Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

ATIVIDADES DE CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS COM O USO DO GEOGEBRA PARA O ENSINO DE DERIVADAS EM CÁLCULO I

Autor: Prof. Ms. Márcio Augusto Gama Ricaldoni
Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Ouro Preto
2014

R487a Ricaldoni, Márcio Augusto Gama.
Atividades de construção e interpretação de gráficos com o uso do GeoGebra para o ensino de derivadas em cálculo I / Márcio Augusto Gama Ricaldoni. Ouro Preto: Ed. UFOP, 2014.

29p.: il.
Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

1. Cálculo. 2. Inovações educacionais. 3. Matemática - Aplicações educacionais. I. Reis, Frederico da Silva. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 372.47

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

Ao Professor de Cálculo Diferencial e Integral I

Caro(a) colega Professor(a) de Cálculo I,

Este material chega até você como uma sugestão de atividades exploratórias para o ensino de Derivadas, utilizando o *software* GeoGebra.

Ele representa o resultado gerado a partir de nossa Dissertação do Mestrado Profissional em Educação Matemática do programa de pós-graduação da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulada "Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no Ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais", sob a orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

As atividades exploratórias aqui apresentadas foram aplicadas a alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, matriculados na disciplina Cálculo I, no 2º semestre de 2012.

Nosso intuito é oferecer a você, Professor de Matemática, um material estimulante, que apresenta as Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática – TICEM como uma ferramenta metodológica capaz de motivar seus alunos a uma participação ativa na construção do seu próprio conhecimento, a partir da visualização proporcionada pelo GeoGebra.

A seguir, apresentamos cinco atividades exploratórias relacionadas a conceitos e propriedades de limites, continuidade e derivadas de funções reais.

Esperamos que esse material possa contribuir de forma significativa para sua prática pedagógica, bem como propiciar reflexões a respeito da utilização das TICEM na sala de aula.

Prof. Ms. Márcio Augusto Gama Ricaldoni

Sumário

1. As Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática

Estamos vivendo na era digital. Cada vez mais, computadores e máquinas informatizadas são utilizados para resolver problemas e situações; comunicação, informação e serviços são efetuados através de novas mídias. Na Educação e, particularmente, na Educação Matemática, não poderia ser diferente. As Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM fazem parte das investigações há pelo menos duas décadas no Brasil e, há mais tempo, em outros centros mundo a fora. Para Marin (2011):

> A tecnologia de informação e comunicação (TIC) incorporada às práticas sociais, transforma a forma de viver do ser humano porque oferece outras maneiras de comunicação, produção e comercialização de bens e mercadorias, divertimento e educação. [...] A capacidade técnica das máquinas possibilita planejar atividades de ensino antes impensáveis com o uso de lousa e giz. Para o ensino de Matemática, por exemplo, há vários softwares que permitem explorar os conceitos de Matemática de uma forma mais dinâmica e detalhada (MARIN, 2011, p. 527).

Questões importantes envolvendo o uso dessas novas tecnologias estão presentes nas novas propostas educacionais e nas pesquisas desenvolvidas na área da Educação Matemática. Algumas indagações são levantadas: Como o computador e outras mídias eletrônicas podem contribuir positivamente nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática? A sua utilização pode ser negativa quanto ao desenvolvimento de habilidades matemáticas? Em que momento e como aproveitar essas ferramentas para promover uma aprendizagem significativa? De acordo com Borba, (2007):

> Talvez ainda seja possível lembrar dos discursos sobre o perigo que a utilização da informática poderia trazer para a aprendizagem dos alunos. Um deles era o de que o aluno iria só apertar teclas e obedecer a orientação dada pela máquina. Isso contribuiria ainda mais para torná-lo um mero repetidor de tarefas. Na verdade, ainda hoje essa preocupação sempre surge nos diversos cursos, palestras e aulas que temos ministrado. Tal argumento está presente quando consideramos a educação de modo geral, mas é ainda mais poderoso dentro de parte da comunidade de educação matemática. Em especial para aqueles que concebem a matemática como a matriz do pensamento lógico. Nesse sentido, se o raciocínio matemático passa a ser realizado pelo computador, o aluno não precisará raciocinar mais e deixará de desenvolver sua inteligência. Por outro lado, tem havido, mais

> recentemente, argumentos que apontam “o computador” como a solução para os problemas educacionais (BORBA, 2007, p. 11).

