UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS/ICEB

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FERRAMENTA PARA A APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO.

WILTON NATAL MILANI

OURO PRETO

2011

Caro(a) professor(a),

A proposta de ensino, aqui apresentada, foi construída a partir dos resultados da pesquisa de Mestrado em Educação Matemática do Programa de pós-graduação da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulada: “A Resolução de Problemas como ferramenta para a aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio.   A pesquisa foi realizada com alunos do 1° ano do Ensino Médio de uma escola na cidade de Ponte Nova.

A realização da pesquisa surgiu das minhas preocupações com o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos através do uso mecânico de fórmulas e algoritmos. Precisamente em PA e PG notava o desinteresse dos alunos em um conteúdo que julgo agradável e que oferece ótimas oportunidades de contextualização.

Além da proposta de ensino, este material traz a história das progressões e meus estudos sobre a Resolução de Problemas, portanto a minha sugestão é a leitura do referencial teórico como forma de entendimento e apoio no desenvolvimento das atividades pelo professor.

Embora a metodologia empregada tenha contemplado todo o conteúdo de progressões, este material apresenta 5 atividades que resumem de forma satisfatória o trabalho desenvolvido. Cabendo ao professor apenas a seleção de problemas que contemplem os conteúdos de progressões aqui não contemplados.

Os problemas apresentados são abordados em sala de aula como geradores do conhecimento, por isso é fundamental a socialização e discussão das resoluções para o processo de validação das conjecturas dos alunos.

Desejo que este material possa contribuir não apenas para o ensino e aprendizagem das progressões, mas também com a utilização frequente e eficaz da Resolução de Problemas em sala de aula.

Wilton

HISTÓRIA DAS PROGRESSÕES

As sequências numéricas estão relacionadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração. Por esse motivo, encontramos problemas envolvendo diversos tipos de padrões e sequências em importantes documentos de civilizações antigas.

O estabelecimento de padrões fez-se necessário para os egípcios entenderem as enchentes do Rio Nilo. Para plantar na época certa, tiveram que observar os períodos de cheias e secas do rio. Acompanhando a frequência de enchentes, os egípcios criaram um calendário solar composto de 12 meses, de 30 dias e mais 5 dias de homenagens aos seus deuses. Dividiram ainda o ano em três estações: época de semear, época de crescimento e da colheita.

Segundo Eves (2004), por volta de 4700 a.C., na Babilônia, além de existir um calendário solar próprio, já se trabalhava com tábuas de cálculos nas quais se encontravam sequências de quadrados e cubos de números inteiros. A tabula do Louvre apresenta a soma da sequência de quadrados de inteiros $1 + 2 + 2^2 +... + 2^9$. Outras tabulas babilônicas apresentavam problemas envolvendo juros compostos.

O domínio da tecnologia do papiro, planta típica encontrada às margens do Rio Nilo, possibilitou o registro de informações e o conhecimento que temos hoje da matemática egípcia. No papiro de Rhind (ou Ahmes), texto matemático que data aproximadamente de 1650 a.C., há 85 problemas copiados pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Trata-se de uma fonte rica sobre a Matemática egípcia antiga, que contém alguns problemas a respeito de progressões aritméticas e geométricas. Ahmes apresenta o seguinte problema envolvendo uma progressão aritmética: “Divida 100 pães entre cinco pessoas; um sétimo do que recebem as três primeiras é o que recebem as duas últimas. Qual é a diferença?” (CAJORI, 2007, p.40).

Com relação à progressão geométrica, o papiro apresenta a sequência 7, 49, 343, 2401, 16807. Junto a estas potências de 7, segundo Cajori (2007), estão as palavras desenho, gato, rato, cevada, medida. Sobre esse problema, Leonardo de Pisa em seu livro Liber Abaci, 3000 anos depois, apresentou sua versão:

> Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há 7 facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma? (CAJORI , 2007, p. 40).

Segundo Eves (2004), o historiador Moritz Cantor, em 1907, deu a seguinte interpretação para o problema original do papiro de Rhind:

> Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quanto havia disso tudo? (EVES, 2004, p.76).

No papiro de Rhind também aparece uma progressão geométrica muito curiosa formada pelas frações 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 do hecate (unidade usada para medir volume de grãos). Os elementos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.

Segundo Eves (2004), por volta de 572 a.C. nasce Pitágoras na ilha egeia de Samos. Provável discípulo de Tales viveu em Mileto e, fugindo do poder de tiranos, fundou a famosa escola pitagórica em uma colônia grega situada no sul da Itália. A crença de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros levou os pitagóricos a um estudo intenso da teoria dos números, da geometria, da música e astronomia.

Os pitágoricos conheciam as progressões geométricas, aritméticas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença. Através de suas observações concluíram que os intervalos musicais se colocam de modo que admitem expressão através de progressões geométricas.

Ainda de acordo com Eves (2004), os números figurados se originaram com os membros mais antigos da escola pitagórica. Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo entre a geometria e a aritmética. Para se calcular os n-ésimos números triangulares e pentagonais, os pitagóricos utilizavam a soma da progressão aritmética.

Embora haja muita incerteza sobre datas, vida e obras, seguramente, Euclides de Alexandria produziu uma das obras mais importantes da Matemática: Os Elementos. Cajori (2007) afirma que tal obra contém bastante teoria dos números e álgebra elementar.

Os Elementos são compostos de 465 proposições distribuídas em treze livros. No livro VIII apresenta uma ampla abordagem sobre proporções contínuas e progressões geométricas a elas relacionadas. Dada uma proporção contínua a: b = b: c = c: d, então a, b, c, d formam uma progressão geométrica.

O livro IX, último dos três sobre teoria dos números, fornece na proposição 35 uma dedução geométrica da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, assim anunciada: “Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que precedem”(EVES, 2004, p.175).

Diofanto de Alexandria, situado pela maioria dos historiadores no século III, ocupa lugar de destaque no desenvolvimento da álgebra e exerceu sobre os europeus forte influência no estudo da teoria dos números. Ele escreveu três trabalhos: Aritmética, Sobre Números Poligonais e Porismas, que segundo Pappus seria algo entre teorema e um problema. Com uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números, o trabalho que consagrou seu autor como gênio em seu campo foi a obra intitulada Aritmética. A parte do livro que foi preservada contém a resolução de 130 problemas, muitos deles levam à equações do primeiro e de segundo grau.

