



Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas utilizando o GeoGebra

Daniele Cristina Gonçalves
Frederico da Silva Reis

Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas utilizando o GeoGebra



EDITORA UFOP

Ouro Preto | 2012

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

Reitor da UFOP | Prof. Dr. João Luiz Martins
Vice-Reitor | Prof. Dr. Antenor Rodrigues Barbosa Junior

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLOGIAS
Diretor | Prof. Dr. Antônio Claret Soares Sabioni
Vice-Diretora | Profa. Maria Célia da Silva Lanna

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Pró-Reitor | Prof. Tanus Jorge Nagem
Pró-Reitor Adjunto | Prof. André Barros Cota



Coordenação | Profa. Dra. Regina Helena de Oliveira Lino Franchi

MEMBROS

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira, Profa. Dra. Célia Maria Fernandes Nunes, Prof. Dr. Dale William Bean, Prof. Dr. Frederico da Silva Reis, Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana, Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira, Profa. Dra. Regina Helena de Oliveira Lino Franchi, Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki, Profa. Dra. Roseli de Alvarenga Corrêa, Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel, Profa. Dra. Maria do Carmo Vila

G635a Gonçalves, Daniele Cristina.
Atividades investigativas de aplicações das derivadas utilizando o Geogebra / Daniele Cristina Gonçalves - Ouro Preto : UFOP, 2012.
49p.: il.

ISBN:

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Cálculo integral.
3. Pesquisa operacional. 4. Tecnologia da educação.
5. Comunicação e educação. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

CDU: 517.2/.3:37.012

Catálogo: sisbin@sisbin.ufop.br

Reprodução proibida Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados.

“A arte de ensinar é a arte de propiciar o descobrimento”.

Mark van Doren

Expediente Técnico

Organização | Daniele Cristina Gonçalves

Pesquisa e Redação | Daniele Cristina Gonçalves
Frederico da Silva Reis

Revisão | Frederico da Silva Reis

Projeto Gráfico e Capa | Editora UFOP

Fotos | Daniele Cristina Gonçalves

Ilustração | Daniele Cristina Gonçalves

Índice

1. Um pouco do cenário atual das pesquisas relacionadas ao Cálculo	11
2. Sobre as aplicações do Cálculo	15
3. Sobre o ensino de derivadas no Cálculo.....	18
4. Sobre as aplicações das derivadas	23
5. As TICE's e a investigação matemática	26
6. Apresentando as atividades investigativas.....	32
Atividade 1 – Construindo um tanque cilíndrico.....	33
Atividade 2 – Delimitando uma reserva	35
Atividade 3 – Projetando um tanque retangular.....	37
Atividade 4 – Projetando uma caixa	39
7. Contribuições de atividades investigativas utilizando TICE's para os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I	42
Referências / Bibliografia Recomendada	44

Apresentação

Ao professor de Cálculo Diferencial e Integral I

Caro(a) colega Professor(a) de Matemática,

Este material que apresentamos contém uma sugestão de atividades para o ensino de Aplicações das Derivadas com a utilização de um software gráfico.

Ele é o resultado gerado a partir de nossa Dissertação do Mestrado Profissional em Educação Matemática do programa de pós-graduação da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulada “Aplicações das Derivadas no Cálculo I: Atividades investigativas utilizando o GeoGebra”, sob a orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

As atividades aqui apresentadas foram aplicadas a alunos de uma turma da disciplina “Cálculo Diferencial e Integral I” do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública.

Nosso objetivo é apresentar um material que complementa e revitaliza algumas atividades / exercícios clássicos de aplicações de derivadas que são tradicionalmente encontrados nos livros-textos mais utilizados nas referências das disciplinas de Cálculo I nas universidades brasileiras, tais como Stewart (2011) e Thomas (2011).

Para a aplicação das atividades, utilizamos o software GeoGebra por se tratar de um software gratuito, com uma interface amigável, disponibilizando simultaneamente as representações algébrica e geométrica, além de possuir recursos de dinamicidade e movimentação. Apresentamos, na íntegra, 4 (quatro) atividades investigativas relacionadas às aplicações das derivadas que podem ser trabalhadas no ensino de Cálculo I.

Inicialmente, trazemos uma discussão a respeito do ensino de Cálculo e da utilização de tecnologias no ensino, a partir das mudanças que podem ocorrer em sala de aula com a inserção das Tecnologias Informacionais e Comunicacionais na Educação – TICE's.

Esperamos que esse material possa contribuir de forma significativa para os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, bem como propiciar reflexões a respeito de nossa postura como professores / educadores matemáticos!

Prof^a. Ms. Daniele Cristina Gonçalves

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

1. Um pouco do cenário atual das pesquisas relacionadas ao Cálculo

Para iniciar nossa discussão, buscamos conhecer o panorama atual das pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo. A preocupação por parte dos pesquisadores com o ensino dessa disciplina é crescente no cenário nacional e internacional, onde podemos encontrar um grande número de pesquisas relacionadas ao tema.

As pesquisas que tratam do ensino e aprendizagem de Cálculo se inserem na Educação Matemática no Ensino Superior, área que vem crescendo e ganhando adeptos interessados em realizar pesquisas nesse nível de ensino. Segundo Iglori (2009), as pesquisas revelam que a Matemática é uma disciplina que apresenta dificuldades em seu ensino e aprendizagem, independente do nível de ensino e, portanto, o Ensino Superior também merece atenção, tanto quanto a Educação Básica. Iglori (2009) define a Educação Matemática como campo científico a partir de seu objetivo:

A Educação Matemática é um campo de pesquisa que tem por objetivo de investigação a atividade matemática nos diversos setores da sociedade, em especial aquela que acontece no ambiente escolar, nos diversos níveis de ensino (IGLIORI, 2009, p. 11).

Essa definição pode ser complementada com a caracterização dada por Fiorentini e Lorenzato (2007):

Podemos dizer que a Educação Matemática se caracteriza como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou apropriação / construção do saber matemático escolar (FIORENTINI e LORENZATO, 2007, p. 5).

As pesquisas em Educação Matemática que tratam do ensino e da aprendizagem do Cálculo se justificam pela importância dessa disciplina em diversos cursos da área de Ciências Exatas. Segundo Iglioni (2009, p. 12), “a pesquisa tem papel fundamental no levantamento de causas e na indicação de caminhos a serem trilhados na busca de melhorias”.

No que se refere ao ensino de Cálculo, o grande número de pesquisas relacionadas a esse tema “se justifica tanto pelo fato de o Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quanto por sua condição privilegiada na formação do pensamento avançado em Matemática” (IGLIORI, 2009, p. 13).

Em relação à disciplina Cálculo, a preocupação direcionada ao seu ensino e aprendizagem é advinda de diversos fatores: baixo desempenho dos alunos, altos índices de reprovação, evasão e desistência, dificuldades de aprendizagem, dentre outros. Muitas pesquisas apresentam propostas de ensino que utilizam tendências da Educação Matemática, como Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação – TICE's, Modelagem Matemática, História da Matemática, Resolução de Problemas e outras, como alternativas para se repensar o problema da aprendizagem dos alunos nas disciplinas relacionadas ao Cálculo.

Nesse contexto, o ensino de derivada se destaca como um conteúdo muito pesquisado, por se tratar de um conceito fundamental para o estudo dessa disciplina. Baseada em sua experiência, Villarreal (1998, p. 7) relata que “o conceito de derivada mostra-se como uma noção que apresenta dificuldades frequentes e persistentes para os estudantes e sua compreensão é de fundamental importância nos cursos de Cálculo”.

Encontramos pesquisas relacionadas à derivada que possuem focos diversos, como sua abordagem conceitual (DALL'ANESE, 2000; D'AVOGLIO, 2002; LEME, 2003), utilização de tecnologias no ensino de Cálculo e de derivada (VILLARREAL, 1999; BARUFI, 1999; DOMENICO, 2006; MACHADO, 2008), além das aplicações das derivadas (RAMOS, 2009), dentre outras.