Portanto, cabe à comunidade escolar repensar suas práticas pedagógicas, incorporando esses novos instrumentos, e o professor é peça fundamental na mudança de atitude para que as TICEM façam, de fato, parte dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Penteado (1997, p. 23) afirma: “Para explorar o potencial educacional das Tecnologias Informáticas (TI), é preciso haver mudanças na organização da escola e, particularmente, no trabalho do professor”.

A escola precisa investir em mudanças no currículo e também em infraestrutura. Quanto ao professor, além de investimento em formação, sua ação pedagógica deve ser repensada, abandonando práticas tradicionais e verticalizadas e adotando uma nova postura de mediador e coordenador das atividades na construção do conhecimento.

Tecnologias da Informação e Comunicação fazem parte do mundo atual e também já fazem parte do dia a dia escolar. Além disso, essas ferramentas tecnológicas estão em um processo acelerado de evolução e modernização, fazendo com que educadores e pesquisadores da área educacional busquem formas corretas e eficazes do seu uso. Como destaca Zuchi (2009):

> A evolução dos instrumentos tecnológicos, cada vez mais sofisticados, tem estimulado um número considerável de pesquisas, em nível internacional, sobre a interação desses instrumentos no contexto de ensino de matemática. Entretanto, a questão da integração das TICE’s (Tecnologias da Informação e Comunicação aplicadas à Educação) no ambiente escolar não é uma tarefa fácil. Várias pesquisas mostram a complexidade dessa integração (ZUCHI, 2009, p. 239).

Uma das dificuldades que surgem com a sofisticação das novas tecnologias é a organização de uma sequência didática, capaz de auxiliar o professor em suas aulas. O computador, em particular, deve ser utilizado como uma ferramenta na construção do conhecimento matemático, um facilitador no entendimento e construção de conceitos. Então, cabe ao professor, buscar a sua própria formação na área e, certamente, o desenvolvimento de novas habilidades, além do conhecimento de *softwares* que possibilitem uma boa utilização das TICEM. Segundo Villarreal (1999):

> Se seu uso não é adequado, o computador pode trazer dificuldades adicionais tanto no ensino quanto na aprendizagem matemática. A pergunta é: o que significa “uso adequado”? Se um *software* calcula derivadas e integrais de funções, ensinar técnicas de derivação e

> integração, tal como é feito em um ambiente sem computador, perde sentido. Mas, por outro lado, há sempre quem afirme a necessidade de conhecer as técnicas, já que nem sempre se tem acesso ao computador para fazer cálculos. Inversamente, se as atividades planejadas para realizar em um ambiente computacional podem realizar-se sem dificuldades com lápis e papel, o uso do computador pode atrapalhar a tarefa porque não é decisivo ou indispensável para a realização da mesma, e a demanda de tempo no aprendizado dos comandos não justifica seu emprego. A obsolescência de alguns conteúdos e a necessidade de novas atividades surgem como resultado da introdução do computador no âmbito educativo. [...] A presença do computador oferece a possibilidade de observar processos de construção de conhecimento matemático que não apareceriam em outros ambientes e que vão além do simples uso do computador para resolver um determinado problema matemático (VILLARREAL, 1999, p. 27).

Em particular, o ensino de Cálculo com TICEM tem se revelado um promissor campo de pesquisa, pelos vários motivos já citados e também pelo especial fato dessa disciplina apresentar em sua problemática fundamental, o estudo de funções e, consequentemente, a exploração de suas representações gráficas que, em diversos casos, apresentam um elevado grau de complexidade. Nesse sentido, o computador e os novos *softwares* de geometria dinâmica podem contribuir de forma excepcional na construção e interpretação de gráficos, auxiliando na resolução de problemas.

1.1. As TICEM e o Ensino de Cálculo

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral tem provocado um movimento dentro da Educação Matemática Superior, promovendo pesquisa e incentivando a formação de grupos de pesquisa, principalmente na busca e desenvolvimento de propostas para a melhoria no ensino dessa disciplina. As TICEM, em particular, as calculadoras gráficas e o computador, têm proporcionado pesquisas e boas propostas como solução para tal problema. Com relação a essas mídias, Villarreal (1999), destaca quatro aspectos relacionados ao uso do computador:

> 1) ilustra e reforça conceitos básicos; 2) reduz a preocupação com as técnicas de cálculo e permite concentrar-se nas ideias centrais do Cálculo, abordando aplicações mais realistas; 3) comunica novas ideias visual e experimentalmente antes de passar a uma explicação através de palavras; 4) oferece imagens que, de outra forma, seriam inacessíveis para os estudantes (VILLARREAL, 1999, p. 30).

