estudantes iniciaram as atividades levantando questões sobre alguns tópicos. É comum no início, os estudantes não possuem uma ideia clara sobre como proceder. No exemplo dado por Barbosa (2004), à medida que se tornaram mais familiarizados com o tema e as variáveis, e após discussões com o professor, os alunos escolheram uma questão singular para perseguir, que no caso foi: “Qual é o impacto da contribuição social sobre os salários?” Daí, eles coletaram e organizam dados antes de resolver o problema. Nesse caso, a atividade de Modelagem tomou considerável tempo em relação aos casos anteriores, em particular pela dificuldade inicial dos alunos em formularem o problema. Como no caso 2, o professor acompanhou o trabalho dos alunos nas salas, mas os alunos precisaram desenvolver a maior parte em tempo extra.

As três atividades descritas anteriormente foram vivenciadas por Barbosa em sala de aula com seus alunos. O autor não chega a citar a que conclusão os alunos chegaram na resolução dos problemas. Mas afirma que os dados surgidos pelas falas dos alunos podem interferir ou não na solução das atividades. Os mesmos dados podem interferir no ensino e aprendizagem dependendo do uso que os alunos e o professor fazem delas.

De acordo com Barbosa (2008, p. 55), as reflexões durante as atividades estão baseadas no contexto da prática dos alunos. “Se eles estão numa aula de matemática, falar sobre matemática é relevante, mesmo que não contribua claramente na construção do modelo matemático”. Ademais de acordo com a finalidade do professor e o contexto escolar, é razoável que qualquer discussão seja destacada. “No caso específico da perspectiva sociocrítica, busca-se que os alunos não se restrinjam às discussões matemáticas e técnicas, mas desenvolvam as reflexivas, porque elas constituem uma oportunidade para refletir sobre a natureza e o papel dos modelos matemáticos na sociedade” (BARBOSA, 2008, p. 51).

Podemos retomar a questão da realização de atividades de modelagem na sala aula, pela concepção de Barbosa, apontando que os exemplos citados poderiam ter gerado outras soluções, por exemplo, uma cobrança diferenciada para famílias carentes no caso do plano de pagamento para ter acesso à internet (casos 1 e 2) ou no caso da atividade 3 a que a contribuição sindical não fosse cobrada dos trabalhadores, um aumento no salário mínimo proporcional ao aumento à cobrança dos impostos, o corte nas despesas em relação a outros gastos, etc..

3.4 Modelagem Matemática segundo concepções de Bean

A modelagem é uma atividade humana na qual uma parte da realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente. O cerne da modelagem reside no recorte e na formulação de um isolado, ou seja, na conceitualização de um fenômeno com fundamento em premissas e pressupostos que remetem tanto ao fenômeno quanto aos objetivos do modelador. (BEAN, 2009, p. 94).

Dedicado ao estudo da Modelagem Matemática desde o final da década de 1990, Bean possui vários artigos publicados sobre o tema e destaca-se no meio acadêmico por promover uma concepção de modelagem diferente daquelas cujos propósitos remetem a metodologias ou métodos de ensino. Bean concebe a modelagem em termos da adoção de premissas e da formulação de pressupostos e considera que a modelagem com o adjetivo “matemática” é no sentido abrangente, “uma atividade, entre uma variedade de possíveis atividades, utilizada para lidar com situações problemáticas empregando a linguagem matemática” (2007, p. 48).

Bean acredita que a ênfase colocada nas premissas e nos pressupostos é o que caracteriza suas ideias a respeito da modelagem em relação aos outros autores, mas entende que sua concepção seja coerente com outras concepções enquanto atividade de modelar. De acordo com Bean (2011), “[...] a modelagem na concepção de premissas e pressupostos é a mesma modelagem do matemático aplicado, a mesma daquela que Skovsmose se refere ao discutir a formatação de atividades socioeconômicas e, ainda, a mesma daquela do estudante modelador do Ensino Fundamental”. Afirma ainda que “modelar é formatar e estruturar nossa realidade pela construção de modelos”. Essa concepção aponta para que modelos matemáticos sejam construídos criados para orientar a interação humana com o mundo.