Em Aritmética, o autor, que somente admitia respostas entre os números racionais positivos, apresenta dois problemas envolvendo progressões. O problema 7 propõe: “Encontre três números em progressão aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles também é um quadrado”. A resposta, segundo Diofanto é 120/2, 840/2, 1560/2. Os números 81/7, 144/7 e 256/7 são a resposta para o problema 21 que anuncia: “Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença dentre dois quaisquer deles é um quadrado”.

Os hindus, hábeis aritméticos com contribuições significativas à álgebra, somavam progressões aritméticas e geométricas e resolviam problemas comerciais envolvendo juros simples e compostos, descontos e regras de sociedade.

O matemático hindu de maior destaque foi Bhaskara, que se crê ter vivido no século XII. Seu livro mais famoso é o Lilavati. Escrito em 278 versos, trata de vários assuntos: tabelas, o sistema de numeração, as oito operações, frações, zero, regra de três, regra de três composta, porcentagens, progressões, geometria e permutações. Um destes problemas envolve progressões e apresenta o seguinte enunciado: “Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas (medida usada na época) no primeiro dia. Diga, calcular inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?”.

No inicio do século XIII, teve destaque o Matemático mais talentoso da Idade Média: Leonardo de Pisa (ou Fibonacci). Em 1202 publicou sua obra mais famosa intitulada Líber abaci, trabalho que se ocupa de aritmética e álgebra elementares.

Os quinze capítulos do Liber abaci envolvem a notação indo-arábica, métodos de cálculo com inteiros, frações e raízes. Com uma farta coleção de problemas que serviu de fonte para outros autores, o livro apresenta o problema dos pares de coelhos: "Para tal, um indivíduo coloca um par de coelhos jovens num certo local rodeado por todos os lados por uma parede. Queremos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados, durante um ano, por esse par, assumindo que pela sua natureza, em cada mês dão origem a um outro par de coelhos, e no segundo mês após o nascimento, cada novo par pode também gerar". Este problema deu origem à importante sequência de Fibonacci (1,1, 2, 3,5,...x, y, x+y,.....).

Em outro problema do livro, Fibonacci apresenta um problema envolvendo juros e progressões: “Um certo homem aplica 1 denário a uma taxa de juros tal que em 5 anos ele fica com 2 denários e, daí em diante, a cada 5 anos a importância acumulada dobra. Pergunto: quantos denários ele ganharia em 100 anos, a partir de seu denário inicial?”.

No século XVI, Michael Stifel publica a obra Arithmetica Íntegra, que o transforma no maior algebrista do século. A obra divide-se em 3 partes dedicadas, respectivamente, aos números racionais, números irracionais e álgebra. Segundo Eves (2004), na primeira parte do livro, Stifel ressalta as vantagens de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica, prenunciando assim, de quase um século, a invenção dos logaritmos.

Em 1614, John Napier publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma Descrição do Maravilhoso Cânon de Logaritmos) que continha uma descrição dos logaritmos, um conjunto de tabelas, e regras para o uso deles. Com tal feito, Napier revelou possuir completo conhecimento da correspondência entre progressões, pois o que ele chamava de tábua de logaritmos era uma tabela de duas colunas (ou de duas linhas), colocando em correspondência os termos de uma progressão geométrica (na verdade, potências de certo número) com os de uma progressão aritmética.

John Napier (1550-1617), para eliminar as longas multiplicações e divisões e fugir das longas prostaférese (palavra grega que significa “adição e subtração”), se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica: $b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...$ aos da progressão aritmética: 1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ..., então o produto $b^m.b^n = b^{m+n}$ de dois termos de primeira progressão está associado à soma m+n dos termos correspondentes da segunda progressão. Para manter os termos da “progressão geométrica” suficientemente próximos do modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos da correspondência precedente, deve-se escolher o número b bem próximo de 1.

No século XVII, Abraham De Moivre, francês, amigo íntimo de Isaac Newton, lançou obras importantes sobre teoria das probabilidades, séries recorrentes, probabilidade e trigonometria analítica. Segundo Eves (2004), há uma lenda interessante envolvendo a morte de De Moivre. Segundo ela, De Moivre teria revelado, certa ocasião, que daí para frente teria que dormir, em cada dia, quinze minutos a mais do que no dia precedente. E quando essa “progressão aritmética” atingiu 24 horas ele de fato teria morrido.

Talvez, o principal matemático a quem se atribuiu uma grande contribuição relacionada à Progressão Aritmética seja Johann Friederich Carl Gauss. Ele nasceu em Brunswick, Alemanha, em 30 de Abril de 1777. De família humilde, mas com o incentivo de sua mãe, sua carreira foi notável. Desde os três anos de idade, Gauss sabia ler e fazer cálculos aritméticos mentalmente. Segundo Eves (2004), aos 10 anos de idade, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Mal acabara de dar a ordem, Gauss se ergue, dando-lhe o resultado: 5050. O professor repreende-o, pelo que julgava ser uma brincadeira desrespeitosa (ele próprio ainda não calculara o resultado), mas a criança explica sua resposta. Tinha observado, durante a formulação da questão, que a soma de todos os números de 1 a 100 era igual a cinqüenta vezes a soma do primeiro com o último (1 + 1 00 = 1 0 1), do segundo com o penúltimo (2 + 99 = 101), e assim por diante. Ora, 50 X 101 é igual a 5 050. Assim, multiplicou a constante pelo número de termos e dividiu pela metade, chegando à fórmula da soma da progressão aritmética:

$$S = \frac{(a_1 + a_n\ ).n}{2}$$

Segundo Lima (2010) na doutrina de Charles Robert Darwin, biólogo famoso, também se pode encontrar as Progressões Aritméticas e Geométricas. Num dos quatro itens fundamentais de sua doutrina se encontra uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, influência das ideias de Thomas Malthus, famoso economista. Malthus afirmou que: “As populações crescem em P.G. ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em P. A.”

Em consequência desse item, Darwin afirmou que “devido a tal desproporção, os indivíduos empenhar-se-iam numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos – a seleção natural – de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros".