De acordo com Marin (2011), o uso de TICEM tem sido recomendado pelos especialistas pelo fato delas favorecerem o trabalho com “diferentes representações, tais como uma tabela, gráficos e expressões algébricas de forma rápida e articulada. Isso é especialmente recomendado para a disciplina do Cálculo”. Sobre as implicações do uso dessas tecnologias no trabalho docente, ele argumenta:

> A literatura aponta que com a presença da TIC no cenário educacional o professor é desafiado a rever e ampliar seus conhecimentos para enfrentar novas situações. A inserção deste tipo de tecnologia na prática docente provoca demandas que vão além da organização e da rotina de sala de aula. [...] algumas delas: mudanças na organização do espaço físico, na carga de trabalho, nas relações entre professores e alunos, nas emoções, no papel do professor, na organização do currículo, entre outras (MARIN, 2011, p. 533).

Em seu trabalho, Marin (2011) apresenta um levantamento de como professores do Ensino Superior têm utilizado TICEM em suas aulas de Cálculo. Com base em dados obtidos em entrevistas com professores, ele aborda como o trabalho com tecnologias é considerado, na avaliação da aprendizagem, como uma das questões abordadas. Em suas considerações finais, o pesquisador destaca:

> Percebe-se que não há uma maneira única de se desenvolver a aula com a estrutura oferecida pelas Universidades, sendo que cada professor tem a sua forma de trabalhar. Mas são unânimes ao recomendar a importância de se estabelecerem ligações entre o que está sendo desenvolvido com o uso de TIC e o que está sendo estudado com o uso de outra tecnologia, por exemplo, nas aulas em que o professor escreve na lousa. (MARIN, 2011, p. 542).

Com relação a quais conteúdos as TICEM foram utilizadas não há uma uniformidade, Marin (2011) relata: “A maneira de explorar esses conteúdos varia e está muito ligada à experiência de vida de cada um, da relação que se tem com a disciplina para perceber em qual tópico pode-se lucrar com o uso do computador, e qual aquele que não se deve fazer o uso.”

Estudos recentes evidenciam que o uso das TICEM contribui de forma significativa nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo, favorecendo a compreensão dos conceitos em detrimento das habilidades algorítmicas. Essas evidências são descritas em Villarreal (1999), em uma rica revisão de literatura, incluindo autores de outros países que realizaram pesquisas em ensino de Cálculo com uso de TICEM. Ela ainda resume:

> Uma das vantagens assinaladas por vários autores (Schoenfeld, 1995; Heid & Baylor, 1993; Hillel et al., 1992; Heid, 1988) é a possibilidade de atingir uma maior compreensão conceitual, já que o computador dispensaria ou diminuiria o tempo dedicado à aprendizagem de técnicas e algoritmos. Outros autores (Borba, 1995c; Capuzzo Dolcetta et al., 1988) enfatizam que os ambientes computacionais favorecem abordagens matemáticas mais experimentais, caracterizadas pela formulação rejeição/verificação e reformulação de hipóteses, geração de padrões e antecipação de resultados. Vários autores (Borba, 1995c; Schoenfeld, 1995; Smith, 1995; Capuzzo Dolcetta et al., 1988) referem-se à visualização como um aspecto favorecido pelo computador, seja pela possibilidade de gerar representações gráficas com facilidade seja pelo tipo de abordagem matemática, mais visual, que ele permite (VILLARREAL, 1999, p. 35).

Das vantagens da utilização das TICEM no ensino de Cálculo, apresentadas pelos diversos textos que tratam o assunto, a visualização é um dos aspectos favorecidos pela utilização de TICEM nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo, como argumenta Frota (2013): “A importância dos processos de visualização e de comunicação de ideias matemáticas tem sido destaque na pesquisa em educação matemática” (p. 61).

Villarreal ainda destaca Borba (1993, p. 42), ao argumentar que “a mídia tradicional no âmbito matemático, o lápis e o papel, favorece a abordagem algébrica de questões matemáticas. Já a mídia computacional privilegia abordagens onde a visualização tem papel fundamental".

1.2. A Visualização e o Ensino de Cálculo

Inicialmente, destacamos do dicionário Michaelis, a seguinte definição do termo visualização que é pertinente aos nossos estudos: “Transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis.” Questões ligadas à visão de imagens para construção e apreensão de conhecimento estão diretamente relacionadas às nossas atividades.