Fazer modelagem na concepção de Bean envolve a adoção de premissas e a formulação de pressupostos de maneira diferente da tradicional ao abordar um problema; e assim, a construção do modelo depende dos objetivos de quem modela. As premissas podem ser consideradas como princípios que guiam o pensamento do modelador, consciente ou inconscientemente, na construção do modelo. Já um pressuposto é uma afirmação feita a respeito de um aspecto mais específico a uma dada situação que leva em consideração os objetivos do modelador. Podemos afirmar que uma premissa, na maioria dos casos, é uma ideia adotada pelo modelador, enquanto um pressuposto é formulado pelo modelador. E, segundo Bean (2011) “o modelador não tem pretensão de comprovar seus pressupostos, entretanto, eles devem ser coerentes com as premissas ou, pelo menos, não contradizê-las”.

Ao defender a inclusão da modelagem no currículo escolar, Bean contextualiza, que embora um dos objetivos da Educação é a reprodução das práticas socioculturais, que por sua vez são norteadas por modelos, sejam matemáticos ou outros; outro objetivo trata a transformação de práticas socioculturais. De acordo com o autor, quando propomos aos nossos estudantes que realizem atividades de modelagem, no sentido de “premissas e pressupostos”, estamos também propondo ensinar atitudes e valores que os conscientizem a respeito de premissas e pressupostos em modelos socioculturais e reconhecer que premissas e pressupostos podem ser diferentes daqueles presentes nos modelos tradicionais. “Ao propor um conjunto de premissas e pressupostos diferente do que tradicionalmente empregado, eles estão propondo transformação” (BEAN, 2011).

Quanto ao processo para se fazer modelagem na sala de aula, Bean (2011) considera que “é importante criar um ambiente ou cenário propício para que os estudantes possam elaborar conceituações criativas”. A partir daí eles podem criar seus próprios modelos ao se encontrarem frente a situações problemáticas que abrem para a adoção de premissas e / ou a formulação de pressupostos. Pedagogicamente, Bean assinala que existem múltiplos

caminhos a serem adotados na atividade de modelar e que a escolha de um ou outro caminho depende da situação e de múltiplas relações envolvendo os estudantes e o professor. O caminho pretendido pode mudar de acordo com a dinâmica da atividade.

Para efeito ilustrativo, vamos fazer um recorte de um exemplo relatado e comentado por Bean (2009), de uma situação que envolve modelagem, focalizando as premissas e os pressupostos que fundamentam os modelos. Trata-se de uma interpretação do artigo de Peled e Bassan-Cincinatus (2005) que propõe o objetivo de repartir entre duas pessoas um prêmio lotérico.

O problema proposto por Peled e Bassan-Cincinatus (2005), citado e adaptado por Bean (2009) é o seguinte: “Dois amigos, Maria e José, compraram um bilhete lotérico juntos. Maria pagou R\$ 3,00 e José R\$ 2,00. O bilhete ganhou R\$ 40,00. Como é que eles devem compartilhar o dinheiro?”. De acordo com Bean, este é um problema aparentemente de fácil resolução, entretanto no contexto de “premissas” e “pressupostos” a repartição pode ser realizada de várias maneiras. Ou seja, modelagem como atividade humana, qualquer que seja, envolve os objetivos e os valores do modelador.

Ao pensar no prêmio, os amigos podem concordar em doar o dinheiro para uma entidade de assistência social. Mas, partindo da premissa (ou princípio) que o prêmio é para ser repartido entre as pessoas que arriscaram seu dinheiro na compra do bilhete, o pensamento recairia em formas de divisão entre os dois amigos. Segundo Bean, a divisão pode ser feita de forma diretamente proporcional ao valor arriscado na razão 3:2. Ou seja, o pressuposto é os bens serem repartidos proporcionalmente às quantias arriscadas. Assim Maria ficaria com R\$ 24,00 e José com R\$ 16,00. Se Maria e José forem estranhos, a proporcionalidade pode ser uma “boa solução” para a repartição, uma vez que a proporcionalidade é tão embutida em nossa cultura.