A comparação de Malthus entre o crescimento populacional e as reservas alimentares não é mais aceita atualmente, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande.

Os Documentos Oficiais e as Progressões no Ensino Médio

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDBEN, Lei 9.394/96 (BRASIL, 1996), propõe para o Ensino Médio, a formação geral em oposição à formação específica e o desenvolvimento das habilidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade, enfim, de aprender, criar, formular. Dessa forma, buscou conferir uma nova identidade ao Ensino Médio por meio de uma reforma curricular, posicionando-o como a etapa final da Educação Básica, complementando o aprendizado iniciado no Ensino Fundamental.

O Conselho Nacional de Educação regulamenta os dispositivos da LDBEN, por meio das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Resolução n° 3 de 26 de junho de 1998 (BRASIL, 1998). Estes dispositivos, que têm força de lei, foram explicitados de forma mais detalhada e direcionados aos professores e demais responsáveis diretos pelo sistema educacional brasileiro, em 1999, quando da publicação dos Parâmetros Nacionais para o Ensino Médio, PCNEM (BRASIL, 1999). Este documento foi complementado, em 2002, por outras orientações educacionais que aprofundam os sentidos dos princípios fundamentais das reformas pretendidas e apresentadas nos documentos legais.

Do documento se depreende que aprender matemática no Ensino Médio requer um processo lento e trabalhoso que objetiva um saber fazer matemática e um saber pensar matemático. Este processo, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, tem o objetivo de levar o aluno a elaborar conjecturas, estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões e a capacidade de argumentação. Afirmam ser este o caminho para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à realidade do aluno.

Segundo os PCNEM (1999), as funções são um exemplo para fazer uma Matemática contextualizada e interdisciplinar. Isto significa que

> (...) é o potencial de um permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL, 1999, p.255).

Além de ressaltar o caráter integrador do tema função e a importância de escrever e estudar os gráficos e o comportamento de certos fenômenos de áreas como Física, Geografia e Economia, destacam que “as sequências, em especial as progressões aritméticas e progressões geométricas nada mais são que particulares funções” BRASIL (1999, p. 255).

Após a implantação e estudo dos PCNEM, muitos pontos precisaram ser aprofundados. Em 2006, a Secretária de Educação Básica encaminhou à comunidade educativa o documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio com o objetivo de oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico e atender às necessidades e às expectativas das escolas e professores na estruturação do currículo para o Ensino Médio. Este documento trata de três aspectos: a escolha dos conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular.

Sobre os conteúdos, o documento salienta a prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. Sugere o descarte de exigências de memorização, as apresentações de “regras” desprovidas de explicações, a resolução maciça de exercícios de fixação ou a aplicação direta de fórmulas. Orienta ainda o afastamento da compartimentalização e a articulação entre os diferentes conteúdos. Sobre progressões, sugere:

> As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”). (BRASIL, 2006, p.75)

Ainda sobre o Ensino Médio, a Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais em sua proposta curricular para o Ensino Médio (CBC, 1995), apresenta os conteúdos básicos comuns a serem trabalhados, bem como as habilidades e competências que os alunos devem adquirir e desenvolver. Este material contém um rol de orientações para os professores além de listar sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula.

No que concerne a sequências, progressões aritméticas e geométricas, o CBC faz as seguintes sugestões:

> Relacionar o cálculo de prestações em financiamentos com a progressão geométrica; Utilizar a soma dos termos de uma Progressão Aritmética ou Progressão Geométrica para fazer estimativas; Propor exercícios de traçar o gráfico de uma Progressão Geométrica com razões maior do que um e menor do que um; Discutir problemas que envolvam crescimento populacional (Malthus) em Biologia ou de expansão de uma epidemia, usando dados concretos; Discutir problemas que envolvam a absorção de medicamentos (por exemplo, antibióticos e a necessidade do período de dosagem) (CBC, 1995, p. 70-73).

As propostas de atividades sinalizam para uma Matemática contextualizada além de exemplificarem aplicabilidades das progressões no cotidiano. Dessa forma, se o ponto de partida é a realidade do aluno, esta também será o ponto de chegada, mas com um novo olhar e com uma nova compreensão que vai além do cotidiano, do espaço próximo do aluno.

As propostas dos documentos oficiais, em síntese, procuram acabar com a passividade do aluno, produzindo uma aprendizagem significativa e desenvolvendo o conhecimento espontâneo em direção ao conhecimento abstrato. Apenas utilizar procedimentos, conceitos e técnicas operatórias em sala de aula pouco contribuirão com a formação do aluno cidadão se o mesmo não souber onde e como aplicá-los no seu cotidiano.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Problemas e exercícios: diferenças

Problemas têm ocupado um lugar de destaque nos currículos da matemática escolar desde a Antiguidade, mas somente recentemente educadores matemáticos têm discutido a idéia de que a habilidade de resolver problemas merece atenção especial. Assim, considerando a Resolução de Problemas uma parte importante do ensino de Matemática, faz-se necessário, inicialmente, levantar concepções sobre o que é um problema matemático, sua diferenciação de outras atividades.

Mas, afinal o que é um problema? Segundo os PCNs "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la" (BRASIL, 1997, p. 44).

Para esta proposta, o significado de problema que comunga das concepções do pesquisador e, portanto será adotada como referencial é a apresentada por Vila e Callejo (2006)

> Um problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (VILA e CALLEJO, 2006, p. 29).

Segundo a pesquisadora Eliane Scheid Gazire (1988) uma situação pode ser encarada como problema ou não, depende da reação do sujeito frente à situação. Ela afirma que um indivíduo está frente a um problema quando ele: "1º) Compreende a situação e não encontra uma solução óbvia imediata; 2°) Reconhece que a situação exige uma ação; 3°) quer ou precisa agir sobre uma situação" (GAZIRE, 1988, p.10).

Portanto, um problema requer ação para que estando numa situação de insatisfação possa pensar e agir, modificando-a e obter assim, um resultado satisfatório.