Nesse cenário, é perceptível a preocupação dos pesquisadores em Educação Matemática com estratégias diferenciadas para serem utilizadas no ensino de Cálculo. Assim, as TICE's despontam como um recurso de grande potencial didático e pedagógico que pode contribuir para a aprendizagem e possibilitar a construção do conhecimento matemático, como relata Barufi (1999):

Precisamos ter claro que o computador é extremamente útil em tarefas que podem ser transformadas em algoritmos, como também em outras que não podem. Em particular, no que diz respeito ao trabalho com o Cálculo, ele é uma ferramenta extremamente útil para propiciar a formulação de inúmeros questionamentos, reflexões e análises que fazem com que a sala de aula se torne visivelmente um ambiente onde relações podem ser estabelecidas, possibilitando articulações diversas e, portanto, a construção do conhecimento (BARUFI, 1999, p. 167).

Com isso, Barufi (1999) destaca a importância da utilização do computador em sala de aula, que pode propiciar um ambiente de aprendizagem dinâmico, uma vez que possibilita criar discussões e reflexões em torno do conhecimento matemático.

Já Villarreal (1999) destaca de que modo o computador pode auxiliar na aprendizagem da Matemática, em geral:

O computador pode ser tanto um reorganizador quanto um suplemento nas atividades dos estudantes para aprender Matemática, dependendo da abordagem que eles desenvolvam nesse ambiente computacional, do tipo de atividades propostas, das relações que for estabelecida com o computador, da frequência no uso e da familiaridade no uso e da familiaridade que se tenha com ele (VILLARREAL, 1999, p. 362).

Dessa forma, Villarreal (1999) aponta que o computador pode desempenhar papéis diferentes nas aulas de Matemática, de acordo com a forma de utilização dessa ferramenta. O computador é considerado por essa pesquisadora como um “suplemento” quando é utilizado apenas para realizar algum processo, como fazer contas, e como “reorganizador” quando é utilizado para auxiliar e fazer pensar sobre algum conteúdo.

Tendo em vista a importância do uso do computador no ensino e suas contribuições para a aprendizagem em Cálculo, para desenvolver nossa pesquisa, escolhemos a utilização dessa ferramenta por meio de um software dinâmico que possibilite a exploração e experimentação na construção do conhecimento matemático.

2. Sobre as aplicações do Cálculo

Dada a importância da disciplina de Cálculo nos diversos cursos superiores, ressaltamos que é imprescindível que o estudante conheça a aplicação dos conceitos matemáticos nas diversas áreas do conhecimento humano.

O ensino de Cálculo deve ter como norteador a exploração conceitual, associando a abordagem algébrica e a geométrica, de modo que não sejam enfatizados apenas aspectos procedimentais, como destaca Lachini (2001):

[...] o ensino-aprendizagem de Cálculo pretende cumprir dois objetivos principais: um deles é habituar o estudante a pensar de maneira organizada e com mobilidade; o outro, estabelecer condições para que o estudante aprenda a utilizar as ideias do Cálculo como regras e procedimentos na resolução de problemas em situações concretas. O primeiro destes objetivos almeja que o estudante tenha contato com a matemática como técnica de conhecer, de pensar e de organizar; é preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e numérico do que está fazendo, saiba avaliar e analisar dados, explique o significado de suas respostas. O segundo está orientado para que o aluno adquira compreensão e capacidade de aplicação prática dos conceitos e definições, estando atento para que o Cálculo não se torne um mero receituário (LACHINI, 2001, p. 147).

Silva e Borges Neto (1994) destacam diversos fatores que interferem no desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo. Dentre eles, ressaltam que “o ensino de Cálculo poderia se tornar mais significativo se os professores soubessem em que e como estão sendo aplicados, a posteriori, os conteúdos ensinados” (SILVA e BORGES NETO, 1994, p. 4).

Esses pesquisadores destacam que, muitas vezes, quando questionados pelos alunos sobre a importância dos conteúdos estudados em Cálculo, alguns professores não sabem como responder.

Muitos têm a convicção de que esta resposta deve ser dada pelos profissionais de disciplinas específicas dos cursos dos alunos, e que seu papel prioritário é trabalhar os conhecimentos matemáticos, desenvolvendo técnicas de resolução de problemas sem ser necessário relacionar o conteúdo com o de outras disciplinas e aplicações que serão ensinadas posteriormente.

Barbosa (2004, p. 11) critica essa postura dos professores: “O Cálculo pelo cálculo, sem aplicação e contextualização, fica centrado em uma pedagogia rotineira, tradicional, em que muitos docentes estão acostumados”.

As aplicações dos conteúdos do Cálculo podem ser úteis também como formas de motivação do estudante. Pela experiência de Silva e Borges Neto (1994), quando os alunos conseguem relacionar os conteúdos com situações reais que possam ser vivenciadas em sua vida profissional, o nível de interesse é maior, proporcionando melhor apreensão dos conhecimentos trabalhados e, com isso, as habilidades são desenvolvidas mais rapidamente.

A pesquisa de Catapani (2001) mostra outra ótica desse fato. Em entrevistas realizadas pela pesquisadora com professores de disciplinas específicas do curso de Geologia, um dos pontos de destaque está na falta de articulação e integração entre os departamentos dentro da universidade.

A hipótese apresentada por um entrevistado é de que a interação entre os professores de Cálculo e os professores de matérias específicas de Geologia pode contribuir para uma proposta que enfatize atividades relacionadas a aplicações dos conteúdos do Cálculo no curso em que o aluno está inserido.

Outros fatores também são destacados pelos professores entrevistados, como o descompasso entre a disciplina de Cálculo e as disciplinas específicas do curso em questão:

De acordo com esses professores, embora o aluno de curso de Geologia, na maioria das vezes, não tenha consciência da importância e da necessidade da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, ela se faz muito importante como linguagem e como instrumento na resolução dos problemas da área. Técnicas de

derivada e integral, segundo afirmam, são de grande utilidade nas várias disciplinas, e estão presentes no desenvolvimento e no entendimento dos processos, isso tudo, além de considerar o processo de quantificação, cada vez mais necessário na área em questão (CATAPANI, 2001, p. 53).

Dessa forma, cabe ao professor de Cálculo, nos anos iniciais do curso, apresentar ao estudante a importância da disciplina no curso que este está inserido. Concebemos que uma possível forma de mostrar essa importância é desenvolvendo atividades em sala de aula em que sejam trabalhadas as aplicações.

3. Sobre o ensino de derivadas no Cálculo

O conceito de derivada é considerado um dos conceitos fundamentais do Cálculo. O estudo da derivada integra a ementa de diversos cursos superiores, devido ao fato de possuir aplicações em várias áreas do conhecimento. Segundo Zuin (2001), as derivadas estão presentes em diversas situações cotidianas relacionadas ao movimento e à variação.

O próprio desenvolvimento do Cálculo e de seus conceitos fundamentais tem sua origem a partir de situações reais. Seu surgimento ocorreu a partir da busca de soluções para problemas como:

Calcular a distância percorrida por um corpo em movimento, sua velocidade e aceleração; comprimentos de curvas; áreas; volumes; analisar os valores de máximo e mínimo de uma função; relacionar declividade de uma curva e taxa de variação, são alguns dos problemas, entre muitos outros, que levaram ao desenvolvimento do Cálculo (ZUIN, 2001, p. 14).

A derivada tem sido um dos tópicos do Cálculo Diferencial e Integral em que os estudantes apresentam muitas dificuldades de aprendizagem. As pesquisas relacionadas ao ensino de derivadas sinalizam que há problemas nesse processo e apontam caminhos a serem seguidos para superar essas dificuldades intrínsecas ao processo.

A derivada é um conceito que pode ser explorado a partir de diversos focos: derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, além de situações que envolvem taxa de variação, máximos e mínimos.

Uma das possíveis causas para as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de derivada pode estar relacionada a dificuldades na aprendizagem de

limites, que acarretam como consequência dificuldades em derivadas, em decorrência do fato da derivada ser um limite.

D'Avoglio (2002) identificou essa dificuldade na compreensão do conceito de derivada de uma função em um ponto quando definida de modo formal, a partir do conceito de limite. Em sua pesquisa, apresentou uma proposta para a introdução do conceito de derivada num ponto por meio de problemas relacionados com situações reais que envolvem taxa de variação, a partir do conceito de velocidade.