Segundo Flores (2012, p. 32), “o termo visualização provém da psicologia e, inicialmente, era associado às habilidades visuais que os indivíduos tinham e podiam desenvolver para interpretar imagens”. Na década de 1980, as pesquisas em Educação Matemática começaram a se apropriar do termo, apoiadas em uma perspectiva cognitivista, como a autora nos relata:

> Segundo Presmeg (2006), somente nos anos 1980, com a ascensão do construtivismo e a ênfase no meio social e cultural na educação, é que

> a importância do visual e suas manifestações nas transformações dos conhecimentos matemáticos passa a ser cada vez mais reconhecida. Contudo, somente nos anos 1990, com o reconhecimento da visualização na educação matemática, as pesquisas passam a problematizar aspectos antes não considerados, tais como, o desenvolvimento curricular; a eficácia da visualização para a aprendizagem matemática; a imagem e a representação (FLORES, 2012, p. 36).

Muitas pesquisas em Educação Matemática enfatizam a importância da visualização para o ensino e a aprendizagem matemática. Portanto, inúmeros trabalhos e linhas de pesquisa abordam e conceituam o termo. Villarreal (1999) detalha algumas das principais definições associadas à visualização:

> A pesquisa sobre visualização em Educação Matemática é extensa e tem sido associada à habilidade espacial, ao conceito de *imagery* (refere-se a imagens mentais), às representações gráficas e também à intuição. [...] Se analisadas e comparadas as diferentes definições, pode-se salientar a existência de algumas semelhanças. Parece claro, nas colocações de Gutiérrez (1996), Zazkis, Dubinsky & Dautermann (1996), Zimmermann & Cunningham (1991), Bem-Chaim, Lappan & Houang (1989) e Bishop (1989) que a visualização na Educação Matemática é considerada como um processo que percorre caminhos de mão dupla que relacionam a compreensão do estudante e a mídia externa. Por outro lado, as afirmações de Presmeg (1986a, 1986b) e Eisenberg & Dreyfus (1989) enfatizam só uma das direções destes caminhos. No caso de Presmeg, o processo de formar imagens tem seu ponto de partida no ambiente externo, enquanto que para Eisenberg & Dreyfus, a partir das compreensões matemáticas, geram-se representações externas (VILLARREAL, 1999, p. 35 e 39).

Destas inúmeras definições para a visualização destacamos a que mais se adequa ao presente trabalho, que entende a visualização como um processo de construção e transformação de imagens mentais, a partir de informações verbais ou visuais, permitindo a comunicação e a elaboração representações visuais. E, não menos importante, a utilização dessas imagens mentais para descobrir e compreender conceitos matemáticos. Estas concepções do termo visualização são explicitadas por Frota (2013):

> A visualização é aqui entendida como um processo que consiste em interpretar e/ou criar imagens para comunicar ideias, lançando mão de diferentes formas para expressar essas ideias (Frota e Couy 2009). Visualizar é interpretar informações, construindo representações visuais para situações ainda não visuais (Dreyfus 1991), o que demanda, por vezes, traduzir uma informação apresentada apenas verbalmente em informação visual, utilizando desenhos, tabelas e gráficos (FROTA, 2013, p. 64).

A expansão das pesquisas em visualização na Educação Matemática, e principalmente as discussões dos conceitos desse termo, favoreceram e ampliaram as pesquisas em Ensino de Cálculo; e ainda são mais fortes e evidentes quando se trata de Ensino de Cálculo com o auxílio das TICEM. A visualização tem uma grande importância para o Cálculo, como já argumentava Tall (1991):

> Negar a visualização é negar as raízes de muitas de nossas mais profundas ideias matemáticas. Em estágios iniciais do desenvolvimento da teoria de funções, limites, continuidade e coisas do tipo, a visualização foi uma fonte fundamental de ideias. Negar estas ideias aos estudantes é cortá-las das raízes históricas da disciplina. (TALL, 1991, p. 105).

Outra faceta da relação entre computadores e visualização nos é oferecida por Villarreal (1999) ao destacar que:

> Dentre as múltiplas potencialidades que o computador oferece para a Educação Matemática, poder-se-ia dizer que o processo de visualização por ela favorecido ocupa um lugar privilegiado. Ao mesmo tempo, a importância da visualização no ensino, aprendizagem e construção dos conceitos de Cálculo é indicada como fundamental por muitos autores. Assim, a visualização se transforma em um denominador comum nas pesquisas que relacionam Cálculo e computadores (VILLARREAL, 1999, p. 43).

2. Apresentando as atividades exploratórias com o uso do GeoGebra

A seguir, apresentamos cinco atividades exploratórias relacionadas ao conceito de derivada, elaboradas para serem trabalhadas em ambientes informatizados utilizando um *software* de geometria dinâmica. O programa utilizado em RICALDONI, (2014), foi o GeoGebra, um *software* de geometria dinâmica de fácil utilização e adquirido gratuitamente.