Todas essas concepções têm algumas características em comum. O problema deve ser compreensível ao aluno e, para tal, é necessário que ele tenha um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos necessários para chegar à sua solução e para a qual não existe um caminho direto ou imediato; que se sinta motivado para resolvê-lo; e que possibilite o desenvolvimento de sua intuição e criatividade, levando-o a exercitar o seu pensar matemático

Segundo Pozo (1998) é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto para outra esse problema não exista, pois a diferenciação de problema para exercício está no fato de que neste último, o sujeito dispõe e utiliza mecanismos que o conduz de forma imediata à solução. Ainda segundo o autor, isto depende não somente da experiência e dos conhecimentos prévios de quem executa, mas também dos objetivos que o sujeito estabelece enquanto realiza a atividade.

No processo de conhecimento do aluno, o professor perseguindo objetivos propõe atividades matemáticas escolares que Vila e Callejo (2006, p. 154) classificam como: exercícios, questões práticas, problemas não-contextualizados, situações-problema e problemas de estratégia. Estes autores distinguem estas atividades em função da finalidade e das características operacionais.

Os pesquisadores afirmam que os *exercícios* contêm indícios de maneira satisfatória dos procedimentos que se espera que sejam empregados; são precisos e concisos; propõem a obtenção de um único nível de resposta; não são propostos de forma isolada, mas em uma lista repetitiva ou hierarquizada. Atestam ainda, que possuem a finalidade de mecanizar/automatizar determinados procedimentos apresentados em aula ou para ajudar na compreensão de determinados conceitos, podendo comportar tarefas de reconhecimento, de repetição ou de execução de algoritmos.

Sobre as *questões práticas*, Vila e Callejo (2006) dizem que são propostas estreitamente relacionadas com conhecimentos matemáticos e têm como finalidade fixar tais conhecimentos frente a uma conexão com a vida real ou com uma pseudo-aplicação da matemática. Na prática, servem como ilustração dos procedimentos matemáticos. As características apresentadas são: costumam ser verbais; apresentam indícios claros dos procedimentos que devem ser utilizados e referenciais facilmente identificáveis; são propostas durante o desenvolvimento do conteúdo em que foram apresentados os procedimentos necessários para a resolução e, em geral, imediatamente depois dessas apresentações e costumam fazer parte de listas. As questões práticas segundo os autores poderiam ser mal denominadas como problemas contextualizados matematicamente.

Os *problemas não contextualizados matematicamente* são propostos com a finalidade de capacitar os alunos a utilizar os conhecimentos matemáticos apresentados em aula e também para desenvolver a capacidade de resolver problemas, pois estes implicam no "uso" de um saber matemático geral. Os autores apresentam várias características: normalmente há mais de um procedimento de resolução; são propostos fora da unidade didática que desenvolve os procedimentos matemáticos que estão implicados em sua resolução ou dentro dela, mas necessitam de vários procedimentos, ou as estratégias gerais são mais importantes no processo de resolução que os próprios conhecimentos envolvidos; exigem argumentação do processo seguido, costumam ser únicos e, portanto não aparecem em listas de atividades e finalizam dizendo que na sua resolução, o processo e as estratégias de tipo intelectual desempenham papel transcendente.

Quando é proposta uma *situação-problema*, pretende-se que os alunos construam conhecimentos, modelos ou processos matemáticos necessários para resolvê-la. Ainda segundo Vila e Callejo (2006) aqui o problema é um instrumento para um novo campo de conhecimento ou aprofundar um já conhecido. As características de uma situação-problema segundo esses autores são: propostas antes das apresentações/formulações/construções dos conhecimentos matemáticos envolvidos na resolução; nunca fazem parte de uma lista e os seus enunciados costumam ser imprecisos, abertos.

Com os *problemas de estratégia*, o foco é o trabalho de elaboração de estratégias e processos que possam ser úteis em várias situações. Mais importante que o saber é a elaboração da estratégia seguida. Segundo os autores suas características são: os alunos têm acesso aos conteúdos matemáticos para resolvê-los; a riqueza da solução está na argumentação do procedimento de resolução, não costumam fazer parte de listas e apresentam uma proposta de desafio para o aluno (VILA e CALLEJO, 2006).

A resolução de problemas

Embora a resolução de problemas tenha ocupado lugar de destaque na legislação e currículos e seja objeto de estudo de muitos pesquisadores, na sala de aula, em geral, não se acompanha os resultados publicados ou apresentados nos eventos. De fato, segundo Onuchic (1999), "resolver problemas é um bom caminho para se ensinar Matemática. Entretanto, os problemas não têm desempenhado bem seu papel no ensino" (ONUCHIC,1999, p.211).

Quem primeiro considerou importante a resolução de problemas no ensino e aprendizagem de Matemática foi o grande matemático e filósofo húngaro George Polya que escreveu um livro sobre o assunto em 1945. Seu livro foi traduzido para várias línguas e no Brasil em 1978 com o título A arte de Resolver Problemas.

Segundo Onuchic (2008, p.7) os pesquisadores Schroeder e Lester (1989) apresentam três caminhos diferentes de abordar a Resolução de Problemas: Ensino sobre resolução de problemas, Ensino para a resolução de problemas e Ensino via resolução de problemas. A seguir apresentam-se em breves detalhes estes caminhos para a abordagem da Resolução de Problemas e posteriormente a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas da Professora Onuchic.

Ensino sobre resolução de problemas.

Ensinar sobre Resolução de Problemas denota trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, adicionando a esse trabalho muitas heurísticas ou estratégias. Enfim, transformando a Resolução de Problemas uma teoria. O professor que ensina sobre resolução de problemas destaca o modelo de Resolução de Problemas de Polya

(Compreensão do Problema; Estabelecimento de um plano; Execução do plano e Retrospecto) ou alguma variação dele. Esse modelo propõe um conjunto de quatro fases no processo de resolução de problemas matemáticos: compreender o problema; revisar um plano; levar o plano adiante; e olhar de volta ao problema original, com a intenção de analisar a validade da solução. Aos estudantes, dentro dessa idéia, são ensinadas claramente as fases que, segundo Polya, um bom aluno as utiliza quando está resolvendo problemas matemáticos, e ele é encorajado a tomar conhecimento de seu próprio progresso, através dessas fases, enquanto resolve o problema.

Ensino para a resolução de problemas.