O pesquisador teve como objetivo propiciar ao aluno a participação na construção do seu conhecimento e que este buscasse ferramentas para resolver problemas do mundo concreto, de forma que a aprendizagem se processasse de forma significativa, ressaltando, que “para ocorrer a aprendizagem significativa, aquilo que se ensina deve se relacionar aos conhecimentos prévios do aluno” (D'AVOGLIO, 2002, p. 15).

As pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo, principalmente ao tratar de derivadas, criticam a forma como os conceitos são introduzidos pelos professores de Cálculo: definição, propriedades, regras de derivação e algumas aplicações.

D'Avoglio (2002) identificou esse fato em sua pesquisa, ao aplicar um questionário a cinco professores da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo desse questionário era conhecer de que forma os professores introduzem o conceito de derivada de uma função em um ponto, quais livros são utilizados tanto na preparação de suas aulas quanto na indicação como referência aos alunos, além das principais dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem desse conceito.

A partir das respostas, o pesquisador concluiu que maioria deles introduz o conceito de derivada utilizando a definição formal a partir do conceito de limite, seguido de alguns exemplos e exercícios a serem resolvidos pelos alunos. Um dos professores disse que gosta de utilizar um pouco de história para mostrar o surgimento do Cálculo, além de algumas aplicações. Outro professor disse que

apresenta esse conceito geometricamente, como sendo o coeficiente angular da reta tangente.

Analisando as respostas dos professores ao questionário, foram evidenciadas na pesquisa de D'Avoglio (2002) que as dificuldades apresentadas pelos alunos são principalmente as relacionadas à compreensão da definição formal de derivada, partindo-se do conceito de limite, além de falta de competências matemáticas para a compreensão desse conceito.

Uma das técnicas de coleta de dados utilizada na pesquisa de D'Avoglio (2002) foi um teste de sondagem, realizado com 138 alunos de três instituições, composto por quatro questões, objetivando verificar qual era o conhecimento dos estudantes sobre o conceito de derivada, sendo que todos já haviam estudado o assunto. Nesse teste de sondagem, D'Avoglio (2002, p. 27) identificou que alguns alunos confundem:

- a) **derivada com reta tangente,**
- b) **derivada num ponto com a função derivada,**
- c) **derivada com regra para se achar derivada,**
- d) **reta tangente com coeficiente angular da reta tangente e também, que muitos apresentam dificuldade de expressão** (D'AVOGLIO, 2002, p. 27, grifo do autor).

Após essa exploração inicial, o pesquisador desenvolveu uma atividade com 42 alunos de três cursos: Engenharia da Computação, Sistemas de Informação e Matemática. Esses estudantes cursavam a primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. D'Avoglio (2002) procurou identificar se, ao introduzir o conceito de derivada de uma função em um ponto, a partir do conceito de velocidade, que é algo familiar ao aluno, a aprendizagem seria significativa.

Os resultados de sua pesquisa apontam evidências de que a introdução do conceito de derivada de uma função em um ponto, partindo do conceito de velocidade, por ser algo conhecido do aluno, contribuiu positivamente para a aprendizagem destes. Ao ser possível associar um conhecimento anterior ao novo

conhecimento, o novo conceito passou a ter algum significado, despertando assim o interesse dos alunos.

Um estudante em um curso universitário está em busca de uma formação sólida que o capacite para o mercado de trabalho. Dessa forma, os alunos procuram um conhecimento que seja útil posteriormente em sua vida profissional. Considerando esse perfil, é importante que o estudante conheça onde se aplicam os conceitos trabalhados pelo professor de Cálculo, para que os conteúdos estudados passem a ter algum significado prático.

Nossa concepção é de que os estudantes precisam conhecer os instrumentos do Cálculo, mas também devem ser explorados os conceitos e as aplicações. Quando utilizamos o termo aplicações, referimo-nos a situações-problema relacionadas a qualquer área do conhecimento que podem ser resolvidas utilizando ferramentas e conceitos matemáticos. Idealizamos, dessa forma, uma prática em sala de aula contextualizada, como defende Barbosa (2004):

Essa prática contextualizada exige do aluno uma associação de vários conteúdos estudados em outras disciplinas, bem como práticas vivenciadas. Por outro lado, o professor, enquanto articulador, mediador e aprendiz, amplia seus conhecimentos, gerando assim uma prática cotidiana mais significativa para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral (BARBOSA, 2004, p. 42).

Em relação ao ensino de derivadas, podemos perceber que o foco dos alunos muitas vezes fica restrito à aplicação de regras de derivação, sem que sejam utilizados os conceitos. É possível perceber que maioria dos alunos domina as regras de derivação, sabem derivar uma função qualquer, mas não se preocupam em saber o significado do que estão fazendo. No estudo do Cálculo, os alunos geralmente buscam a aplicação de regras na resolução de exercícios. Dessa forma, quando é necessária a utilização de algum conceito para o desenvolvimento de alguma atividade, os alunos geralmente apresentam dificuldades em sua realização.

Em relação à aplicação dos conteúdos de Cálculo, como o conceito de derivada, é possível perceber que os alunos questionam a sua aplicação, mas quando lhe são apresentadas situações em que é necessária a utilização das ferramentas do Cálculo para sua resolução, os alunos geralmente apresentam dificuldades. Uma possível causa para esse fato é que os alunos não estão acostumados a resolver situações em que seja necessária a utilização / aplicação dos conceitos.

A pesquisa de Barbosa (2004) identificou que a maior parte dos alunos investigados dedica poucas horas extraclasse para os estudos e, quando estudam, muitas vezes o foco é dado à resolução de exercícios, geralmente resolvidos de forma mecânica, somente aplicando regras sem significados.

Como professores de Cálculo, sabemos que o aluno, sozinho, muitas vezes não é capaz de estabelecer relação entre as disciplinas matemáticas e sua aplicação prática em seu curso. Barbosa (2004) afirma:

A contextualização do saber é uma ferramenta indispensável para a questão da transposição didática, pois implica recorrer a contextos que tenham significado para o aluno, envolvendo-o não só intelectualmente, mas também afetivamente, sendo assim uma estratégia fundamental para a construção de significados. Sabemos que a falta de sentido da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral origina-se, em parte, das dificuldades decorrentes dessa transposição. O aluno só compreende os vínculos do conteúdo estudado quando fica compreensível para ele essa passagem. Por isso, contextualizar no ensino de Cálculo vincularia os conhecimentos aos lugares onde foram criados e onde são aplicados, isto é, incorporar vivências concretas ao que se vai aprender e incorporando o aprendizado a novas vivências (BARBOSA, 2004, p. 41).

Essa é uma dificuldade também enfrentada pelos professores de Matemática que, geralmente, têm uma formação matemática formal e rigorosa, não conhecendo também as aplicações. Embora a formação do docente em Matemática, muitas vezes, não o desperte em relação à aplicação dos conteúdos, cabe ao professor da disciplina de Cálculo buscar esse conhecimento para ser explorado em sala de aula.

As aplicações são também uma forma de estimular e motivar os estudantes. Quando o aluno conhece a aplicação, ele pode ficar mais interessado e motivado a estudar Cálculo.

4. Sobre as aplicações das derivadas

Notamos que há uma carência em pesquisas que tratam das aplicações das derivadas. Esse fato foi também percebido por Ramos (2009), que realizou uma pesquisa com alunos do curso de Licenciatura em Matemática relacionada às aplicações das derivadas, sendo que estes já haviam cursado a disciplina de Cálculo I, quando esse tópico havia sido estudado.

Essa pesquisa foi realizada com o intuito de investigar o conhecimento dos alunos sobre as aplicações das derivadas e classificar as dificuldades desses alunos. Para isso, o pesquisador elaborou uma sequência de quatro atividades, estruturada a partir da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

De acordo com esse referencial, é importante que o professor proponha atividades em que o aluno utilize as diversas formas de representação dos objetos matemáticos e saiba fazer a conversão entre uma forma de registro e outra. Desse modo, se o aluno possui o domínio das diversas formas de representação de um objeto matemático, ele pode optar pelo mais adequado na resolução de um problema proposto.