Mas, a distribuição proporcional pode ser questionada e outras soluções podem ser consideradas. Se Maria e José forem pessoas próximas com hábito de compartilhar, talvez outro pressuposto seja mais indicado. Nesse contexto, a diferença de um real na compra do bilhete pode não ter tanta importância e assim a repartição por proporcionalidade talvez não seja apropriada. Com base no tipo de amizade existente entre Maria e José, uma repartição do prêmio em partes iguais talvez fosse mais indicada.

Para refletir mais a respeito de proporcionalidade como base da repartição, Bean propõe ainda outro cenário: vamos mudar a quantia do prêmio de R\$ 40,00 para R\$40 000,00. Neste caso, se adotarmos uma repartição proporcional, a divisão seria R\$ 24.000,00 para Maria e R\$ 16.000,00 para José. É justo?

As explicações de Bean nos remetem à importância de enxergar aos interesses e às necessidades que fundamentam os pressupostos que servem como base para os algoritmos matemáticos empregados em modelos. Além, disso, o autor aponta a importância de refletir que as premissas e os pressupostos, às vezes, por serem tão embutidos em nossa maneira de compreender e lidar com a realidade permanecem despercebidos e acabamos reproduzindo atividades tradicionais sem uma reflexão crítica.

4 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Se pudesse deixar alguma coisa a você,
 Deixaria aceso o sentimento de amor pela vida dos seres humanos.
 A consciência de aprender tudo o que foi ensinado pelo tempo afora.
 Lembraria os erros que foram cometidos para que não mais se repetissem.
 A capacidade de escolher novos rumos.
 Deixaria para você, se pudesse, o respeito àquilo que é indispensável:
 Além do pão, o trabalho. Além do trabalho, a ação.
 E, quando tudo mais faltasse, um segredo:
 o de buscar no interior de si mesmo,
 a resposta e a força para encontrar a saída.
 (Mahatma Gandhi).

Como afirmamos no início, este documentário é fruto da busca de respostas para indagações e questionamentos referentes a diferentes concepções de Modelagem Matemática no contexto da sala de aula. O aprofundamento nas leituras sobre a temática, trouxe compreensões a respeito da existência de concepções diferenciadas sobre modelagem, bem como em relação às diferenças e/ou semelhanças dessas concepções e suas contribuições para a Educação Matemática.

Um consenso percebido nas diferentes concepções dos autores que investigam a Modelagem Matemática é que ela traz contribuições positivas para a sala de aula. As singularidades de suas concepções ficam focadas nas maneiras de condução do processo de modelagem e nas significações do termo. São concepções que revelam a originalidade de seus autores na criação de propostas que “direcionam” a chamada Modelagem Matemática.

Foi possível identificar nas concepções dos autores estudados, alguns dos fundamentos que estão por trás da escolha de trabalhar modelagem de uma ou outra maneira. Em geral, os autores apontam que práticas de investigação desenvolvidas por modeladores profissionais podem ser trazidas para a sala de aula gerando uma oportunidade para a investigação, reflexão sobre modelos vigentes na sociedade e desenvolvimento de valores, além de despertar o interesse pelo conhecimento matemático ou não matemático, programático ou não.

Percebemos pelas ideias dos quatro autores apontados neste documentário, que há uma diferenciação na maneira como cada um deles concebe Modelagem Matemática. Eles têm pontos de partida semelhantes no que diz respeito às primeiras experiências com Modelagem Matemática derivar da Matemática Aplicada, contudo ao longo de suas pesquisas adquiriram

concepções diferentes para conceituar Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática.