Quando o professor ensina para resolver problemas, ele se concentra na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada. Dá-se importância ao uso do conhecimento adquirido anteriormente em problemas rotineiros e não rotineiros. Embora a obtenção do conhecimento matemático seja muito importante, a maior finalidade para aprender matemática é o de ser capaz de usá-la. Assim, devem ser dados muitos exemplos de conceitos e operações aos estudantes e diversas oportunidades em aplicar essa matemática na resolução de problema. Além disso, o professor que ensina para resolver problemas está muito preocupado sobre a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros. Uma forte justificativa dessa abordagem é a de que a única razão para aprender Matemática é a de ser capaz de usar o conhecimento obtido em sala de aula para resolver problemas transpô-los para outros contextos.

Ensino via resolução de problemas.

Nessa metodologia o problema é encarado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. O ensino está centrado no aluno, que constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, sendo a seguir formalizados pelo professor. Assim, os problemas são caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Além disso, este aspecto se diferencia do ensino tradicional, comum na maioria das aulas.

A utilização de tal metodologia poderá beneficiar o aluno na construção do seu próprio conhecimento por meio de situações em que ele o seja capaz de criar e ampliar sua capacidade de resolver problemas. Para tanto, é importante que o professor crie, em sua sala de aula, um ambiente motivador e que instigue o aluno a interpretar tais situações.

Assim, segundo ONUCHIC (1999), os alunos devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo. O problema deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores. Por outro lado, o problema deverá exigir que busquem novas alternativas, novos recursos, novos conhecimentos para obter a solução, caso contrário não será para os alunos um problema. E assim, afirma que:

> Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (1999, p. 207).

Nessa perspectiva, o problema é gerador do processo de ensino-aprendizagem. Gazire apresenta a principal característica dessa perspectiva: “Se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido” (GAZIRE, 1988, p.124)

Com relação ao entendimento da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, Van de Walle (2001, apud Onuchi e Alevatto, 2009) coloca que é preciso entender que ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. Pelo contrário, pressupõe todo um rigor metodológico, no qual o professor, além de intermediador entre o conhecimento e o aluno, é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante, em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e garantir que todas as expectativas estejam claras. Na fase “durante”, os alunos trabalham e o professor avalia esse trabalho. Na terceira, “depois”, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão, enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos matemáticos construídos. Portanto, a Resolução de Problemas requer um processo de avaliação constante por parte do professor.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A Professora Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic tem trabalhado na UNESP – Rio Claro- como professora colaboradora e orientadora de Mestrados e Doutorados no Curso de Pós-Graduação em educação, tendo criado, em 1992, o GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo sobre Resolução de Problemas. O grupo tem como objetivo desenvolver pesquisas que efetivamente atinjam a sala de aula e para tal adota a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A pesquisadora Célia Barros Nunes (2010) apresenta a idéia central desta Metodologia:

> ...o ensino e a aprendizagem deviam ocorrer simultaneamente, durante e através da resolução de problemas, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores do conhecimento. A avaliação contínua devia estar integrada ao ensino-aprendizagem, no intuito de acompanhar o crescimento dos alunos e reorientar as práticas da sala de aula dos professores quando necessárias. (NUNES, 2010, p.89)

Assim, a Resolução de Problemas permite que os alunos depois da aquisição de certos conceitos adquiram novo conhecimento, como atesta ONUCHIC (2008):

> Trata-se de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula (ONUCHIC, 2008, p.8).

Portanto, o problema é apenas o primeiro passo no processo de construção de conhecimento. Onuchic (1999), concordando com os PCN, defende que o ponto de partida das atividades matemáticas é o problema e não a definição de conceitos; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. Essa atividade matemática escolar é somente olhar para as coisas prontas e definitivas para a construção e apropriação, pelo aluno, de um conhecimento que serviria para compreender e transformar a realidade.

Ao se trabalhar com essa metodologia o caráter colaborativo entre professor e alunos em sala de aula é reforçado, modificando assim muitas crenças do professor e a sua forma de trabalhar. A professora Onuchic (1999) destaca uma forte atividade de investigação por parte do professor e também do aluno. Com relação ao professor, afirma que:

> O professor pesquisa quando escolhe ou cria problemas adequados à construção de novo conhecimento sobre um determinado tópico do programa, daquela determinada série; quando seleciona, entre muitas, as estratégias mais adequadas à resolução daquele problema; quando planeja as questões-chave para conduzir os alunos, numa reunião plenária com a classe toda, na análise dos resultados apresentados e chega ao consenso sobre os resultados obtidos; ele pesquisa quando prepara a melhor formalização dos novos conceitos e novos conteúdos construídos a partir do problema dado. (ONUCHIC, 2008, p.82)

Com vistas à mudança na sala de aula e em uma forma prática de o trabalho com o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, Onuchic redigiu, com o auxílio de um grupo de professores de um Curso de Educação Continuada, um roteiro de atividades que pode servir como orientação aos interessados em trabalhar com essa metodologia. O roteiro apresenta as seguintes etapas:

1- *Formar grupos – entregar uma atividade (um problema)*

É mais fácil trabalhar com pequenos grupos do que uma turma com 40 alunos separadamente. Notar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado e assim caminhar rumo a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. Os estudantes precisam experimentar esse processo cooperativo e deve-se propiciar, a eles, oportunidade de aprender uns com os outros. Deve-se organizar os alunos em pequenos grupos e muito da aprendizagem, em sala de aula, será feita no contexto desses grupos.

2- *O papel do professor*

Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

3- *Resultados na lousa*

Após o término do trabalho dos alunos, o professor anota na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos e posteriormente agrupa tais resultados.

4- *Plenária*

Chama os alunos todos, para uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, podem participar na discussão dos resultados.

5- *Análise dos resultados*

Nesta fase, as dificuldades encontradas pelos alunos, são trabalhadas. Nesse trabalho, surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir o avançar, assim o aspecto exploração é o ponto forte nesta análise.

6- *Consenso*

Após a análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado almejado.

7- *Formalização*

Em um trabalho conjunto, professor e alunos fazem uma síntese do que se buscava aprender a partir do problema ou situação problema dada e, formalmente, são apresentadas, pelo professor, as devidas definições, as propriedades e as demonstrações.