Concordamos com o pesquisador nesse sentido, visto que consideramos a importância de se estudar o conceito de derivada não somente de forma algébrica, mas também geométrica. Em nossa prática, percebemos que muitas vezes o que predomina para o aluno é a derivada como resultado de um processo operatório. Concebemos que quando os cálculos de derivadas são realizados algebricamente, mas associados à sua interpretação geométrica, é possível que o aluno estabeleça uma relação entre as operações realizadas e o conceito.

As atividades propostas por Ramos (2009) exploram os diversos registros de representação da derivada de uma função real, como o registro algébrico, gráfico e

geométrico, além de sugerir que o estudante realize a conversão entre uma forma de representação e outra. Em alguns tópicos das atividades, é necessária a utilização do conceito de derivada e da relação entre o gráfico de uma função e o de suas derivadas, em relação a crescimento, decrescimento, máximo e mínimo local e pontos de inflexão.

Ramos (2009, p. 42) destaca o foco fundamental de sua pesquisa, que “é analisar se, de fato, após um curso de Cálculo, as competências elementares sobre as aplicações da derivada fazem parte das habilidades adquiridas pelos estudantes”. A partir da análise dos dados, observou que os alunos têm facilidade nas tarefas em que são necessárias manipulações algébricas.

Quanto às situações que envolvem registros gráficos, foram percebidas dificuldades em identificar os dados contidos nessa forma de representação e estabelecer relações com o registro algébrico, além de deficiências conceituais relacionadas ao comportamento do gráfico de uma função e de suas derivadas. O pesquisador identificou também dificuldades em situações onde é necessária a utilização do conceito de derivada e que muitos alunos não conseguem traçar estratégias para a resolução de situações que envolvem aplicações.

O pesquisador conclui que as dificuldades apresentadas pelos estudantes são tanto de caráter conceitual quanto manipulativas:

[...] pois eles efetuam tratamentos e chegam a resultados, mas, ora não sabem identificar as relações deles com o comportamento gráfico de uma função, ora não conseguem aplicar o conceito de derivada para efetuar os tratamentos (RAMOS, 2009, p. 81).

Quanto às situações que envolvem aplicações das derivadas, as dificuldades “se alternam em conceituais e manipulativas, conforme o tipo de registro de representação utilizado na situação de aplicação proposta” (RAMOS, 2009, p. 82). O pesquisador ressalta a necessidade de os professores trabalharem mais as aplicações da derivada com seus alunos, pois ele tem a convicção de que “quando o aluno aplica o novo conhecimento, compreende melhor o conceito”.

5. As TICE's e a investigação matemática

A utilização de ferramentas computacionais em sala de aula é uma questão muito discutida atualmente no ensino de Matemática. A informática é um recurso de grande potencial pedagógico que pode auxiliar o professor na tarefa de ensinar e possibilitar ao educando, um conhecimento dinâmico.

Segundo Gravina e Santarosa (1998), um ambiente educacional informatizado possibilita ao aluno a construção do seu conhecimento, pois com o auxílio de um recurso computacional, o estudante pode modelar problemas e fazer simulações, além de visualizar uma situação, o que muitas vezes não seria possível sem essa ferramenta. Ambientes informatizados proporcionam um conhecimento matemático dinâmico, contribuindo para a apreensão do significado dos conteúdos, permitem maior interação do aluno com o conhecimento que está sendo construído e favorecem a simulação, permitindo ao educando criar seus próprios modelos para expressar seus pensamentos e ideias.

A utilização de softwares permite que os conceitos matemáticos sejam explorados por meio de construções não estáticas, que podem ser manipuladas e proporcionar uma percepção diferente da Matemática.

Ambientes informatizados são propícios para a realização de uma atividade investigativa, pois permitem ao aluno analisar uma situação e observar regularidades, estabelecer hipóteses e testá-las na busca de uma solução para o problema proposto. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 25), chegam a afirmar que “as investigações matemáticas são um tipo de atividade que todos os alunos devem experimentar”.

Para que as tecnologias contribuam para a aprendizagem na sala de aula, é imprescindível que os professores adotem diversas metodologias na utilização desses recursos. O docente é indispensável no processo de aprendizagem com o

auxílio de ferramentas computacionais: “O professor é o elemento mobilizador de um grupo que, fazendo uso de certa metodologia disciplinativa, se dedica à exploração de algum conteúdo, uma matéria do currículo” (LAUDARES e LACHINI, 2001, p. 68).

Ao educador, enquanto mediador da aprendizagem, cabe explorar junto com os estudantes o conhecimento matemático e os conceitos envolvidos. A observação e a percepção podem ser estimuladas para desenvolver nos alunos a capacidade de criticar e questionar a Matemática como um conhecimento em construção. É importante incentivar também a justificação, para promover no educando a capacidade de argumentação das suas ideias.

Segundo Borba e Penteado (2001), a utilização de softwares possibilita a experimentação com conteúdos matemáticos, além de estimular a percepção visual do aluno. Partindo de uma imagem, pode-se explorar o conceito matemático envolvido em uma situação problema:

As atividades, além de naturalmente trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação. As novas mídias, como os computadores com softwares gráficos e calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia e de física (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 34).

A visualização é uma questão muito explorada por pesquisadores das tecnologias na Educação Matemática. Costa (2002, p. 262), por exemplo, apresenta definições de diversos autores sobre “visualização”, também identificada como “pensamento visual”, destacando que há um consenso em que a “visualização se foca na percepção e na manipulação de imagens visuais”.

Assim, de acordo com os resultados da pesquisa de Couy (2008), os recursos computacionais no ensino de Matemática podem trazer resultados benéficos na aprendizagem, pois sua utilização permite ao aluno visualizar. Quando imagens visuais são manipuladas, a Matemática adquire um caráter exploratório,

sendo possível analisar, interpretar, descobrir variantes e compreender o conteúdo matemático, suas características e propriedades, estimulando a descoberta.

Nesse sentido, Couy (2008, p. 47) apresenta uma proposta de utilização “de uma abordagem visual dos conceitos, numa interlocução com as demais formas de representação em Matemática”, destacando que a visualização é atualmente considerada um processo importante na aprendizagem matemática, mas ainda pouco utilizada em sala de aula nos diversos níveis de ensino.

Além disso, segundo essa pesquisadora, a utilização de softwares no ensino de Matemática possibilita uma relação de troca entre o aluno e a Matemática. Ao se deparar com uma situação-problema, se o aluno dispõe de alguma ferramenta computacional, seu trabalho pode ficar mais agradável e interativo:

Ferramentas tecnológicas, se utilizadas de forma adequada, podem potencializar o uso dos recursos gráficos no ensino de Cálculo, estimulando a observação, a busca de regularidades e padrões e possibilitando, através da comparação com as outras formas de se representar uma função, o entendimento das ligações entre elas. O trabalho desenvolvido com a utilização desses recursos também pode contribuir para que os alunos apurem a percepção e, por consequência, desenvolvam habilidades que facilitem a construção gráfica por meio dos instrumentos tradicionais: lápis, papel e régua (COUY, 2008, p. 47).

Por outro lado, a presença das ferramentas computacionais nas aulas de Matemática não implica no abandono de outros instrumentos educacionais. A informática é um recurso auxiliar que possibilita o alcance dos resultados na aprendizagem por meio do seu uso adequado e conciliação das diversas formas de se ensinar e aprender, com o professor e o aluno desempenhando seus papéis. Tudo isso considerando que sozinha a ferramenta computacional, não produz conhecimento (GRAVINA e SANTAROSA, 1998).

De fato, segundo Gravina e Santarosa (1998), é necessário ter cuidados com a utilização da informática em sala de aula, para que as atividades não sejam

limitadas à repetição de exercícios, destacam que o software não pode dificultar a realização de uma tarefa devido ao não conhecimento de suas ferramentas.