Para Biembengut, modelagem é um método de ensino, para Burak uma metodologia, para Barbosa, um ambiente de aprendizagem e para Bean uma atividade de criar modelos com noções de premissas e pressupostos. No entanto, são unânimes ao defender a inclusão da Modelagem Matemática na proposta curricular de Matemática. Há concordância entre os autores em relação à crença de que certas habilidades são favorecidas por atividades de modelagem: como saber investigar, tomar decisões, refletir sobre o papel da Matemática e dos modelos na sociedade, analisar, entre outras.

Uma das ideias não compactuadas é em relação à linearidade dos conteúdos programáticos. Enquanto Burak defende a quebra da linearidade dos conteúdos programáticos; Biembengut defende a adaptação da modelagem para a sala de aula (*modelação*) de forma a favorecer a abordagem dos conteúdos programáticos. Sobre esta questão de linearidade ou não dos conteúdos programáticos, Barbosa e Bean entendem que depende dos objetivos segundo os quais, atividades de modelagem são propostas na prática da sala de aula.

Em relação ao caminho (como fazer modelagem) adotado em atividades de modelagem na sala de aula, pode-se dizer que orientações de Biembengut e Burak aproximam-se quando sugerem um conjunto de etapas a ser seguido no desenvolvimento do processo. Mas possuem orientações diferentes quanto à necessidade de chegar a um modelo matemático final. No entendimento de Biembengut faz-se necessário a construção ou a reconstrução de um modelo e as atividades são conduzidas no sentido de ensinar aos estudantes conteúdos de Matemática e a fazerem pesquisas. Já para Burak a construção de um modelo matemático não é uma obrigatoriedade e as atividades são conduzidas no sentido de trazer os problemas do cotidiano para a sala de aula e contextualizá-los aos conteúdos matemáticos, o que exige a quebra da linearidade dos conteúdos programáticos.

Ainda em relação à questão “como fazer Modelagem Matemática” Barbosa (2001, 2011) categoriza atividades de modelagem na sala de aula dentro de três possibilidades: casos 1, 2 e 3 (ver quadro 3), já Bean não aponta etapas sequenciais para a realização de atividades na sala de aula. Acredita que existem diretrizes para isso, porém a avaliação de como utilizá-las cabe ao professor diante de cada caso em especial. A diferença é que para Barbosa a modelagem é uma tarefa para ser realizada por estudantes e professor. Já para Bean cabe aos alunos a tarefa de modelar. Ao professor cabe a orientação.

Das reflexões feitas neste documentário sobre Modelagem Matemática e de experiências vivenciadas em salas de aula, apontamos alguns subsídios para a prática do “fazer modelagem” na sala de aula de Matemática como desencadeadora de momentos de aprendizagem:

- 1) Ao trabalhar Modelagem Matemática, é importante valorizar suas raízes filosóficas e sua evolução como ciência.
- 2) Considerar a realidade, na qual educador e estudantes estão inseridos, é relevante em atividades de modelagem.
- 3) Existem maneiras diferentes de conceber e fazer Modelagem Matemática. Contudo, é importante trabalhar modelagem seguindo sem considera-la um receituário "pronto e acabado".

Acreditamos que ao propor atividades de Modelagem Matemática para a sala de aula, é importante ter clareza das intenções que se tem ao trabalhar tais atividades. Se o objetivo é ensinar conteúdos matemáticos programáticos, por exemplo, cabe a escolha de uma maneira de trabalho, se o objetivo é refletir sobre questões sociopolíticas e a partir delas buscar ferramentas matemáticas para resolvê-las, talvez caiba a escolha de outra maneira de trabalho. Também é possível apropriar-se de aspectos de várias concepções e propor novas idéias. O primado de apontarmos as diferenças sobre as concepções de Modelagem Matemática entre os autores é compreender parte de uma ciência em desenvolvimento, de modo a contribuir a reflexão em termos de exemplos e consulta. Ressalta-se que as concepções levantadas neste texto não são únicas, pois foram identificadas de uma amostra de estudiosos. Porém cada uma delas poderá ser assumida, em parte ou total, levada para novos contextos e a partir de novas experiências vividas com a prática da modelagem, a transforma de acordo com as necessidades e objetivos educacionais.