Resumidamente ao adotar essa metodologia:

> Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem através da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para "o que pensar" ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir. (ZUFFI & ONUCHIC, 2007, p.83)

A maneira de implementar esta metodologia depende do envolvimento e do entusiasmo do professor. Onuchic (2008) ressalta que o professor deve escolher e preparar com muito cuidado os problemas. Podem ser retirados ou adaptados de livros didáticos, mas devem ser desconhecidos pelos alunos.

Ainda sobre a escolha dos problemas a serem propostos Nunes (2010) relata que Onuchic, em 1998, elaborou algumas questões que poderão ajudar o professor a refletir sobre elas e a bem escolher os problemas com os quais irá trabalhar. São elas:

> 1. Isso é um problema? Por quê?
> 2. Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
> 3. Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
> 4. Para que séries acredita ser este problema adequado?
> 5. Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
> 6. Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
> 7. Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?
> 8. Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?

> 9. Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais? (NUNES, 2010, p. 94)

Assim, um professor que adota este conjunto de questões na escolha dos problemas demonstra preocupação com o seu desenvolvimento de sua aula.

Indubitavelmente o interesse e o envolvimento dos alunos na execução de uma tarefa são de fundamental importância, sendo assim, o problema deve ser bem selecionado e planejado. Como gerador de novos conceitos e conteúdos matemáticos, o problema deve ser desafiador para envolver o aluno, mas com um nível de dificuldade que não desencoraje-o a resolver.

Assim, retomando o caráter de investigação citado anteriormente, sobre os alunos ONUCHIC (2008) afirma que:

> Os alunos investigam quando buscam, usando seus conhecimentos já construídos, descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando colaborativamente, relacionando idéias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução. (ONUCHIC, 2008, p. 83)

Importante ressaltar que a professora ONUCHIC (2008) afirma que as experiências com alunos e professores utilizando a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas têm apresentado significativos avanços na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e no aprimoramento da prática docente do professor.

A PROPOSTA DE ENSINO

A proposta de ensino foi construída a partir de leituras e de experiências em sala de aula. Ela procura ensinar e aprender Progressões Aritméticas e Geométricas através de atividades elaboradas procurando seguir as orientações dos PCNEM: motivação, introdução de novos conceitos e ideias. Procurou-se, sobretudo, seguir as orientações de Onuchic (1999, 2008) e Gazire (1988) que sugerem a utilização de situações-problema como geradoras do processo de ensino-aprendizagem.

Inicialmente, foi elaborada direcionando sua aplicação para uma turma de 1ª série do Ensino Médio. Entretanto, o conteúdo Progressões, presente em todo currículo do Ensino Médio, diverge quanto à série a ser trabalhado. Há livros didáticos que o apresenta na segunda série, outros na primeira, como é o caso da escola alvo da pesquisa.

Assim, buscou-se associar os conhecimentos prévios dos sujeitos da pesquisa à construção dos conhecimentos almejados pelo pesquisador, levando o educando a levantar hipóteses, comunicar ideias e estabelecer relações; desenvolvendo interesse e confiança no seu próprio modo de pensar, porém novas descobertas e novos problemas podem surgir, pois tal fato é comum na Resolução de Problemas.

Foram implementadas 5 situações-problema que contemplaram os seguintes conteúdos: termo geral da sequência, termo geral da PA, termo geral da PG e soma dos termos de uma PA.

As atividades em folhas ou propostas no quadro de giz utilizaram apenas materiais usuais de sala de aula, como lápis, borracha e caneta e, em algumas oportunidades, calculadora. Foram realizadas individualmente, em duplas ou em grupos de 3 ou 4 alunos. O objetivo de agrupá-los foi proporcionar-lhes a oportunidade de discutir as questões entre si, para que assim desenvolvessem a habilidade de argumentação e socialização do raciocínio empregado.

Primeira atividade

A lei matemática que permite determinar os termos de uma sequência é chamada termo geral.

Exemplo: $a_n = 2n$ é o termo geral da sequência dos números pares.

Assim temos: $a_1 = 2$; $a_{15} = 30$ e $a_{26} = 52$.

I) Você decide economizar dinheiro da seguinte forma: no primeiro mês, guarda R$20,00. Nos meses seguintes, guarda sempre R$20,00 a mais que no mês anterior. Qual o termo geral da sequência?

II) Descubra agora o termo geral das sequências numéricas abaixo.

a) (1, 4, 7, 10, 13, ...)
b) (3, 7, 11, 15, 19, 23, ...)

Objetivo

Construção do termo geral de uma sequência numérica dada.

Desenvolvimento

Nesta atividade, os alunos devem ter conhecimento sobre sequências numéricas, a representação de seus termos e padrões.

Divida-os em grupos. Entregue a atividade e estipule um tempo de 20 minutos para a resolução. Participe e incentive as discussões internas dos grupos questionando o porquê das estratégias escolhidas.

Peça a voluntários para registrarem suas resoluções no quadro de giz faça a correção e incentive a turma a construir uma estratégia para consecução do termo geral de qualquer sequência numérica.

Proponha outras atividades. A seguir são apresentadas duas sugestões:

1. Uma sequência é definida por uma lei de formação cujo 1° termo é 1 e o 2° termo é 3. Há mais de uma maneira de continuar essa sequência. Dê exemplos, e para cada um deles, quando possível, escreva o termo geral.

2. Para evitar enganos e facilitar o trabalho, um vidraceiro organizou numa tabela a espessura das lâminas de vidro mais procuradas e o respectivo preço por metro quadrado. Veja a tabela seguinte:

Espessura da lâmina (mm)	Preço do metro quadrado (R$)
3	30
6	42
9	54

a) Qual o termo geral da coluna das espessuras?

b) Qual o termo geral da coluna dos preços?

c) Quanto um cliente pagaria pelo metro quadrado de uma lâmina de 30 mm de espessura?

Segunda atividade

Dada a tabela abaixo, calcule (sem enumerar todos os elementos)

a) O elemento da 3ª coluna na 15ª linha.
b) O elemento da 2ª coluna na 58ª linha.
c) O elemento da 1ª coluna na 100ª linha.

3	5	7	9
11	13	15	17
19	21	23	25
...	...	...	...