As TICE's têm se constituído um recurso didático muito importante no ensino de Cálculo e sua utilização tem sido muito recomendada por pesquisadores em Educação Matemática (MARIN, 2009), pelo fato de permitir ao professor explorar diversos conceitos matemáticos e representações de maneira rápida e eficaz. Numa perspectiva mais global, Silva e Borges Neto (1994) destacam:

A sociedade atual é marcada pela informação e pela rapidez das transformações. Tudo muda a uma velocidade espantosa, exigindo grande dosagem de mimetismo na intenção de se acompanhar as inovações emergentes a cada instante. Neste contexto, a informática assume papel ímpar, notadamente quando funciona como agente de propagação do conhecimento. O computador é um instrumento excepcional que torna possível praticar ou vivenciar verdades matemáticas (podendo até sugerir conjecturas), de visualização difícil por parte daqueles que desconhecem determinadas condições técnicas, fundamentais à compreensão plena do que está sendo exposto, acelerando o processo de ensino-aprendizagem pela transformação em algo tangível, visível, concreto, de uma ideia até o momento não concebida. O Cálculo, por sua própria natureza de trabalhar com aproximações, é um dos mais adequados para a utilização de computador em experimentação, propiciando uma (re)descoberta dos seus conceitos (SILVA e BORGES NETO, 1994, p. 8).

Segundo Reis (2001, 2009), muitos conceitos do Cálculo são trabalhados na sala de aula de forma clássica, por meio de definições, teoremas, demonstrações e propriedades, seguindo-se listas de exercícios para os alunos resolverem. Dessa forma, muitas vezes, os alunos se preocupam somente em realizar operações algébricas e em memorizar fórmulas, não dando muita atenção aos conceitos.

Para Villarreal (1999), alguns conceitos do Cálculo carregam em si uma dinamicidade que muitas vezes não é possível de ser observada utilizando apenas quadro e giz / pincel. Utilizando-se de uma ferramenta computacional, os conceitos da disciplina podem ser explorados de forma a facilitar a compreensão dos mesmos.

De acordo com Villarreal (1999),

A presença do computador oferece a possibilidade de observar processos de construção de conhecimento matemático que não apareceriam em outros ambientes e que vão além do simples uso do computador para resolver um determinado problema matemático (VILLARREAL, 1999, p. 28).

Segundo Marin (2009), a utilização de recursos computacionais na sala de aula pode contribuir não só para a abordagem conceitual na disciplina de Cálculo, mas também com outros aspectos, como um maior tempo disponível para exploração e investigação, uma vez que a ferramenta computacional dispensa a realização de cálculos trabalhosos, permite ao aluno mais autonomia em relação ao seu aprendizado e melhora a relação professor-aluno, facilitando o entendimento do conteúdo dessa disciplina, considerada difícil por muitos pesquisadores.

Esse autor também destaca que, de acordo com a literatura pesquisada no desenvolvimento de sua pesquisa, o uso de tecnologias, principalmente no ensino de Cálculo, pode expandir possibilidades de trabalho com diferentes abordagens e representações algébricas e geométricas, de forma rápida e articulada (MARIN, 2009).

O pesquisador também ressalta que a tecnologia “permite realizar atividades que seriam impossíveis de serem feitas somente com o uso de lápis e de papel, proporcionando a organização de situações pedagógicas com maior potencial para aprendizagem” (MARIN, 2009, p. 136).

Outro aspecto interessante a se destacar é que alguns livros didáticos de Cálculo sugerem a utilização da informática como recurso auxiliar, além do livro didático. Stewart (2011), no prefácio de seu livro afirma que:

A disponibilidade de tecnologia não diminui – pelo contrário, aumenta – a importância de se entender com clareza os conceitos por trás das imagens na tela. Quando utilizados apropriadamente, computadores e calculadoras gráficas são ferramentas úteis na descoberta e compreensão de tais conceitos (STEWART, 2011, p. vii).

Além disso, ainda segundo Marin (2009), com o uso da informática os alunos se preocupam menos com as operações e a parte técnica, possibilitando ao professor uma exploração diferenciada do conteúdo, privilegiando a compreensão e interpretação. Assim, os alunos “são levados de uma maneira rápida a tentar coisas diferentes, a buscar novas descobertas, a observar propriedades, a testar parâmetros, a investigar de maneira diferente da qual estão habituados” (MARIN, 2009, p. 138).

6. Apresentando as atividades investigativas

Buscando identificar contribuições do desenvolvimento de atividades investigativas com auxílio de TICE's para os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, no que se refere às aplicações das derivadas, elaboramos 4 (quatro) atividades que apresentaremos a seguir.

As atividades foram elaboradas na perspectiva de uma investigação que privilegie as “relações entre objetos matemáticos, procurando identificar propriedades” (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006), tendo como características “a descoberta, a exploração, a pesquisa e a autonomia” (PORFÍRIO e OLIVEIRA, 1999) e, principalmente, enfatizando “processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, refletir e generalizar” (OLIVEIRA, SEGURADO e PONTE, 1999).

As atividades investigativas que propomos foram adaptadas de 2 (dois) livros didáticos considerados “clássicos” no currículo de Cálculo Diferencial e Integral de cursos de ciências exatas em universidades brasileiras:

- James Stewart (2011). Cálculo – Volume I;
- George B. Thomas (2011). Cálculo I.

Inicialmente, analisamos a natureza dos exercícios propostos por cada autor, relacionados às aplicações das derivadas. A seguir, selecionamos 4 (quatro) exercícios que julgamos ter potencial para a investigação. Daí, adaptamos os textos introdutórios com o objetivo de contextualizar cada exercício e inserimos algumas orientações para a utilização do software GeoGebra, sempre com a finalidade de

tornar os exercícios, verdadeiras atividades investigativas, dentro da perspectiva adotada nessa pesquisa.

Cabe ressaltar que nossa escolha pelo GeoGebra deve-se ao fato dele ser um software gratuito, com uma interface amigável, disponibilizando simultaneamente as representações algébrica e geométrica, além de possuir recursos de dinamicidade e movimentação, como utilizado nas atividades que passamos, agora, a apresentar.

Atividade 1 – Construindo um tanque cilíndrico (STEWART, 2011, p. 303)

Sua empresa foi contratada para fazer um projeto para captação de água da chuva em uma residência. Para isso, deve ser construído um tanque cilíndrico para armazenar a água, com capacidade para 1.000 litros. Sua tarefa é determinar as dimensões que minimizarão o custo para construir esse reservatório.

- a) Descreva, sucintamente, como você irá levar o custo em consideração para resolver o problema;
- b) Escreva uma fórmula $S(x)$ para a área do tanque em função da medida x do raio da base;
- c) Construa o gráfico dessa função no GeoGebra;
- d) Na barra de ferramentas do GeoGebra, clique em “Novo ponto” e sobre um ponto qualquer da curva; a seguir, clique em “Tangentes”, sobre o ponto marcado e sobre a curva; clique em “Mover” e movimente o ponto; determine, então, o valor de x que torna a área mínima e o valor da área mínima, explicando suas conclusões;
- e) Salve sua construção no GeoGebra, gravando-a como Atividade 1;

f) Verifique, utilizando derivadas, os valores de x e da área mínima obtidos no item anterior.

Apresentamos também, uma construção síntese da Atividade 1:

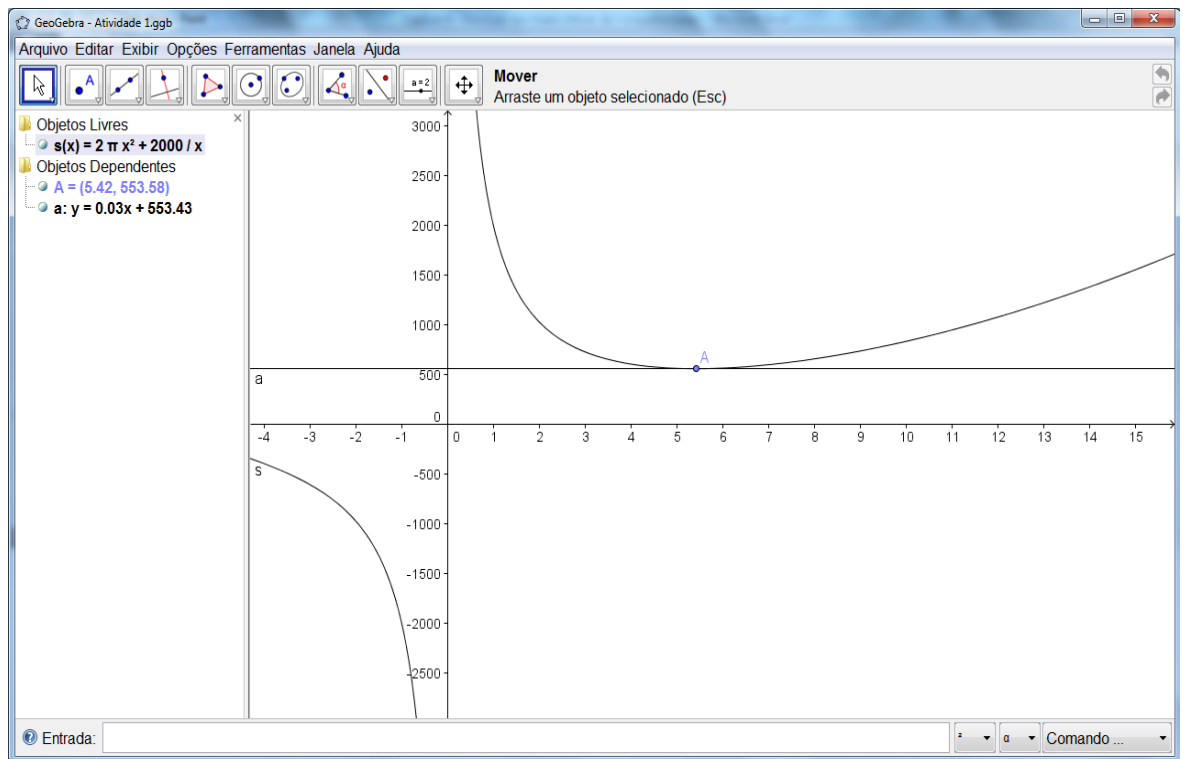
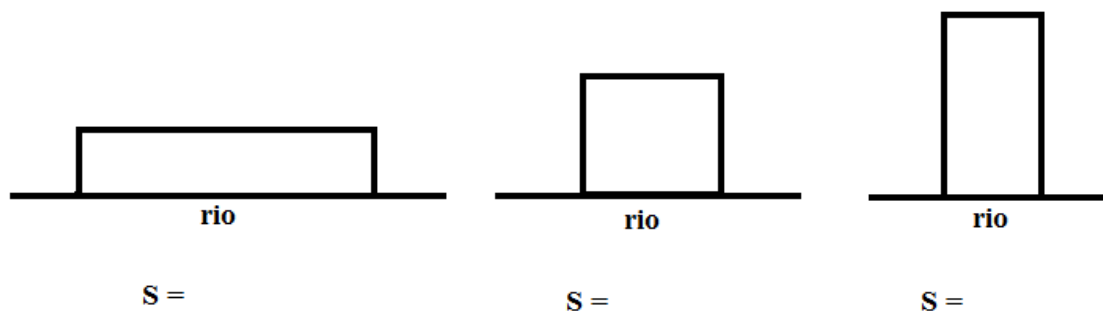


Figura 1 – Construção síntese da Atividade 1

Atividade 2 – Delimitando uma reserva (STEWART, 2011, p. 302)

Segundo a legislação ambiental de Minas Gerais, “consideram-se de preservação permanente, no Estado, as florestas e demais formas de vegetação natural situadas ao longo dos rios ou de qualquer curso d’água [...]” (Decreto nº 33.944, de 18 de setembro de 1992). Um fazendeiro possui uma propriedade próxima a um rio reto e deseja cercar a área de preservação determinada pelo decreto citado. Sua tarefa é determinar as dimensões do campo retangular a ser cercado, sabendo que não é necessário cercar ao longo do rio e que, dispondo de 1200 m de cerca, é possível atender a condição determinada na legislação, desde que seja cercada a área máxima.

a) Verifique que, com diferentes formas de cerca, obtemos áreas diferentes do campo retangular;



b) Obtenha as expressões para a área S e para o perímetro P , em função do comprimento x e da largura y , em metros, da cerca e a seguir, obtenha a expressão da área S apenas em função de x ;

c) Construa o gráfico dessa função no GeoGebra;

d) Na barra de ferramentas do GeoGebra, clique em “Novo ponto” e sobre um ponto qualquer da curva; a seguir, clique em “Tangentes”, sobre o ponto marcado e sobre a curva; clique em “Mover” e movimente o ponto; determine, então, o valor de x que torna a área máxima e o valor da área máxima, explicando suas conclusões;

e) Salve sua construção no GeoGebra, gravando-a como Atividade 2;

f) Verifique, utilizando derivadas, os valores de x e da área máxima obtidos no item anterior.

Apresentamos também, uma construção síntese da Atividade 2:

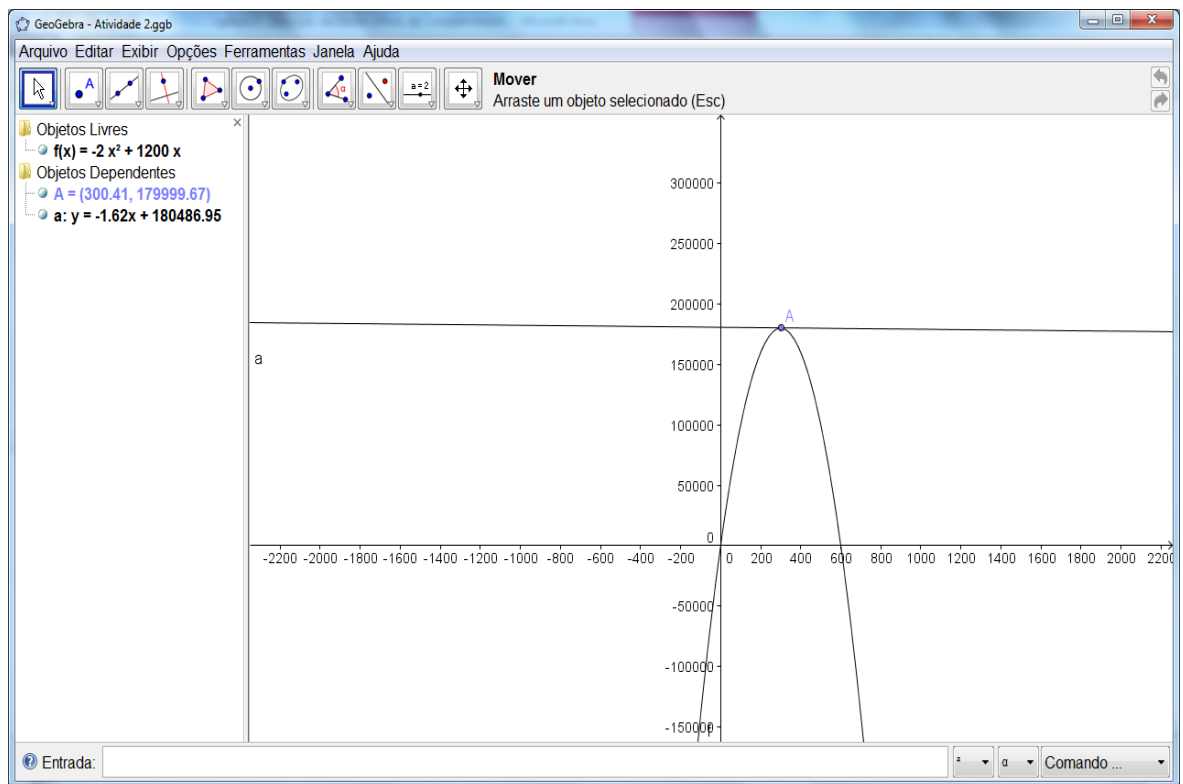


Figura 2 – Construção síntese da Atividade 2

Atividade 3 – Projetando um tanque retangular (THOMAS, 2011, p. 311)

Sua metalúrgica foi contratada por uma fábrica de papel para projetar e construir um tanque retangular de aço, com base quadrada, sem tampa e com 500 m³ de capacidade. O tanque será construído soldando-se chapas de aço umas às outras ao longo das bordas. Sua tarefa é determinar as dimensões para a base e para a altura que farão o tanque pesar o mínimo possível.