Acreditamos que é em conformidade com o próprio conhecimento, com as experiências individuais e coletivas, adequação de ideias e concepções do ensino e da própria Matemática que professores encontram experiências positivas e desafiadoras no campo da Modelagem Matemática. Para uns a experiência abre um novo olhar no espaço sala de aula. Para outros representa uma forma de facilitar o ensino e aprendizagem de Matemática. Para alguns ainda oferece a oportunidade de refletir sobre questões da sociedade, sobre valores e

objetivos. Se concepções se formam por meio das vivências e experiência de cada um é, pois, de se esperar que nos mesmos tratamentos se façam as contribuições da modelagem para a Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos.** (Tese de Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

BARBOSA, J. S. **Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa.** [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por <vilmavcb@uol.com.br> em 20 jul 2011. Questionário aberto respondido a Vilma Candida Bueno.

BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. In: **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.69-85, jul. 2009 a. ISSN 1982-5153.

BARBOSA, J. C. As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem modelagem matemática. In: **Acta scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Canoas, v. 10, n. 1, p. 47-58, 2008c. Disponível em: http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoesanteriores/Acta_Scientiae_v.10_n.1_2008.pdf (Acesso em 01/08/2010).

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, M. L. C. Modelagem matemática: como o conhecimento prévio dos alunos interfere na construção do modelo matemático. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2008, Guarapuava. **Anais...** Guarapuava: UNICENTRO, 2008 a. 1 CD-ROM. Disponível em Disponível em <http://sites.uol.com.br/joneicb>. Acesso em: 10/05/2010.

BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007e. p.161-174.

BARBOSA, J. C. Sobre a pesquisa em Modelagem Matemática no Brasil. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007 d, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: UFOP/UFMG, 2007. 1 CD-ROM, p. 82-103.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como?** Veritati, Salvador, n. 4, p. 73-80, 2004c

BARBOSA, J. C. As relações dos professores com a Modelagem Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004b. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004 a. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C., **Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores**, (Tese de Doutorado) – UNESP - Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino- aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BEAN, D. W. **Prof. Dr. Dale William Bean** [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por <vilmavcb@uol.com.br> em 16 jun. 2011. Questionário aberto respondido a Vilma Candida Bueno.

BEAN, D. W. Modelagem: uma conceituação criativa da realidade. In: **Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto 4, 2009, Ouro Preto 4, Ouro Preto – MG**. Anais... Univesidade Federal de Ouro Preto – Ouro Preto, abril 2009a. p. 90-104.

BEAN, D. W. Práticas Culturais e Modelos Matemáticos. In: **Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática 6, 2009**. Anais... Londrina, novembro 2009b.

BEAN, D. Uma Mudança na Base Conceitual. In: 2007. Conferência Nacional **Anais... Ouro Preto: UFOP, 2007**. p. 35-58, 1 CD-ROM.

BEAN, D. Realidade como interação com o mundo. In: **Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 4, Feira de Santana – BA**. Anais... Universidade Estadual de Feira de Santana – Feira de Santana, 2005. 10 p.

BIEMBENGUT, M. S. **Prof.ª Maria Salett Biembengut** [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por <vilmavcb@uol.com.br> em 06 jun. 2011. Questionário aberto respondido a Vilma Candida Bueno.

BIEMBENGUT, M. S., HEIN, N. Sobre a Modelagem Matemática do saber e seus limites. In: BARBOSA, J. C; CALDEIRA, A. D. e ARAÚJO, J. L. (Org.) **Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. São Paulo: SBEM. 2007 v.3, p. 33-47.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática**. 2. ed. Blumenau: Edifurb, 2004. v. 1. 134 p.