Na primeira atividade a proposta é a construção de gráficos de funções elementares, explorando seus principais elementos: domínio, imagem, raízes, continuidade e limites infinitos. Atividade simples, porém útil para a familiarização dos comandos do *software* e fixação de conceitos elementares das funções.

Na atividade 2 o conceito de derivada como inclinação da reta tangente é abordado de forma algébrica e verificado de forma geométrica, a partir dos recursos eletrônicos disponíveis no GeoGebra.

A terceira atividade apresenta uma proposta inversa à trabalhada na segunda atividade, pois a derivada da função é obtida a partir da inclinação da reta tangente traçada juntamente com o gráfico da função na tela do computador. A dinamicidade do software escolhido permite esta movimentação da reta e, ao mesmo tempo, a apresentação algébrica da mesma.

Na quarta atividade, o conceito de derivadas laterais é abordado, utilizando-se a mesma estratégia trabalhada na atividade anterior. Que é basicamente obter a derivada da função no ponto a partir do coeficiente angular da reta tangente construída geometricamente.

A quinta e última atividade explora uma das aplicações das derivadas, que é o cálculo de valores de máximo ou mínimo local de uma função, mais uma vez de forma dinâmica, a partir do gráfico plotado da equação que representa o problema apresentado.

<u>2.1. Atividade 1:</u> Construindo gráficos de Funções Elementares e interpretando domínio, imagem, raízes, continuidade e limites infinitos.

Objetivo: Identificar domínio*, imagem, raízes, continuidade e limites infinitos de funções elementares a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

*Aqui, estamos interpretando o domínio como sendo o maior subconjunto de IR no qual a lei de definição da função f (x) está definida!

Sequência Didática: 1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;
2) A partir do gráfico construído, analise cada item, discutindo com seu colega!

Funções Elementares:

1) $\boldsymbol{f(x) = x}$

a) D_f =

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

2) $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

a) D_f =

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

3) $\boldsymbol{f(x) = x^3}$

a) D_f =

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

4) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

a) D_f =

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

5) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$

a) D_f =

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

6) $\boldsymbol{f(x) = |x|}$

a) D_f =

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

7) $\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

8) $\boldsymbol{f(x) = ln\, x}$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

9) $\boldsymbol{f(x) = sen\ x}$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

10) $\boldsymbol{f(x) = tg\ x}$

a) $D_f =$

b) Im =

c) Raízes:

d) Pontos de Descontinuidade:

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

<u>2.2. Atividade 2:</u> Construindo gráficos de Funções Polinomiais e de Retas Tangentes utilizando a derivada.

Objetivo: Identificar as propriedades de retas tangentes utilizando derivadas de funções polinomiais a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

Sequência Didática: 1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;
2) Calcule algebricamente a derivada;
3) Obtenha a equação da reta tangente nos pontos indicados;
4) Construa os gráficos das retas no GeoGebra;
5) A partir dos gráficos construídos, analise cada item, discutindo com seu colega!

a) Verifique se a reta é crescente, decrescente ou constante;
b) Relacione com o valor da derivada.

1) $\boldsymbol{f(x) = x^2}$; $\boldsymbol{f'(x) =}$ _____

x = 2 → t: ____
Análise: ____

x = 0 → t: ____
Análise: ____

x = −2 → t: ____
Análise: ____

2) $\boldsymbol{f(x) = x^3}$; $\boldsymbol{f'(x) =}$ _____

x = 1 → t: ____
Análise: ____

x = 0 → t: ____

Análise: ____

x = −1 → t: ____

Análise: ____

3) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x;\ f'(x) =}$ ______

x = 1 → t: ____

Análise: ____

x = 0 → t: ____

Análise: ____

x = −1 → t: ____

Análise: ____

4) $\boldsymbol{f(x) = 2x;\ f'(x) =}$ ______

x = 1 → t: ____

Análise: ____

x = k → t: ____

Análise: ____

<u>2.3. Atividade 3:</u> Construindo gráficos de Funções Polinomiais e movimentando Retas Tangentes.

Objetivo: Identificar as propriedades de retas tangentes utilizando a ferramenta "Reta Tangente" de funções polinomiais a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

Sequência Didática: 1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;

2) Marque um ponto sobre o gráfico construído, utilizando a ferramenta "Ponto em Objeto";

3) Construa o gráfico da reta tangente no ponto selecionado, utilizando a ferramenta "Reta Tangente";

4) Movimente o ponto selecionado, utilizando a ferramenta "Mover";

5) Observe a equação da reta tangente na janela algébrica;

6) A partir dos gráficos construídos, descreva os valores de x para os quais a reta tangente é crescente, decrescente ou constante, discutindo com seu colega!