- a) Descreva, sucintamente, como você irá levar o peso em consideração para resolver o problema;
- b) Escreva uma fórmula $S(x)$ para a área do tanque em função da medida x do lado da base;
- c) Construa o gráfico dessa função no GeoGebra;
- d) Na barra de ferramentas do GeoGebra, clique em “Novo ponto” e sobre um ponto qualquer da curva; a seguir, clique em “Tangentes”, sobre o ponto marcado e sobre a curva; clique em “Mover” e movimente o ponto; determine, então, o valor de x que torna a área mínima e o valor da área mínima, explicando suas conclusões;
- e) Salve sua construção no GeoGebra, gravando-a como Atividade 3;
- f) Verifique, utilizando derivadas, os valores de x e da área mínima obtidos no item anterior.

Apresentamos também, uma construção síntese da Atividade 3:

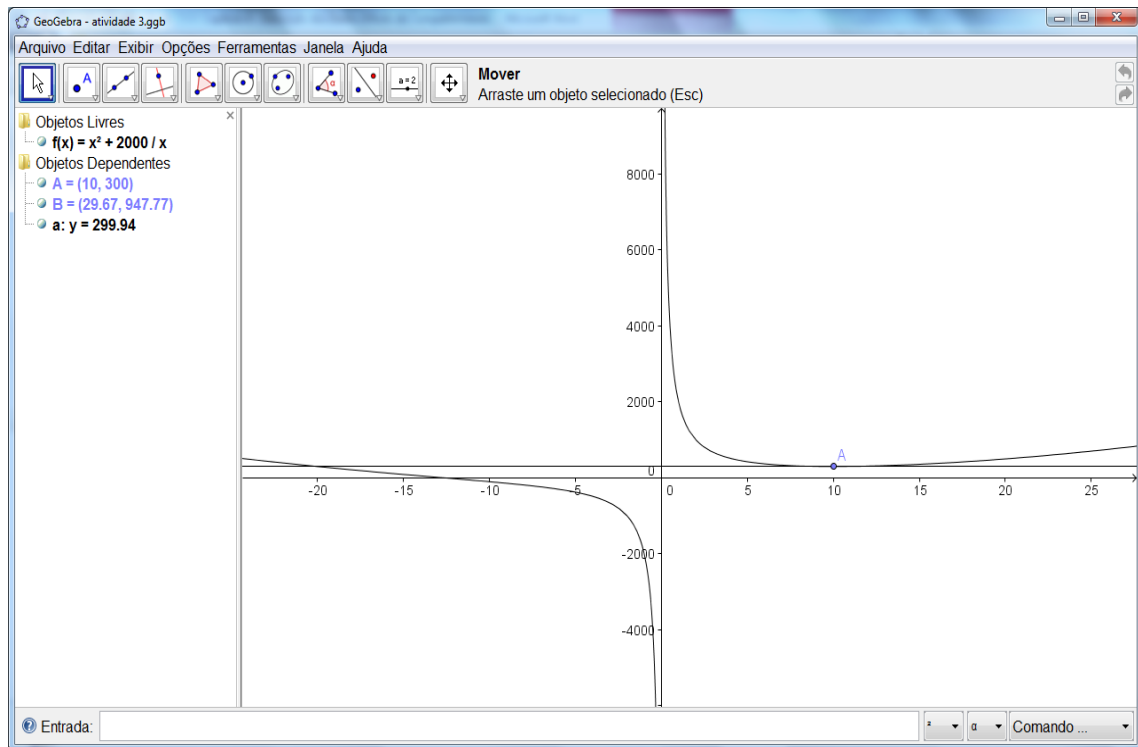
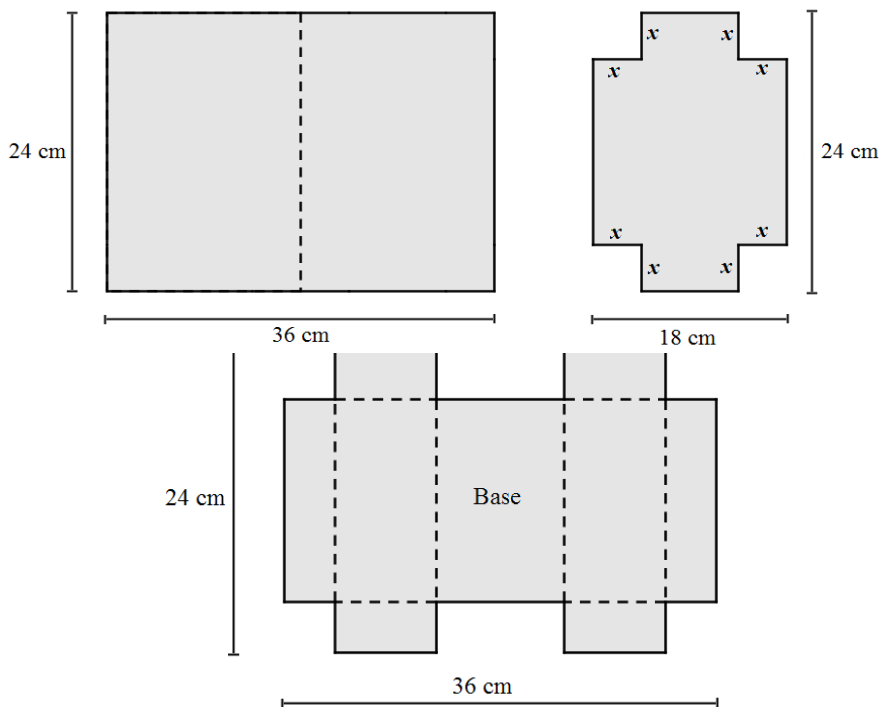


Figura 3 – Construção síntese da Atividade 3

Atividade 4 – Projetando uma caixa (THOMAS, 2011, p. 311)

Uma pequena caixa deve ser projetada tomando como molde uma folha de papelão medindo 24 x 36 cm, que deve ser dobrada ao meio para formar um retângulo de 24 x 18 cm, como se vê na figura a seguir. Depois, quatro quadrados congruentes com lados medindo x são recortados dos vértices do retângulo dobrado. A folha é desdobrada e seis abas são dobradas para cima, formando uma caixa com laterais e uma tampa.



Sua tarefa é determinar a medida x dos lados dos quadrados recortados que farão a caixa ter o maior volume possível.

a) Escreva uma fórmula $V(x)$ para o volume da caixa;

- b) Determine o domínio de V para esse problema;
- c) Construa o gráfico dessa função no GeoGebra;
- d) Na barra de ferramentas do GeoGebra, clique em “Novo ponto” e sobre um ponto qualquer da curva; a seguir, clique em “Tangentes”, sobre o ponto marcado e sobre a curva; clique em “Mover” e movimente o ponto; determine, então, o valor de x que torna o volume máximo e o valor do volume máximo, explicando suas conclusões;
- e) Salve sua construção no GeoGebra, gravando-a como Atividade 4;
- f) Verifique, utilizando derivadas, os valores de x e do volume máximo obtidos no item anterior.

Apresentamos também, uma construção síntese da Atividade 4:

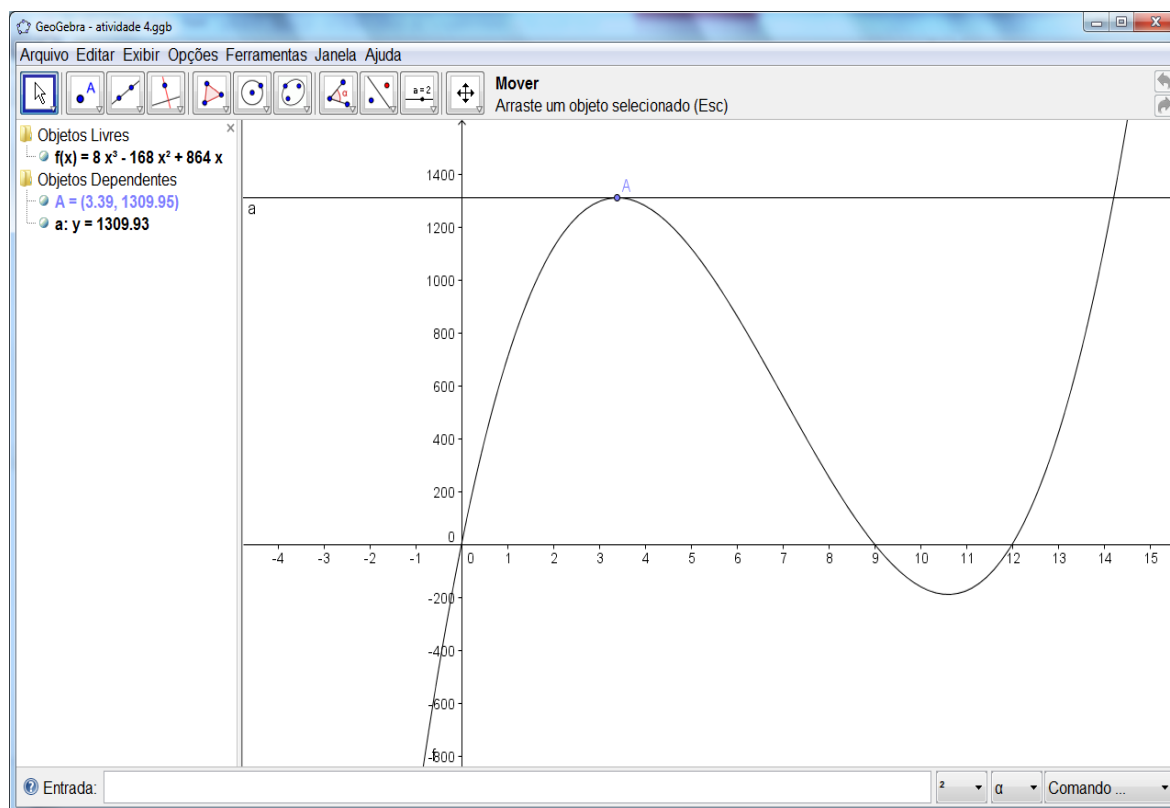


Figura 4 – Construção síntese da Atividade 4

Uma forma de aplicação das atividades e uma experiência de seu desenvolvimento pode ser encontrada em nossa dissertação de mestrado (GONÇALVES, 2012).

7. Contribuições de atividades investigativas utilizando TICE's para os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I

Com base em nossa pesquisa realizada, pudemos inferir as seguintes categorias de contribuições:

7.1. A contribuição para a resignificação dos conhecimentos dos alunos em relação às aplicações das derivadas

Nossa pesquisa apontou que a realização das atividades investigativas contribuiu para uma resignificação dos conhecimentos dos alunos, inicialmente construídos em sala de aula, a partir da oportunidade que eles tiveram de repensar / refletir sobre os conceitos envolvidos nas diversas aplicações das derivadas abordadas nas atividades.

Reafirmamos, então, nossa crença de que o desenvolvimento de atividades investigativas utilizando TICE's pode contribuir para a construção e resignificação de conceitos nucleares do Cálculo Diferencial e Integral.

7.2. A contribuição para a criação de um ambiente de aprendizagem diferenciado e complementar à sala de aula

Nossa pesquisa apontou que a realização das atividades investigativas contribuiu para a criação de um ambiente de discussão, conjecturação e colaboração

que nem sempre é possível de se ter na sala de aula tradicional, na qual o processo de aprendizagem é, quase sempre, totalmente guiado pelo professor.

Reafirmamos, então, nossa crença de que o desenvolvimento de atividades investigativas utilizando TICE's pode contribuir para a criação de um ambiente informatizado de aprendizagem que complementa a sala de aula.

7.3. A contribuição para a formação de um “novo” professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e também do Ensino Superior

Nossa pesquisa apontou que a realização das atividades investigativas contribuiu para formação inicial dos alunos participantes, futuros professores de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, na medida em que eles tiveram a oportunidade de refletir sobre a importância da realização de atividades com softwares para o futuro professor de Matemática.

Reafirmamos, então, nossa crença de que o desenvolvimento de atividades investigativas utilizando TICE's pode contribuir para os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I que é fundamental na formação do professor de Matemática.

Referências / Bibliografia Recomendada

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. **Geometria Dinâmica**: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, XXIII, Campinas, 2003. Anais... Campinas: SBCOMP, p. 275-286, 2003.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas Ciências Naturais e Sociais**: Pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, p. 107-188, 1998.

BARBOSA, M. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação de Mestrado em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, 2004.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral I**. Tese de Doutorado em Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 1999.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRAUMANN, C. A. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (org.). **Atividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. Coimbra: Escola Superior de Educação de Coimbra, p. 5-24, 2002.

CATAPANI, E. C. Cálculo em serviço: um estudo exploratório. In: **Bolema**, Rio Claro, ano 14, nº 16, p. 48-62, 2001.

COSTA, M. C. M. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In: PONTE, J. P. (Org.). **Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Coimbra: Escola Superior de Educação de Coimbra, p. 257-273, 2002.

COUY, L. **Pensamento visual no estudo da variação de funções.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008.

D'ALLANESE, C. **Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 1996.

D'AVOGLIO, A. R. **Derivada de uma função num ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2002.

DOMENICO, L. C. A. **Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral por meio de tecnologias de informação e comunicação.** Dissertação de Mestrado em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, 2006.

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Orgs). **Investigar para aprender matemática.** Lisboa: Projeto MPT e APM, p. 24-48, 1996.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2007.

FROTA, M. C. R. Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.** Belo Horizonte: FUMARC, p. 89-122, 2001.

FROTA, M. C. R. **Investigações na sala de aula de Cálculo.** In: Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, X, São Paulo, 2006. Anais... São Paulo: ANPED, 2006.

GONÇALVES, D. C. **Aplicações das Derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o GeoGebra.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2012.

GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria.** In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, VII, Belo Horizonte, 1996. Anais... Belo Horizonte: SBIE, p. 1-14, 1996.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados.** In: Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV, 1998. Anais... Brasília: RIBIE, 1998. Disponível em: <ism.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.PDF>. Acesso em: 03 de abril de 2010.

IGLIORI, S. B. C. **Considerações sobre o ensino de Cálculo e um estudo sobre números reais.** In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, p. 11-26, 2009.

LACHINI, J. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.** Belo Horizonte: FUMARC, p. 146-190, 2001.

LAGE, M. A. **Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008.

LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. O uso do computador no ensino de Matemática na graduação. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.** Belo Horizonte: FUMARC, p. 68-88, 2001.

LEME, J. C. M.. **Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003.

MACHADO, R. M. **A visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MMP.** Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2008.

MARIN, D. **Professores de Matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2009.

MOURA, A. R. L. Memorial: Fazendo-me professora. **Cad. CEDES**, 1998, v.19, n. 45, p. 27-47.

NASSER, L. **Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de Cálculo.** Encontro Nacional de Educação Matemática, IX, Belo Horizonte, 2007. Recife: SBEM, p. 1-10, 2007.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, p. 43-58, 2009.

OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P. Tarefas de investigação em Matemática: histórias da sala de aula. In: ABRANTES, P. et. al. (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projeto MPT e APM, p. 189-206, 1999.

PEREZ, G. Prática reflexiva do professor de Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 250-263, 2005.

PINTO, M. M. F. Re-visitando uma teoria: o desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de Análise Real. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, p. 27-42, 2009.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. In: **Quadrante**, 7(2), p. 41-70, 1998.

PORFÍRIO, J.; OLIVEIRA, H. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In: ABRANTES, P. et. al. (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projeto MPT e APM, p. 111-118, 1999.

RAMOS, V. V. **Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura em Matemática sobre derivada e suas aplicações**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

SILVA, J. F.; BORGES NETO, H. **Questões básicas no ensino de Cálculo.** In: Educação Matemática em Revista, Edição especial, 1994. Disponível em: <<http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/artigos/artigo-resumo-questoes-basicas-do-ensino-de-calculo.pdf>>. Acesso em: 03 de março de 2011.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. **O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa.** In: Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, I, Curitiba, 2009. Anais... Curitiba: UTFPR, p. 1066-1079, 2009.

STEWART, J. **Cálculo.** Volume I. São Paulo: Thompson Learning, 2011.

THOMAS, G. B. **Cálculo I.** São Paulo: Addison Wesley, 2011.

VILLAREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1999.

ZUIN, E. S. L. Cálculo: uma abordagem histórica. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **Educação Matemática:** a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, p. 13-36, 2001.

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora | CIED
Da Universidade Federal de Ouro Preto,
em mês de ano
sobre papel 100% reciclato (miolo) 90g/m² e (capa) 300 g/m²