Objetivo

Calcular os termos de uma Progressão Aritmética sem a enumeração dos elementos e sem o conhecimento da fórmula do termo geral da PA.

Desenvolvimento

Importante salientar que o aluno até a atividade tenha conhecimento dos termos de uma PA e saiba encontrar o termo geral de qualquer sequência numérica.

Divida-os em grupos. Entregue a atividade e estipule um tempo de 25 minutos para a resolução. Ressalte a importância de se calcular os termos pedidos sem a enumeração dos elementos.

O problema apresenta uma oportunidade excelente para que através da plenária, o professor possa explorar a consecução da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética qualquer. Para isso assegure-se da construção dos termos pedidos na atividade valendo-se do primeiro termo e da razão, assim faz-se necessário que o aluno perceba, por exemplo, que $a_{15} = 14r + a_1$; $a_{58} = 57r + a_1$ e $a_{100} = 99r + a_1$.

O professor poderá explorar a tabela pedindo ao aluno que calcule outros termos. Para explorar a fórmula do termo geral, sugere-se a proposição da situação problema a seguir.

(PUCSP-adap). Sobre as casas de um grande tabuleiro de xadrez devem ser colocados grãos de arroz, em quantidades que obedeçam a uma lei de formação seqüencial, conforme é mostrado na figura seguinte. Calcule a quantidade de grãos de arroz que devem ser colocados na casa que ocupa a 6ª coluna na 6ª linha.

3	6	9	12	15	18	21	24
48	45	42	39	36	33	30	27
51	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	?

Terceira atividade:

A corrida de São Silvestre é disputada tradicionalmente no dia 31 de dezembro na cidade de São Paulo. São 15 quilômetros de percurso, muitas vezes sob forte calor.

E se você decidisse participar da São Silvestre?

Para chegar a correr 15 quilômetros, seria prudente fazer um programa de treinamento: começar correndo uma distância pequena e depois ir aos poucos aumentando o percurso até completar os 15 km.

Poderíamos pensar no seguinte programa:

1ª semana: correr 600metros por dia.

2ª semana: correr 1000 metros por dia

3ª semana: correr 1400 metros por dia e assim por diante.

a) Quantos quilômetros você estaria correndo na 12ª semana?

b) Quantos quilômetros você estaria correndo na 30ª semana?

c) Em que semana você atingiria os 15 000 metros do percurso?

Objetivo

Calcular os termos e também o número de termos da Progressão Aritmética com o conhecimento da fórmula do termo geral de uma sequência numérica.

Desenvolvimento

Após o domínio da fórmula do termo geral, deve-se assegurar que o aluno saiba resolver problemas em que possa valer-se deste conhecimento e aplicá-lo no cálculo de qualquer componente da fórmula, isto é, saiba calcular também o número de termos, o primeiro termo e a razão.

Assim, proponha a atividade para ser realizada individualmente ou no máximo em duplas em 20 minutos. Oriente os alunos para a importância da coleta dos dados. Participe e incentive as discussões internas dos grupos questionando o porquê das estratégias escolhidas.

Na plenária proponha que voluntários apresentem soluções diferentes e discuta com os alunos as resoluções e também explore a validação dos resultados. Assim os erros apresentados também oferecem uma ótima oportunidade para tal ação.

Sugira a resolução das seguintes situações problemas:

1. (PUMG adap.)Uma empresa deve instalar telefones de emergência a cada 42 quilômetros, ao longo da rodovia de 2.184 km, que liga Maceió ao Rio de Janeiro.

Considere que o primeiro desses telefones é instalado no quilômetro 42 e o último, no quilômetro 2.142. Assim, calcule a quantidade de telefones instalados.

2. (UFPE) Nos quilômetros 31 e 229 de uma rodovia estão instalados telefones de emergência. Ao longo da mesma rodovia e entre estes quilômetros, pretende-se instalar 10 outros telefones de emergência. Se os pontos adjacentes de instalação dos telefones estão situados a uma mesma distância, qual é esta distância, em quilômetros?

Quarta Atividade:

1- Uma pessoa compra um carro, devendo pagá-lo, em prestações mensais, durante 6 anos. As prestações pagas em um mesmo ano são iguais, sendo de R$ 500,00 o valor da primeira prestação, paga em janeiro. A cada ano, a prestação sofre um aumento de 10%, em relação à do ano anterior. Sendo assim, calcule o valor da prestação mensal, no último ano.

2 - Certa epidemia causada por um vírus atingiu uma cidade. No primeiro dia foram registrados 60 casos; no segundo dia, 180 novos casos; no terceiro 540, e nos dias subseqüentes o número de novos casos se manteve na mesma progressão. Em que dia a estimativa atingiria 14 580 novos casos?

Objetivo

Calcular os termos e também o número de termos da Progressão Geométrica.

Desenvolvimento

Divida-os em grupos. Entregue a atividade e estipule um tempo de 25 minutos para a resolução. A atividade requer operações de multiplicação e divisão trabalhosas, assim é uma oportunidade de permitir o uso da calculadora sem causar prejuízo à consecução do objetivo da atividade.

A experiência mostra que os alunos mostram certa resistência à atividade devido ao cálculo de porcentagem, por isso é importante o incentivo às discussões, bem como o apoio nestes cálculos.

Assim como sugerido nas atividades envolvendo Progressões Aritméticas, proponha várias resoluções das atividades no quadro pra discussão em plenária. É importante que o aluno saiba calcular a razão que envolva porcentagem bem como a resolução das equações exponenciais que a resolução requer.

Sugira a resolução das seguintes situações problemas:

1. (PUCMG adap.) O número de assinantes de uma revista de circulação na grande BH aumentou, nos meses de 2005, em progressão geométrica, conforme assinalado na tabela abaixo. Com base nessas informações, calcule o aumento, de fevereiro para julho do número de assinantes dessa revista.

Mês	janeiro	fevereiro	março	abril
Número de assinantes	5 000	5 500	6 050	–

2. (UEL adap.) Um automóvel zero km é comprado por R$ 30.000,00. Ao final de cada ano, seu valor diminui 10% em função da depreciação do bem. Calcule o valor do automóvel, após seis anos.