BIEMBENGUT, M. S, HEIN, N.; **Modelagem Matemática no Ensino**. 3ª edição – São Paulo: Contexto, 2003. 128 p.

BUENO, V. C. **Concepções de Modelagem Matemática e Subsídios para a Educação Matemática: Quatro maneiras de compreendê-la no cenário nacional**. 2011. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade, UFOP, Ouro Preto, MG, 2011.

BURAK, D. **Prof. Dr. Dionísio Burak** [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por <vilmavcb@uol.com.br> em 07 jun. 2011. Questionário aberto respondido a Vilma Candida Bueno.

BURAK, D Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. In: **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, 2010, p. 10-27, Vol. 1, No. 1, 1

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: **I EPMEM -Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática., 2004, Londrina.** Anais do I EPMEM, 2004. Disponível em <http://www.dionisioburak.com.br/trabalhos.html> . Acesso em 30/ 05/ 2010.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** Campinas-SP, 1992. Tese (Doutorado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série.** Rio Claro-SP, 1987. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - IGCE, Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho-UNESP.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. In: **Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.** Santa Catarina, v. 2, n. 2, p.33-54, jul 2009.

CIFUENTES, J. C., NEGRELLI, L. G. N. Modelagem Matemática e o método axiomático. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007. p.63-77.

FERREIRA, Aurélio B. de Hollanda. **Novo Dicionário da Língua Portuguesa.** 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986. 1838 p

HERMINIO, M. H. G. B. **O processo de escolha dos temas dos projetos de modelagem matemática.** UNESP. - Rio Claro/ SP. 2009. 139 f. (Dissertação de Mestrado).

JACOBINI, O. R; WODEWOTZKI, M. L. L. Uma Reflexão sobre a Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica. In: **BOLEMA**, Vol. 199, n. 25, 2006, Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1876/1653>. Acesso em: 25 Abr. 2011.

JACOBINI, O. R. **A Modelagem Matemática como instrumento de ação política na sala de aula.** 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

KLÜBER, T. E; BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: Contribuições Teóricas. In: **Educ. Mat. Pesqui, São Paulo**, v. 10, n. 1, pp. 17-34, 2008. Disponível em <http://www.dionisioburak.com.br/trabalhos.html> . Acesso em 30/ 05/ 2010

KLÜBER, T. E; BURAK, D. Modelagem Matemática: pontos que justificam sua utilização no ensino. In: **IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte, MG. Anais... IX ENEM.** Belo Horizonte: UNI-BH, 2007, p 1-19. Disponível em <http://www.dionisioburak.com.br/trabalhos.html> . Acesso em 30/ 05/ 2010

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em ambiente de modelagem.** (Dissertação de Mestrado) UNESP, Rio Claro, 2004.

APÊNDICE 1_ Quem é Maria Salett Biembengut?

Maria Salett Biembengut² possui graduação em Ciências Físicas e Biológicas com habilitação em Matemática pela Faculdade de Ciências e Letras de Mogi Mirim (1980), graduação em Pedagogia pela Faculdade Plínio Augusto do Amaral (1985), especialização em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas-SP (1987) e mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1990). Fez doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas pela Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Brasil (1997) e pós-doutorado em Educação pela Universidade de São Paulo - USP (2003) e também pela University of New Mexico (USA).

A autora vem se dedicando à pesquisa em Educação Matemática em especial em Modelagem Matemática desde 1986. Neste tempo publicou vários artigos em periódicos especializados e em anais de eventos, 5 livros e 12 capítulos de livros. Orientou diversas dissertações de mestrado, monografias e iniciações científicas nas áreas de Educação e Educação Matemática. Foi presidente da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, no período de 1992 a 1995. Na Universidade Regional de Blumenau FURB atuou de 1990 a 2010 no Departamento de Matemática e nos Programas de Pós-graduação em Educação e em Ensino de Ciências e Matemática; aposentou-se em fevereiro de 2010 e passou a atuar como professora voluntária. Desde agosto de 2010, na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul PUCRS, atua na Faculdade de Matemática e no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. É idealizadora e fundadora do Centro de Referência em Modelagem Matemática no Ensino - CREMM. Biembengut possui uma concepção de Modelagem Matemática explicitamente assumida no meio acadêmico e é hoje referência nacional e internacional na área. Os trabalhos, tanto como pesquisadora e escritora, quanto orientadora de trabalhos acadêmicos, são direcionados aos três níveis do ensino: Fundamental, Médio e Superior.