1) $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

Crescente:____

Decrescente:____

Constante: ____

2) $\boldsymbol{f(x) = x^3}$

Crescente:____

Decrescente:____

Constante: ____

3) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x}$

Crescente:____

Decrescente:____

Constante: ____

4) $\boldsymbol{f(x) = 2x}$

Crescente:____

Decrescente:____

Constante: ____

2.4. Atividade 4: Construindo gráficos de Funções Contínuas e movimentando Retas Tangentes, relacionando com as Derivadas Laterais.

Objetivo: Identificar as derivadas laterais de funções contínuas utilizando a ferramenta "Reta Tangente" a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

Sequência Didática: 1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;

2) Marque um ponto sobre o gráfico construído, utilizando a ferramenta "Ponto em Objeto";

3) Construa o gráfico da reta tangente no ponto selecionado, utilizando a ferramenta "Reta Tangente";

4) Movimente o ponto selecionado à direita e à esquerda do ponto fixado, utilizando a ferramenta "Mover";

5) Observe a equação da reta tangente na janela algébrica;

6) A partir dos gráficos construídos, descreva os valores das derivadas laterais e conclua se a função é derivável no ponto fixado, discutindo com seu colega!

1) $\boldsymbol{f(x) = x^2; x = 0}$

$f'_+(0) =$_________

$f'_-(0) =$_________

$f'(0) =$ __________

2) $\boldsymbol{f(x) = |x|; x = 0}$

$f'_+(0) =$_________

$f'_-(0) =$_________

$f'(0) =$ __________

3) $\boldsymbol{f(x) = x^3; x = 0}$

$f'_+(0) =$ __________

$f'_-(0) =$ __________

$f'(0) =$ __________

4) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 4, & \text{se } x \leq 2 \\ x^2, & \text{se } x > 2 \end{cases}; x = 2}$

$f'_+(2) =$ __________

$f'_-(2) =$ __________

$f'(2) =$ __________

5) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x^2, & \text{se } x > 2 \end{cases}; x = 0}$

$f'_+(0) =$ __________

$f'_-(0) =$ __________

$f'(0) =$ __________

2.5. Atividade 5: Problemas de Maximização e Minimização.

Objetivo: Identificar os extremos de funções deriváveis utilizando a ferramenta "Reta Tangente" a partir dos gráficos construídos no GeoGebra.

Sequência Didática: 1) Leia atentamente o problema proposto para o seu grupo e anote as variáveis envolvidas;

2) Expresse algebricamente a função que modela matematicamente o problema e seu domínio de definição;

3) Construa o gráfico da função modelada no GeoGebra;

4) Marque um ponto sobre o gráfico construído, utilizando a ferramenta "Ponto em Objeto";

5) Construa o gráfico da reta tangente no ponto selecionado, utilizando a ferramenta "Reta Tangente";

6) Movimente o ponto selecionado ao longo da curva, utilizando a ferramenta "Mover";

7) A partir do gráfico construído, descreva o ponto de máximo (ou mínimo) e o valor máximo (ou mínimo) da função, de acordo com o problema proposto, discutindo com seus colegas!

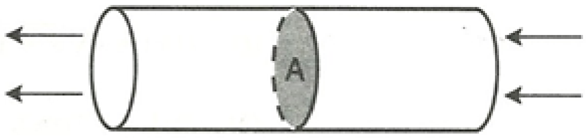
8) Anote a equação da reta tangente que aparece na janela algébrica;

9) Utilizando as derivadas primeira e segunda, verifique algebricamente os resultados obtidos no GeoGebra.

10) Apresente o problema e sua solução para seus colegas de sala!

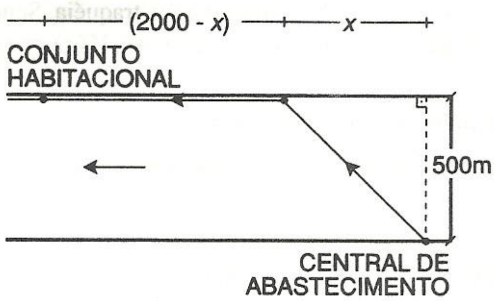
PROBLEMAS PROPOSTOS (FLEMMING e GONÇALVES, 2006)

1) Na Biologia, encontramos a fórmula $\phi = V \cdot A$, onde ϕ é o fluxo de ar na traqueia, V é a velocidade do ar e A a área do círculo formado ao seccionarmos a traqueia. Quando tossimos, o raio diminui, afetando a velocidade do ar na traqueia. Sendo r_0 o raio normal da traqueia, a relação entre a velocidade V e o raio r da traqueia durante a tosse é dada por $V(r) = a \cdot r^2(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva.