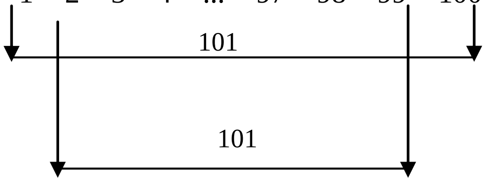
Quinta atividade:

Conta-se que por volta de 1790, numa aldeia alemã, um professor estava tão irritado com a bagunça feita por seus alunos que lhes passou um castigo: todos deveriam calcular a soma dos números naturais de 1 a 100. (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100)

Certo de que os alunos ficariam quietos realizando a tarefa, o professor acabou tendo uma surpresa. Instantes após a solicitação, Gauss, um menino de 10 anos, apresentou o resultado correto: 5050.

O professor ficou muito intrigado e foi logo perguntando como ele tinha encontrado a resposta com tanta rapidez. O menino explicou:

1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100



Existem 100 números de 1 a 100. Agrupando-os de dois em dois como o esquema acima, obteremos 50 parcelas de 101. Então bastou multiplicar 101 por 50 = 5050.

Utilize o que você aprendeu com o texto para resolver o seguinte problema:

Na compra de um terreno, foi combinado que o pagamento da primeira parcela seria efetuado um mês após a compra e teria o valor de R$300,00. A partir da segunda parcela o comprador pagaria R$35,00 a mais que a parcela anterior. Qual o total pago por um cliente que comprou o imóvel em 25 parcelas?

Objetivo

Calcular a soma dos termos da Progressão Aritmética.

Desenvolvimento

Inicie o encontro com os alunos formando duplas. Estipule um tempo de 30 minutos para que as duplas resolvam o problema. Peça à turma que leia com atenção pois a história é muito interessante e surpreendente.

Oriente a turma para que, assim como Gauss, todos devem procurar resolver a questão de forma mais elaborada, procurando não escrever todas as parcelas.

A atividade apresenta uma oportunidade excelente para que através da plenária, o professor possa explorar a consecução da fórmula da soma dos de uma progressão aritmética qualquer.

Sugira a resolução das seguintes situações problemas:

1. Por recomendação médica, uma pessoa toma duas pílulas de certo remédio no primeiro dia, quatro no segundo dia, seis no terceiro e assim, sucessivamente, até terminar o conteúdo do vidro. Em quantos dias terá terminado o conteúdo, que é de 90 pílulas?

2. Para um trabalho, a professora solicitou que seus alunos cortassem barbante medindo: 5 cm, 10 cm, 15 cm, e assim sucessivamente, até o último pedaço, que deverá medir 1,5m ou 150 cm. Quantos metros de barbante você precisará para obter todos os pedaços solicitados pela professora? Antes de resolver o problema faça uma estimativa do resultado.

3. Um eletrodoméstico é vendido à vista por R$520,00. No caso da venda a prazo, há um acréscimo de R$80,00 sobre o preço à vista, sendo o pagamento feito com uma entrada no valor de 25% do preço a prazo e o restante pago em 5 parcelas, cujos valores formam uma progressão aritmética de razão R$5,00. Qual é o valor da última prestação?

Concluindo

Ao abordar as progressões empregando a metodologia de Resolução de Problemas além de envolver o aluno no processo de busca de seu conhecimento e oferecer-lhe a oportunidade de pensar, possibilita-se o desenvolvimento de habilidades como: identificação do problema, seleção de estratégias de resolução, utilização de raciocínios indutivos e dedutivos; elaborar e validar conjecturas e finalmente a capacidade de argumentação.

As atividades propostas provocam a mudança de postura do professor, assim como salienta Onuchic (2008) dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para: observador quando procura perceber todos os acontecimentos; organizador quando propõe os problemas e as condições de resoluções; consultor quando fornece as informações necessárias que o aluno não tem condição de obter sozinho; mediador quando promove a confrontação das propostas dos alunos; controlador quando estabelece as condições para a realização das atividades e finalmente incentivador da aprendizagem sendo aquele que estimula a cooperação e encoraja os alunos em suas ações.

Com relação às ações do professor, quando este adota a metodologia de Resolução de Problemas é importante que ele permita a leitura e compreensão do problema; propicie a discussão para que todos entendam o que se busca no problema; não responda diretamente as perguntas feitas durante o trabalho, mas incentive-os com novos questionamentos e ideias; discuta as diferentes resoluções, inclusive as erradas e finalmente estimulem a verificação do processo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília, Ministério da Educação, 1999. 364p.

BRASIL. Ministério de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, Ministério da Educação, 1997.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec. 2006.

CAJORI, Florian. *Uma História da Matemática.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007. 654p.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2007.

GAZIRE, Eliane Scheid. *Perspectivas da Resolução de Problemas em Educação Matemática*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 1988.

ISHIHARA, Cristiane A.; SANTOS, Neide A. Pessoa dos. *Matemática: Ensino Médio, 1ª série.* 1. ed. Brasília: CIB-Cisbrasil, 2004. 480 p.

LIMA, V. S. at al. *Progressões Aritméticas e Geométricas: História, conceitos e aplicações*. Disponível em: <http://pdfhere.com/conceitos-pdf/> Acesso em 24/03/2010.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. *Proposta Curricular (CBC):* Matemática, Ensinos Fundamental e Médio. Belo Horizonte, SEE/MG, 1995.

NUNES, C. B. O *Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática*. Tese de doutorado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C(Org). Educação Matemática - pesquisa em movimento. 2.ed. São Paulo: Cortez, 2009.

ONUCHIC, L. de La R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas*. Org.Maria A.V. Bicudo. São Paulo: UNESP.1999. 313 p.

ONUCHIC, L. R. *Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo*. Disponível em < http://www.rc.unesp.br//serp/trabalhos_completos/completo3.pdf>. Acesso em 25/07/2010

ONUCHIC, L.L.R. & ZUFFI, E. M. *O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores*. Revista Iberoamericana de Matemática, 2007, 79- 97

POZO, J. I. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: Artmed, 1998. 173p.

VILA, Antoni; CALLEJO María Luz. *Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas*. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006. 212 p.

ZAMPIROLLO, M. J. C. V. *Matemática: Projeto Escola e Cidadania para Todos*. 1ª Ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2004.