² Fonte: Sistema de Currículo Lattes da autora. Acessado em 10/ 07/ 2011.

APÊNDICE 2 _ Quem é Dionísio Burak?

Dionísio Burak³ possui graduação em Matemática pela Faculdade Estadual de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava, hoje Universidade Estadual do Centro Oeste – UNICENTRO (1973) e especialização em Cálculo Avançado pela Universidade Estadual do Centro-Oeste (1976), mestrado em Ensino da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos da Educação pela UNESP – Rio Claro (1987) e doutorado em Educação pela Unicamp – SP (1992). A principal área de atuação é Educação Matemática com foco em Modelagem Matemática. Dionísio Burak é professor do Departamento de Matemática da UNICENTRO e constitui o corpo docente do Programa de Mestrado em Educação, na linha de pesquisa Ensino-Aprendizagem. É líder do Grupo de Pesquisa e Ensino em Educação Matemática da Unicentro e Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática da UEPG – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Desenvolveu tanto a pesquisa de mestrado quanto a tese de doutorado na área de Modelagem Matemática voltada para a formação continuada de professores de Matemática dos ensinos Fundamental e Médio e tem diversos trabalhos publicados na área.

³ Fonte: Sistema de Currículo Lattes do autor. Acessado em 10/ 07/ 2011.

APÊNDICE 3 _ Quem é Jonei Cerqueira Barbosa?

Jonei Cerqueira Barbosa⁴ possui graduação em Matemática pela Universidade Católica do Salvador (1997), doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2001) e estágio pós-doutoral na London South Bank University (2008). É professor do Departamento II da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia. Atua no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências e no Programa de Pós-Graduação em Educação, ambos da UFBA. É membro do Núcleo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática – NUPEMM (UEFS, Feira de Santana – BA). É pesquisador na área de Educação Matemática, com ênfase em Modelagem Matemática, atuando principalmente na análise das práticas dos alunos e dos professores no ambiente de Modelagem Matemática. É membro da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), desde 1994, onde atualmente compõe a Comissão Editorial. Também integra o Comitê Executivo do ICTMA (The International Study Group for Mathematical Modelling and Applications), grupo filiado ao ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).

⁴ Fonte: Sistema de Currículo Lattes do autor. Acessado em 10/ 07/ 2011.

APÊNDICE 4 _ Quem é Dale William Bean?

Dale William Bean⁵ possui graduação em História - Washington State University (1977) com licenciaturas em Matemática e Ciências Sociais. Mestrado Profissional em Educação Matemática - Portland State University (1995) e Doutorado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (2004) na área de Educação Matemática. Possui experiência como professor de Matemática no Ensino Médio e no Ensino Superior. É professor do Mestrado Profissional em Educação Matemática. As áreas de estudo e pesquisa são: Modelagem matemática no âmbito educacional; Informática no âmbito educacional - com foco em Educação Matemática; Ensino e aprendizagem; Pragmatismo. É orientador da presente pesquisa.

Bean fez mestrado profissional com um projeto curricular sobre ensino de simetria envolvendo estruturas de cristais e doutorado em Educação, linha de Educação Matemática cujo tema foi à aprendizagem no Cálculo. É líder do Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Modelagem Matemática no Âmbito Educacional - GEPMAE, Universidade Federal de Ouro Preto.

⁵ Fonte: Sistema de Currículo Lattes do autor. Acessado em 10/ 07/ 2011.