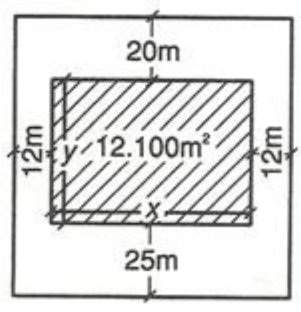


Supondo $r_0 = 1$ cm e $a = 3\ l/cm^5.s$. Calcule o valor de r para o qual teremos o maior fluxo possível.

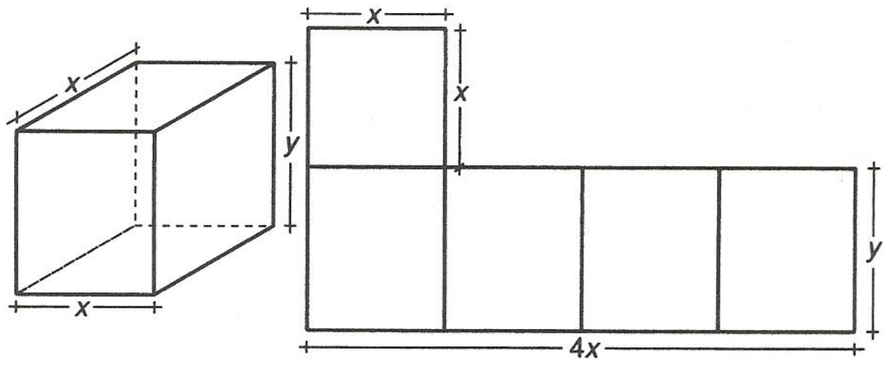
2) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada na margem de um rio de 500 metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de 640 milhares de reais por quilômetro, enquanto em terra, custa 312 milhares e reais por quilômetro. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?



3) Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12100 m^2. A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25m da frente, 20 m atrás e 12 m de cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha a área mínima na qual possa ser construído este galpão.



4) Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja 2500 m^3. O material da base vai custar R$ 1.200,00 por m^2 e o material dos lados R$ 980,00 por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.



5) Suponha que o custo total $C(q)$ de produção de toneladas de um produto, em milhares de reais, é dado por $C(q) = 0{,}03q^3 - 1{,}8q^2 + 39q$. Supondo que a empresa possa vender tudo que produz, determine o lucro máximo que pode se obtido, se cada tonelada do produto é vendida a um preço de 21 milhares de reais.

3. Algumas recomendações para os Professores

> Crescer como profissional, significa ir localizando-se no tempo e nas circunstâncias em que vivemos, para chegarmos a ser um ser verdadeiramente capaz de criar e transformar a realidade em conjunto com os nossos semelhantes, para o alcance de nossos objetivos como profissionais da Educação.
>
> Paulo Freire

A partir de nossa experiência docente no Ensino Superior e de nossa experiência de pesquisa realizada, podemos humildemente fazer algumas recomendações para os professores que quiserem utilizar nossas atividades exploratórias com utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM em sua prática pedagógica:

- Repensar sua concepção de ensino e aprendizagem para que ocorra, de fato, um ensino para a aprendizagem de Cálculo I;

- Despertar de um maior interesse nos alunos a partir das atividades com TICEM apresentadas;

- Buscar, a todo instante, o desenvolvimento da criatividade, da motivação e da criticidade nos alunos;

- Valorizar, em sua prática pedagógica, a importância de uma construção de conceitos e de propriedades matemáticas de forma contextualizada;

- Priorizar, no desenvolvimento das atividades em sala de aula, a visualização proporcionada pelas TICEM;

- Oportunizar o trabalho em grupo e de forma colaborativa, como forma de organização da sala de aula e do laboratório de informática.

Por fim, apresentamos também, algumas contribuições que nossa experiência de pesquisa com as TICEM (RICALDONI, 2014) revelou:

1. A contribuição para a formação e o enriquecimento de imagens conceituais multivariadas relacionadas ao conceito de Derivadas

Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias com a utilização de um *software* contribuiu para a formação e a lapidação de várias imagens conceituais relacionadas às derivadas, com destaque paras a imagens algébrica e geométrica da derivada como inclinação da reta tangente num ponto, além das suas propriedades fundamentais na construção do gráfico de uma função.

Acreditamos que, em nossa prática docente, é fundamental trabalharmos com as várias representações da derivada, pois o conflito gerado entre as imagens construídas em sala de aula e no laboratório de informática contribui para um enriquecimento das imagens conceituais e pode levar ao estabelecimento de definições conceituais mais próximas das definições formais dos conceitos do Cálculo I.

2. A contribuição para a construção de conceitos a partir das atividades exploratórias com o GeoGebra

Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias com o uso do GeoGebra contribuiu para a possibilidade de construção de novos conceitos associados à derivada no laboratório de informática, sem que esses conceitos tenham sido trabalhados em sala de aula, como foi o caso da apresentação das derivadas laterais de uma função.

Acreditamos que, em nossa prática docente, é fundamental estimularmos nossos alunos a pensarem em exemplos e contraexemplos nucleares no desenvolvimento dos conceitos do Cálculo I, pois assim eles podem se sentir mais estimulados ao raciocínio e a uma participação ativa que perpassa os limites do laboratório de informática e acaba se estendendo à sala de aula.

3. A contribuição para a aplicação dos conceitos de derivadas em problemas de Maximização e Minimização

Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias de construção de gráficos contribuiu não só para o entendimento dos conceitos e propriedades das derivadas mas também valorou sua aplicação em problemas práticos envolvendo a própria Matemática e outras áreas do conhecimento, o que nem sempre é uma prioridade nas ementas tradicionais de disciplinas de Cálculo.

Acreditamos que as aplicações não só ressignificam os conceitos do Cálculo I, como também remetem a um resgate histórico das raízes do Cálculo Diferencial e Integral, cujo desenvolvimento inicial dos conceitos esteve atrelado a suas aplicações; do ponto de vista didático, os problemas de Maximização e Minimização também enriquecem as imagens conceituais formadas pelos alunos, por possibilitar a utilização dos conceitos e propriedades das derivadas.

4. A contribuição para a formação de um professor de Matemática que valorize a visualização proporcionada pelas TICEM

Nossa pesquisa mostrou que a realização das atividades exploratórias utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática contribuiu para a formação inicial de um professor de Matemática que ao vivenciar, como discente, uma experiência que ressalta a importância da visualização, passe a valorizar seus diversos processos em sua futura prática docente.

Acreditamos que a utilização das TICEM tem um papel fundamental no fomento e desenvolvimento dos processos de visualização que, por sua vez, são imprescindíveis para a formação de imagens mentais e representações gráficas nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I.

Por fim, gostaríamos de destacar, enquanto pesquisador, a importância das discussões ocorridas após a realização das atividades exploratórias. Elas foram fundamentais na promoção de uma aprendizagem significativa por parte dos alunos, levando à ampliação das suas representações mentais e ao fortalecimento das suas imagens conceituais.

Referências / Bibliografia Recomendada

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FLEMMING, D. M., GONÇALVES, M. B. Cálculo A. São Paulo: Makron Books, 2010;

FLORES, C. R. Pesquisa em visualização na Educação Matemática: conceitos, tendências e perspectivas. In: Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.

FROTA, M. C. R. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em Cálculo. In: FROTA, M. C. R.; CARVALHO, M. F. T.; BIANCHINI, B. L. (Orgs.) Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior. Campinas: Papirus, p. 61-88, 2013.

MARIN, D.; PENTEADO, M. G. Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo. In: Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 527-546, 2011. Disponível em: <*revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7057*>. Acesso em: 05 de novembro de 2013.

PENTEADO, M. Possibilidades para a formação de professores de matemática. In: PENTEADO, M.; BORBA, M. C. (Orgs.) A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho D'Água, p. 23-34, 2000.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates. Recife: SBEM, p. 81-98, 2009.

RICALDONI, M. A. G. Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no Ensino de Cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto: UFOP, 2014.

SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 1. São Paulo: Makron Books, 1987.

STEWART, J. Cálculo, Vol. I. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

TALL, D. *Intuition and rigor: the role of visualization in the Calculus.* In: ZIMMERMANN, W., CUNNINGHAM, S. *Visualization in teaching and learning Mathematics.* Washington, DC: Mathematical Association of America, 1991. p. 105 – 119.

VILLARREAL, M. E. O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências Humanas e Sociais, Franca, 1999.

ZUCHI, I. A integração de ambientes tecnológicos no ensino: uma perspectiva instrumental e colaborativa. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates. Recife: SBEM, p. 239-252, 2009.